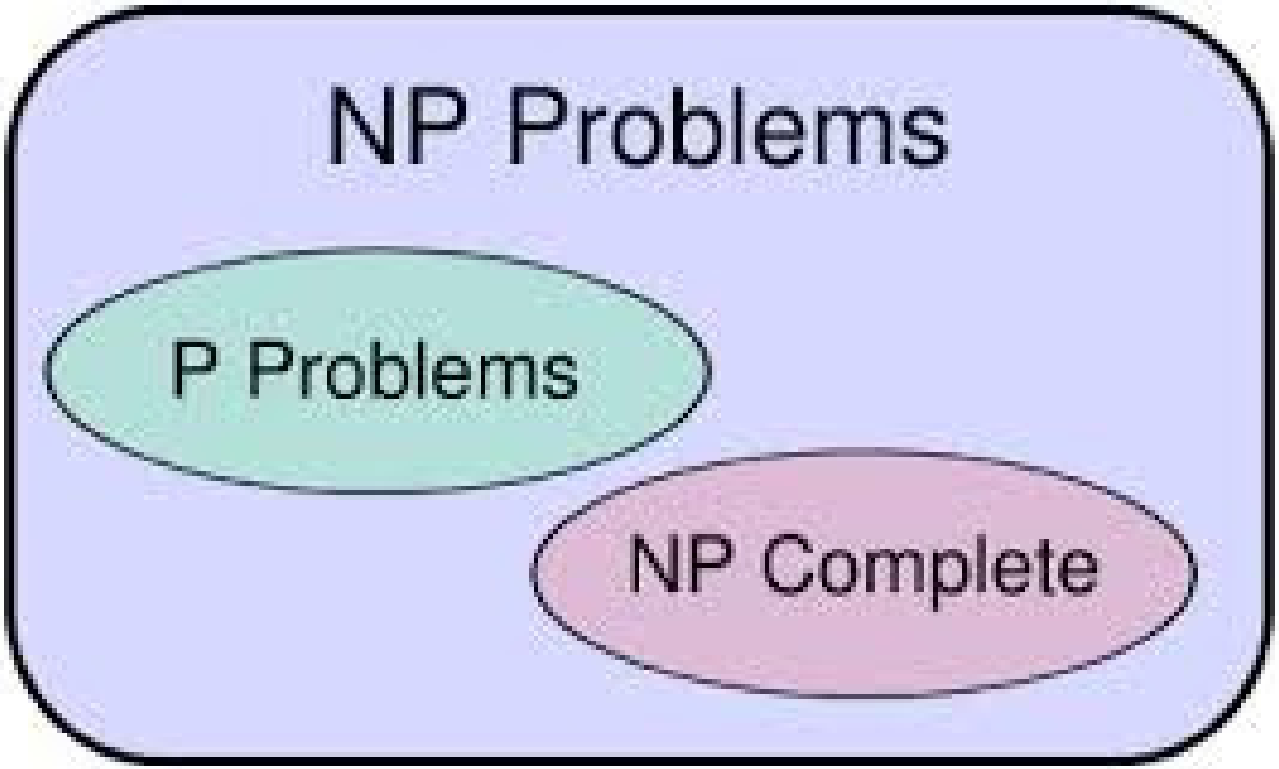
IF5110 Teori Komputasi

Review Teori P dan NP

Oleh: Rinaldi Munir


NP Problems
P Problems
NP Complete

Pendahuluan

- Kebutuhan waktu algoritma yang mangkus bervariasi, mulai dari O(1), O(log log n), O(log n), O(n), O(n^2), dan O(n^3).

- Semua algoritma tersebut digolongkan “bagus” dan dikenal sebagai solusi polinomial. Hal ini karena kebutuhan waktunya secara asimptotik dibatasi oleh fungsi polinomial. Misalnya $\log(n) < n$ untuk semua $n \geq 1$.

- Sebaliknya, ada persoalan yang tidak terdapat solusi waktu polinomial untuk menyelesaikannya, misalnya TSP yang memiliki kompleksitas O(n!). Persoalan semacam itu digolongkan sebagai persoalan ”sulit” (*hard problem*).

Definisi

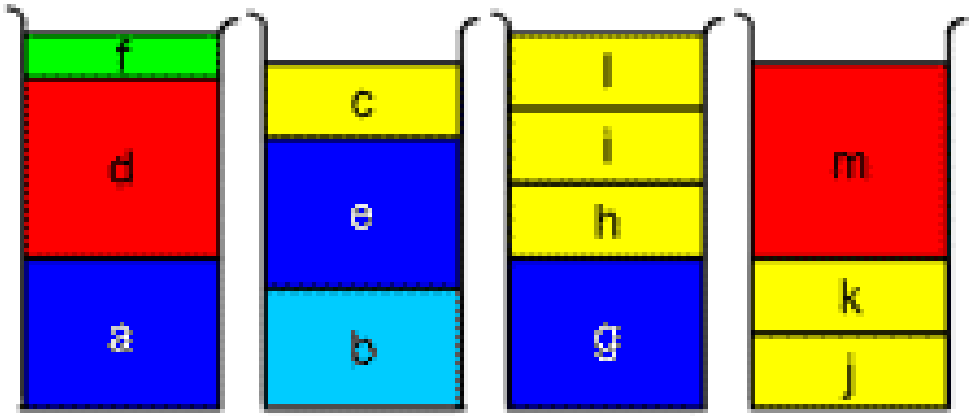
- *Polynomial-time algorithm* adalah algoritma yang kempleksitas waktu kasus-terburuknya dibatasi oleh fungsi polinom dari ukuran masukannya.
  $T(n) = O(p(n))$ → $p(n)$ adalah polinom dari n

  Contoh: Persoalan *sorting* → $T(n) = O(n^2)$, $T(n) = O(n \log n)$
  Persoalan *searching* → $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(\log n)$
  Perkalian matriks → $T(n) = O(n^3)$, $T(n) = O(n^{2.83})$

- Diluar itu, algoritmanya dinamakan *nonpolynomial-time algorithm*.

  Contoh: TSP, *integer knapsack problem*, *graph coloring,* sirkuit Hamilton, *partition problem*, *bin packing*, *integer linear programming*

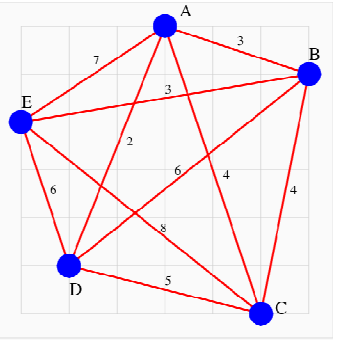
- *Bin-packing problem*: Terdapat sejumlah kardus masing-masing dengan kapasitas *C* dan *n* barang berukuran S1, S2, ..., Sn, Kemaslah *n* barang ke dalam *M* kardus sedemikian sehingga ukuran total barang di dalam setiap kardus tidak melebihi C. Temukan minimal *M* yaitu paling sedikit jumlah kardus untuk menampung *n* barang.



Teori NP

- Dalam membahas teori NP, kita hanya membatasi pada persoalan keputusan (*decision problem*)
- Persoalan keputusan adalah persoalan yang solusinya hanya jawaban “yes” atau “no”.
- Setiap persoalan optimasi yang kita kenal memiliki *decision problem* yang bersesuaian.
- Perhatikan beberapa persoalan berikut:

1. Travelling Salesperson Problem

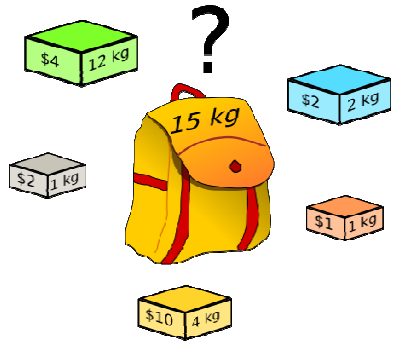


- Diberikan graf berarah dengan bobot (*weight*) pada setiap sisinya. Sebuah tur di dalam graf tersebut dimulai dari sebuah simpul,mengunjungi simpul lainnya tepat sekali dan kembali lagi ke simpul asalnya.

- *Travelling Salesperson Optmization Problem* (TSOP) adalah persoalan menentukan tur dengan total bobot sisi minimal → TSP yang sudah biasa dikenal.

- *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP) adalah persoalan untuk menentukan apakah terdapat tur dengan total bobot sisinya tidak melebihi nilai *d*.

2. Knapsack Problem

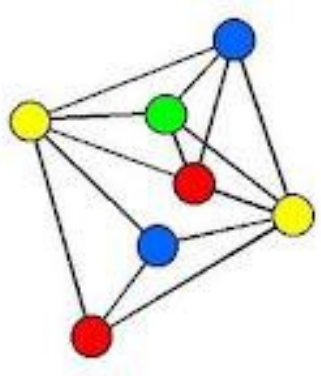


- Diberikan *n* buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas *W*. Setiap objek memiliki profit masing-masing.

- *Integer Knapsack Optimization Problem* adalah menentukan objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* namun tidak melebihi *W* sehingga memberikan total profit maksimum. → *Knapsack problem* yang sudah kita kenal

- *Integer Knapsack Decision Problem* adalah persoalan untuk menentukan apakah dapat memasukkan objek-objek ke dalam *knapsack* namun tidak melebihi *W* tetapi total profitnya paling sedikit sebesar *P*.

3. Graph Colouring Problem



- *Graph-Colouring Optimization Problem* adalah menentukan jumlah minimal warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf sehingga dua simpul bertetangga memiliki warna berbeda. → *Graph Colouring problem* yang kita kenal.

- *Graph-Colouring Decision Problem* adalah menentukan, untuk suatu integer *m*, apakah terdapat pewarnaan yang menggunakan paling banyak *m* warna sedemikian sehingga dua simpul bertetangga memiliki warna berbeda.

- Kita belum menemukan algoritma polinomial untuk persoalan optimasi atau persoalan keputusan pada contoh-contoh di atas.

- Namun, jika kita dapat menemukan algoritma polinomial untuk jenis persoalan optimasi tersebut, maka kita juga mempunyai algoritma waktu-polinom untuk persoalan keputusan yang bersesuaian.

- Hal ini karena solusi persoalan optimasi menghasilkan solusi persoalan keputusan yang bersesuaian.

- Contoh: jika pada persoalan *Travelling Salesperson Optimization Problem* (TSOP) tur minimal adalah 120,

- maka jawaban untuk persoalan *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP) adalah "yes" jika $d \geq 120$, dan "no" jika $d < 120$.

- Begitu juga pada persoalan *Integer Knapsack Optimization Problem*, jika keuntungan optimalnya adalah 230, jawaban untuk persoalan keputusan *integer knapsack* yang berkoresponden adalah "yes" jika $P \leq 230$, dan "no" jika $P > 230$.

P Problems

- *P Problems* adalah himpunan semua persoalan keputusan yang dapat dipecahkan oleh algoritma dengan kebutuhan waktu polinom.

- Semua persoalan keputusan yang dapat diselesakan dalam waktu polinom adalah anggota himpunan *P*.

  Contoh: Persoalan mencari apakah sebuah *key* terdapat di dalam sebuah larik adalah *P Problems*.

- Semua persoalan keputusan yang telah ditemukan algoritma dalam waktu polinom termasuk ke dalam *P Problems*.

- Apakah *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP) termasuk *P Problems*?

- Meskipun belum ada orang yang menemukan algoritma TSDP dalam waktu polinom, namun tidak seorang pun dapat membuktikan bahwa TSDP tidak dapat dipecahkan dalam waktu polinom.

- Ini berarti TSDP *mungkin* dapat dimasukkan ke dalam *P Problems*.

- Algoritma deterministik adalah algoritma yang dapat ditentukan dengan pasti apa saja yang akan dikerjakan selanjutnya oleh algoritma tersebut.

- Algoritma deterministik bekerja sesuai dengan *nature* komputer saat ini yang hanya mengeksekusi satu operasi setiap waktu, diikuti oleh operasi selanjutnya (*sequential*), begitu seterusnya.

- Algoritma non-deterministik adalah algoritma yang berhadapan dengan beberapa opsi pilihan, dan algoritma memiliki kemampuan untuk menerka opsi pilihan yang tepat.

- Algoritma non-deterministik dijalankan oleh komputer non-deterministik (komputer hipotetik). Komputer non-deterministik memiliki kemampuan mengevaluasi sejumlah tak berhingga operasi secara paralel.

- **Contoh 1: TSDP**

  Algoritma non-deterministik TSDP:

  for i := 1 **to** n **do**

  pilih sebuah sisi (*edge*) dari graf G

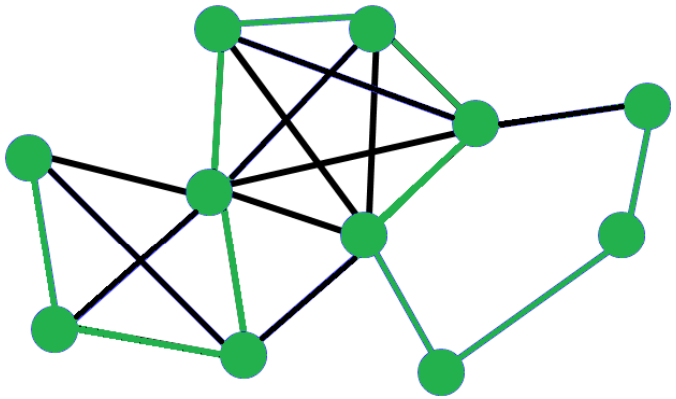
  hapus sisi tersebut dari himpunan sisi

  end

- Solusi dapat diverifikasi dengan menghitung semua bobot sisi yang terpilih dan memeriksa apakah jumlahnya lebih kecil dari *d*

- Memilih sebuah sisi dari graf → O(1)
- Kompleksitas memilih seluruhnya → O(n)
- Kompleksitas memverifikasi solusi → O(n)
- Kompleksitas TSDP total = O(n) + O(n) = O(n)

- **Contoh 2 (Persoalan sirkuit Hamilton)**: Diberikan sebuah graf G. Apakah G mengandung sirkuit Hamilton? Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui setiap simpul di dalam graf tepat satu



Algoritma non-deterministik:

1. Terkalah permutasi semua simpul
2. Periksa (verifikasi) apakah permutasi tersebut membentuk sirkuit. Jika ya, maka itulah solusinya. STOP.

- Ada dua tahap di dalam algoritma non-deterministik:

  1. Tahap menerka (non-determinsitik): Diberikan *instance* persoalan, tahap ini secara sederhana (misalnya) menghasilkan beberapa string *S*. String ini dapat dianggap sebagai sebuah terkaan pada sebuah solusi. String yang dihasilkan bisa saja tidak bermakna (*non-sense).*

  2. Tahap verifikasi (deterministik): memeriksa apakah S menyatakan solusi. Keluaran tahap ini adalah "true" jika *S* merupakan solusi, atau "false" jika bukan.

Contoh pada TSDP:

Tahap verifikasi

```
function verify(G:graph; d:number, S:claimed_tour)
Algoritma
   if S adalah tur dan total bobot ≤ d then
      return true
   else
      return false
   endif
```

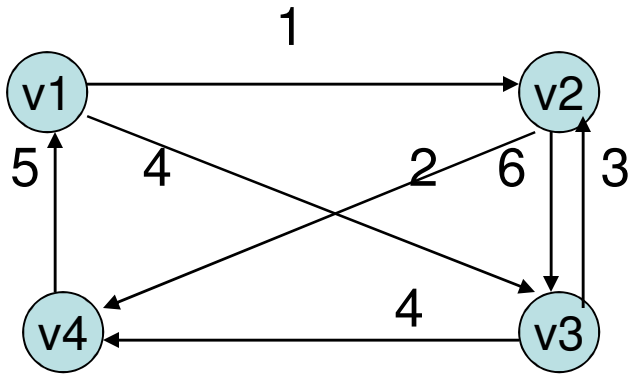
- Tahap verifikasi ini dikerjakan dalam waktu polinom, sebab fungsi *verify* membutuhkan waktu O(*n*), yang dalam hal ini *n* = jumlah simpul

- Meskipun kita tidak pernah menggunakan algoritma non-deterministik untuk menyelesaikan persoalan, namun kita menyatakan bahwa algoritma non-deterministik "menyelesaikan" persoalan keputusan apabila:

  1. Untuk suatu *instance* dimana jawabanya adalah "yes", terdapat beberapa string S yang pada tahap verifikasi menghasilkan "true"

  2. Untuk suatu *instance* dimana jawabannya adalah "no", tidak terdapat string S yang pada tahap verifikasi menghasilkan "true".

- Contoh untuk TSDP dengan d = 15:



S	Keluaran	Alasan
[v1, v2, v3, v4, v1]	False	Total bobot > 15
[v1, v4, v2, v3, v1]	False	S bukan sebuah tur
^%@12*&a%	False	S bukan sebuah tur
[v1, v3, v2, v4, v1]	True	S sebuah tur, total bobot ≤ 15

- Kita dapat menyatakan bahwa algoritma non-deterministik "menyelesaikan" TSDP dalam dua tahap tersebut

I helped solve
The Travelling Salesman
problem

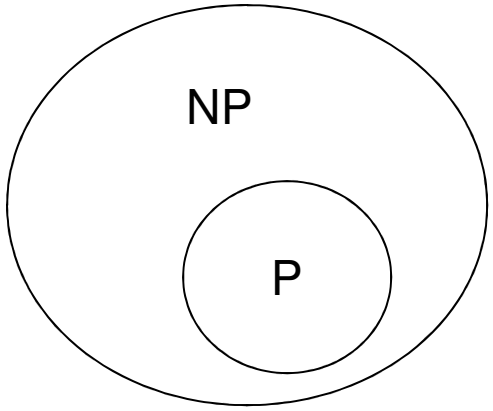
NP Problems

- *NP = non-deterministik polynomial*
- *Polynomial-time non-deterministic algorithm* adalah algoritma non-deterministik dimana tahap verifikasinya adalah algoritma dengan kebutuhan waktu polinom.
- *NP Problems* adalah himpunan persoalan keputusan yang dapat diselesaikan oleh algoritma non-deterministik dalam waktu polinom.
- Kebanyakan persoalan keputusan adalah NP

- TSDP adalah contoh persoalan NP, sebab jika diberikan sebuah terkaan string (tur), maka dibutuhkan O(n) untuk memverifikasi solusi.

- *Integer Knapsack Decision problem* dan *Graph Coloring Decision Problem* semuanya adalah NP.

- Semua persoalan P juga adalah NP, sebab tahap menerka tidak terdapat di dalam persoalan P. Karena itu, P adalah himpunan bagian dari NP.



$P \subseteq NP$

- Adakah persoalan yang bukan NP? Ada, yaitu *halting problem*.

- Kita telah menyebutkan sebelumnya bahwa TSDP belum terbukti apakah P atau bukan.

- Dengan kata lain, tidak seorangpun pernah membuktikan bahwa $P \neq NP$ atau $P = NP$.

- Pertanyaan apakah P = NP adalah salah satu pertanyaan penting dalam ilmu komputer.

- Pertanyaan ini penting sebab, seperti telah disebutkan sebelumnya, kebanyakan persoalan keputusan adalah NP.

- Karena itu, jika P = NP, maka betapa banyak persoalan keputusan yang dapat dipecahkan secara mangkus dengan algoritma yang kebutuhan waktunya polinom..

- Namun kenyataannya, banyak ahli yang telah gagal menemukan algoritma waktu-polinom untuk persoalan NP.

- Karena itu, cukup aman kalau kita menduga-duga bahwa P ≠ NP

- The **P versus NP problem** is a major unsolved problem in computer science. Informally, it asks whether every problem whose solution can be quickly verified by a computer can also be quickly solved by a computer. It was introduced in 1971 by Stephen Cook in his seminal paper "The complexity of theorem proving procedures"[2] and is considered by many to be the most important open problem in the field.[3] It is one of the seven Millennium Prize Problems selected by the Clay Mathematics Institute to carry a US$1,000,000 prize for the first correct solution.

(Sumber: Wikipedia)

The $1M question

The Clay Mathematics Institute Millenium Prize Problems:

1. Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
2. Hodge Conjecture
3. Navier-Stokes Equations
4. P vs NP
5. Poincaré Conjecture
6. Riemann Hypothesis
7. Yang-Mills Theory