

Sistem Bilangan Bertanda pada Mesin Turing

Budi Chandra (23512157)¹

Program Magister Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹budi.chandra@students.itb.ac.id

Abstract—Mesin Turing merupakan model matematika yang dapat mensimulasikan komputer umum. Mesin Turing memiliki pita yang dapat ditulis dengan simbol-simbol. Pada komputer sekarang, arsitektur yang digunakan adalah von Neumann yang mengolah data dalam bahasa mesin (biner). Pada saat mengolah integer, integer tersebut diubah dalam representasi biner. Representasi integer terdiri dari dua jenis yaitu bertanda dan tidak bertanda. Pada makalah ini melakukan simulasi mesin Turing menggunakan sistem bilangan bertanda.

Kata Kunci—mesin Turing, sistem bilangan bertanda

I. PENDAHULUAN

Alan Mathison Turing (Inggris) dan John von Neumann (Amerika) merupakan ilmuwan matematika yang tercatat pada sejarah perkembangan komputer. Ada beberapa fakta yang dihilangkan sehingga sejarah komputer menjadi kurang sempurna^[1]. Fakta tersebut adalah Neumann menyatakan bahwa " *the designers' of the new automatic computing machines' had worked in ignorance of Turing's universal machine.*" padahal referensi Neumann pernah mengacu pada teori Turing^[1]. Alan Turing mengemukakan konsep Mesin Turing (mesin komputasi) yang dapat melakukan komputasi yang menjadi idealisasi komputer manusia^[2]. Von Neumann mengemukakan arsitektur von Neumann yang sampai saat ini diterapkan pada komputer saat ini.

Mesin Turing memiliki sifat dasar yaitu bergeser ke kiri/kanan satu langkah, membaca/menulis pada pita, dan mengubah status. Mesin Turing terdiri dari head, pita, dan sebuah pengendali terbatas. Pada arsitektur Von Neumann terdiri dari I/O, ALU, memory, dan unit pengendali. Perbedaannya pada mesin Turing dapat mengolah semua simbol sedangkan komputer hanya dapat mengolah sistem binari (merepresentasikan tegangan 5V/0V) yang sering disebut bahasa mesin. Semua simbol yang akan diolah oleh komputer akan diubah ke dalam bentuk binari.

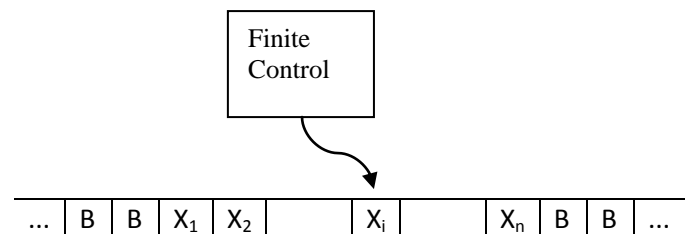
Pada sistem bilangan biner dikenal representasi integer, representasi pecahan, representasi *floating point*, dll. Representasi integer terdiri dari bilangan bertanda (*signed*) dan bilangan tidak bertanda (*unsigned*). Pada komputer nilai integer negatif akan diubah oleh program kompilasi menjadi bentuk biner yang kemudian diproses

oleh ALU. Pada mesin Turing kita dapat membuat algoritma untuk memproses integer negatif sedemikian rupa sehingga dapat dijalankan pada mesin Turing. Konsep komplemen dua digunakan untuk merepresentasikan bilangan bertanda pada integer. Makalah ini berisi tentang bagaimana mensimulasikan sistem bilangan bertanda pada mesin Turing.

II. DASAR TEORI

A. Mesin Turing

Mesin Turing terdiri dari sebuah pengendali terbatas yang dalam berada pada status apapun, sebuah head yang berada pada tape, dan tape yang terdiri dari sel-sel yang dapat dimasukkan simbol.



Gambar 1. Mesin Turing (sumber: Hopcroft)

Notasi formal mesin Turing terdiri dari 7 tupel

$$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

dengan:

Q = himpunan terbatas dari status

Σ = himpunan simbol masukan

Γ = himpunan keseluruhan simbol (termasuk B) yang ada pada pita

δ = fungsi transisi ($\delta(q,X)$)

q_0 = status awal

B = simbol kosong

F = status akhir

Cara kerja mesin Turing yaitu:

1. head bergeser ke kiri satu sel
2. head bergeser ke kanan satu sel
3. head membaca isi sel pada pita
4. head menulis pada sel pada pita
5. mengubah status pada pengendali terbatas

B. Sistem Bilangan Bertanda Biner

Sistem bilangan bertanda biner x dan y dapat dituliskan sebagai berikut $-2^{w-1} \leq x, y \leq 2^{w-1} - 1$. Penjumlahan sistem bilangan bertanda x dan y dapat dituliskan sebagai berikut $2^w \leq x+y \leq 2^w - 2$. Sistem bilangan ini disebut dengan komplemen dua yang mana bit paling kiri digunakan sebagai bit tanda dan sisanya merupakan bit nilai.

Cara melakukan komplemen dua adalah dengan mengkomplemenkan seluruh bit dan kemudian ditambah 1. Contoh pada sebuah bilangan biner 4 bit 1111 merupakan -1.

Biner	Desimal	Biner	Desimal
0000	0	1000	-8
0001	1	1001	-7
0010	2	1010	-6
0011	3	1011	-5
0100	4	1100	-4
0101	5	1101	-3
0110	6	1110	-2
0111	7	1111	-1

Tabel 1

III. PEMBAHASAN

A. Konvensi Bilangan Bertanda pada mesin Turing

Untuk melakukan simulasi sistem bilangan bertanda pada mesin Turing perlu dilakukan konvensi sebagai berikut:

1. Simbol S ditulis untuk menandakan posisi awal
2. Penulisan biner harus disesuaikan dengan jumlah bit yang ditentukan. Penulisan 1 pada empat bit berarti 0001. Penulisan -1 pada empat bit berarti 1111.
3. Urutan penulisan biner dibalik. Penulisan 1 pada empat bit menjadi 1000. Penulisan -1 pada empat bit menjadi 1111.

Contoh:

-1 = |S|1|1|1|1|
 -2 = |S|1|0|1|1|
 1 = |S|1|0|0|0|
 2 = |S|0|1|0|0|

Argumen dari fungsi $f(1,-1,2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

|S|1|0|0|0|S|1|1|1|1|S|0|1|0|0|

B. Penjumlahan Biner

Aturan penjumlahan biner adalah $0 + 0 = 0$ tanpa *carrier*, $0 + 1 = 1$ tanpa *carrier*, dan $1 + 1 = 0$ dengan *carrier* 1. Penjumlahan biner memiliki *carrier* yang menyimpan kelebihan bit setelah proses penjumlahan.

Pada penjumlahan biner terdapat bit *carrier* yang pada komputer disimpan pada CF (*Carrier Flag*) untuk mensimulasi *carrier* pada mesin Turing kita perlu

mengetahui perilaku dari *carrier* tersebut.

1. *Carrier* bernilai 1 jika terjadi penjumlahan dua bit yang bernilai 1.
2. *Carrier* bernilai 0 jika terjadi penjumlahan dua bit yang berbeda 0 dan 1.
3. *Carrier* juga bernilai 0 jika terjadi penjumlahan dua bit yang bernilai 1 yang isi asal *carrier* 1 atau dapat dikatakan *carrier* tersebut bernilai 10_2 (basis dua) atau 2_{10} (desimal).

C. Algoritma Carrier pada mesin Turing

Untuk mensimulasikan *carrier* pada mesin Turing kita perlu mengalokasikan pita sebanyak dua sel untuk menampung *carrier* yang mana sel pertama kita isi dengan simbol S dan sel kedua kita isi dengan simbol 0, 1, atau 2. Algoritma *carrier* secara sederhana pada penjumlahan sistem bilangan biner bertanda adalah sebagai berikut:

1. jika pada variabel pertama terbaca 0, sel *carrier* tidak usah diubah
2. jika pada variabel pertama terbaca 1, sel *carrier* diubah menjadi 1.
3. jika pada variabel kedua terbaca 0, sel *carrier* tidak usah diubah.
4. jika pada variabel kedua terbaca 1, sel *carrier* akan diubah menjadi 1 jika sel *carrier* 0 dan 2 jika sel *carrier* 1.

D. Rancangan mesin Turing untuk Penjumlahan dengan sistem bilangan bertanda

Untuk melakukan simulasi penjumlahan bilangan bertanda pada mesin Turing perlu dilakukan konvensi terlebih dahulu.

Misalnya $f(x,y) = x + y$ dengan x dan y adalah 4 bit

Konvensi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. bilangan biner dari x ditulis terbalik (misalnya angka 1 dalam biner 0001 ditulis 1000) dan ditambahkan simbol X.
2. bilangan biner dari y ditulis terbalik seperti penulisan x dan ditambahkan simbol Y.
3. tambahkan dua sel yang terdiri dari C dan 0 pada akhir biner dari y sebagai penampung *carrier*.
4. tambahkan simbol Z untuk menampung hasil penjumlahan. Cara membaca hasil penjumlahan juga terbalik.

Argumen $f(x,y) = z = x + y$ dapat dituliskan sebagai berikut:

XxxxxYyyyyC0Zzzzz

Fungsi transisi untuk mensimulasikan bilangan bertanda mesin Turing dapat dilihat pada tabel 2 dan 3.

Notasi mesin Turing:

$$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

dengan:

$$Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\}$$

$$\Sigma = \{X, Y, 0, 1, C, Z\}$$

$$\Gamma = \{X, Y, 0, 1, C, Z, 2, B\}$$

$$\delta = \{ (a,X)=(b,R,X) ;$$

$$(b,0)=(c,X,R) ; (b,1)=(d,X,R) ;$$

$$(c,Y)=(e,Y,R) ;$$

$$(d,C)=(f,C,R) ;$$

$$(e,0)=(g,Y,R) ; (e,1)=(k,Y,R) ; (e,C)=(n,C,R) ;$$

$$(f,0)=(m,1,L) ; (f,1)=(m,2,L) ;$$

$$(g,C)=(h,C,R) ;$$

$$(h,0)=(i,0,R) ; (h,1)=(j,0,R) ; (h,2)=(j,0,R) ;$$

$$(i,B)=(a,0,L) ;$$

$$(j,B)=(a,1,L) ;$$

$$(k,C)=(l,C,R) ;$$

$$(l,0)=(j,0,R) ; (l,1)=(i,1,R) ; (l,2)=(j,1,R) ;$$

$$(m,Y)=(e,Y,R) ;$$

$$(n,Z)=(o,B,L) ;$$

$$(o,X)=(o,B,L) ; (o,Y)=(o,B,L) ; \}$$

$$q_0 = \{a\}$$

$$B = \{B\}$$

$$F = \{p\}$$

status	X	0	1	2	
a	cari X	(b,X,R)	(a,0,L)	(a,1,L)	(a,2,L)
b	baca X		(c,X,R)	(d,X,R)	
c	cari Y1				
d	cari C1		(d,0,R)	(d,1,R)	(d,2,R)
e	baca Y		(g,Y,R)	(k,Y,R)	
f	Cari C2		(m,1,L)	(m,2,L)	
g	cari C3		(g,0,R)	(g,1,R)	
h	baca C1		(i,0,R)	(j,0,R)	(j,0,R)
i	Cari B1				
j	Cari B2				
k	Cari C4		(k,0,R)	(k,0,R)	
l	baca C2		(j,0,R)	(i,1,R)	(j,1,R)
m	Cari Y2		(m,0,R)	(m,0,R)	
n	Cari Z		(n,0,R)	(n,1,R)	(n,2,R)
o	B kan	(o,B,L)			

Tabel 2 diagram transisi

status	Y	Z	C	B	
a	cari X	(a,Y,L)	(a,Z,L)		
b	baca X				
c	cari Y1	(e,Y,R)			
d	cari C1	(d,Y,R)		(f,C,R)	
e	baca Y	(e,Y,R)		(n,C,R)	
f	Cari C2				
g	cari C3			(h,C,R)	
h	baca C1				
i	Cari B1		(i,Z,R)		(a,0,L)
j	Cari B2		(i,Z,R)		(a,1,L)
k	Cari C4			(l,C,R)	
l	baca C2				
m	Cari Y2	(e,Y,R)			
n	Cari Z		(o,B,L)	(n,C,R)	
o	B kan	(o,B,L)			end

Tabel 3 diagram transisi (cont)

E. Rangkaian Deskripsi Sesaat

Setelah memiliki diagram transisi kita dapat membuat rangkaian deskripsi sesaat dengan memasukkan $f(x,y) = x + y$ dengan $x = 1$ dan $y = 2$;

Konvensi $x = 1 = 001$, $y = 2 = 010$

String masukan menjadi
X100Y010C0Z

Berdasarkan diagram transisi pada tabel 2 dan 3, maka rangkaian deskripsi sesaat untuk masukan X100Y010C0Z adalah sebagai berikut:

aX100Y010C0Z | Xb100Y010C0Z | XXd00Y010C0Z |
 XX0d0Y010C0Z | XX00dY010C0Z | XX00Yd010C0Z |
 XX00Y0d10C0Z | XX00Y01d0C0Z | XX00Y010dC0Z |
 XX00Y010Cf0Z | XX00Y010mC1Z | XX00Y01m0C1Z |
 XX00Y0m10C1Z | XX00Ym010C1Z | XX00Yg010C1Z |
 XX00YYg10C1Z | XX00YY10C1Z | XX00YY1g0C1Z |
 XX00YY10gC1Z | XX00YY10Ch1Z | XX00YY10C0jZ |
 XX00YY10C0Zj | XX00YY10C0Za1 |
 XX00YY10C0aZ1 | XX00YY10Ca0Z1 |
 XX00YY10aC0Z1 | XX00YY1a0C0Z1 |
 XX00YYa10C0Z1 | XX00YaY10C0Z1 |
 XX00aYY10C0Z1 | XX0a0YY10C0Z1 |
 XXb00YY10C0Z1 | XXXc0YY10C0Z1 |
 XXX0cYY10C0Z1 | XXX0YeY10C0Z1 |
 XXX0YYe10C0Z1 | XXX0YYYk0C0Z1 |
 XXX0YYY0kC0Z1 | XXX0YYY0C10Z1 |
 XXX0YYY0C0jZ1 | XXX0YYY0C0Zj1 |
 XXX0YYY0C0Z1a1 | XXX0YYY0C0Za11 |
 XXX0YYY0C0aZ11 | XXX0YYY0Ca0Z11 |
 XXX0YYY0aC0Z11 | XXX0YYYa0C0Z11 |

XXX0YYaY0C0Z11	XXX0YaYY0C0Z11
XXX0aYYY0C0Z11	XXXb0YYY0C0Z11
XXXcYY0C0Z11	XXXYYeYY0C0Z11
XXXYYeY0C0Z11	XXXYYYe0C0Z11
XXXYYYYgC0Z11	XXXYYYYCh0Z11
XXXYYYYC0iZ11	XXXYYYYC0Zi11
XXXYYYYC0Z1i1	XXXYYYYC0Z11a1
XXXYYYYC0Z11a0	XXXYYYYC0Z1a10
XXXYYYYC0Za110	XXXYYYYC0aZ110
XXXYYYYCa0Z110	XXXYYYYYaC0Z110
XXXYYYaYC0Z110	XXXYYaYYC0Z110
XXXYYaYYC0Z110	XXXaYYYYC0Z110
XXXbYYYYC0Z110	XXXYYnYYC0Z110
XXXYYnYYC0Z110	XXXYYYnYC0Z110
XXXYYYYnC0Z110	XXXYYYYnC0Z110
XXXYYYYC0nZ110	XXXYYYYC0Zo110
XXXYYYYC0oB110	XXXYYYYCoBB110
XXXYYYYoBBB110	XXXYYYoBBBB110
XXXYYoBBBBB110	XXXYoBBBBBB110
XXXoBBBBBBB110	XXXoBBBBBBB110
XXoBBBBBBB110	XoBBBBBBB110

oBBBBBBB110| = 110
 $f(x,y) = x + y$
 $f(1,2) = 1 + 2$
 $f(1,2) = 3$
 dalam biner adalah 011 (BENAR)
 110 yang dihasilkan mesin Turing dibaca terbalik sehingga 110 menjadi 011.

Diagram transisi ini juga dapat digunakan dalam sistem bilangan bertanda. Berikut ini akan dibuat rangkaian deskripsi sesaat untuk $f(x,y) = x + y$ dengan $x = 2$ dan $y = -1$. Untuk meringkas pembuktian hanya menggunakan 3 bit.

Konvensi $x = 2 = 010$, $y = -1 = 111$
 String masukan menjadi
 X010Y111C0Z

Berdasarkan diagram transisi pada tabel 2 dan 3, maka rangkaian deskripsi sesaat untuk masukan X010Y111C0Z adalah sebagai berikut:

aX010Y111C0Z	Xb010Y111C0Z	XXc10Y111C0Z
XX1c0Y111C0Z	XX10cY111C0Z	XX10Ye111C0Z
XX10YYk11C0Z	XX10YY1k1C0Z	XX10YY11kC0Z
XX10YY11C10Z	XX10YY11C0jZ	XX10YY11C0Zj
XX10YY11C0Za1 ...	XaX10YY11C0Za1	
XXb10YY11C0Za1	XXXd0YY11C0Za1 ...	
XXX0YY11dC0Za1	XXX0YY11Cf0Za1	
XXX0YY11Cm1Za1 ...	XXX0YmY11C1Za1	
XXX0YYe11C1Za1	XXX0YYYk1C1Za1	
XXX0YYY1kC1Za1	XXX0YYY1C1iZa1	
XXX0YYY1C1iZa1 ...	XXX0YYY1C1Z1i	
XXX0YYY1C1iZ1a0 ...	XXaX0YYY1C1Z10	
XXXb0YYY1C1Z10	XXXcYY1C1Z10	
XXXYYeYY1C1Z10	XXXYYeY1C1Z10	

XXXXYYYe1C1Z10	XXXXYYYYkC1Z10
XXXXYYYCY1Z10	XXXXYYYCY1Z10 ...
XXXXYYYCY1Z10i	XXXXYYYCY1Z10a0 ...
XXXaXYYYCY1Z100	XXXbYYYCY1Z100
XXXXYnYYYCY1Z100 ...	XXXXYYYCY1nZ100
XXXXYYYCY1oB100 ...	oBBBBBBB100 = 100

$f(x,y) = x + y$
 $f(2,-1) = 2 + (-1)$
 $f(2,-1) = 1$
 dalam biner adalah 001 (BENAR)
 100 yang dihasilkan mesin Turing dibaca terbalik sehingga 100 menjadi 001.

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Pada mesin Turing pita tunggal untuk mensimulasikan penjumlahan bilangan bertanda ternyata membutuhkan jumlah status yang cukup banyak. Simulasi bilangan bulat dengan mengidentikkan jumlah 0 sebagai nilai bilangan lebih sederhana ($3 = 000$). Tetapi dengan menggunakan sistem bilangan bertanda lebar pita yang akan terpakai lebih sedikit. Untuk menulis angka 7 pada mesin Turing membutuhkan 0000000 dengan memakan tujuh buah sel pada bilangan biner hanya membutuhkan 3 sel (111) untuk sistem bilangan tidak bertanda dan 4 sel (0111) untuk sistem bilangan bertanda.

Jadi dapat disimpulkan bahwa kompleksitas algoritma dengan menggunakan sistem bilangan bertanda lebih tinggi dibandingkan dengan menggunakan penambahan 0 tetapi lebar pita yang dibutuhkan lebih sedikit.

B. Saran

Mesin Turing memiliki banyak varian, salah satunya mesin Turing berjalur ganda. Dengan menggunakan mesin Turing berjalur ganda ada kemungkinan kompleksitas algoritma untuk mensimulasikan sistem bilangan bertanda akan lebih rendah.

V. TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada dosen mata kuliah Teori Komputasi IF5110, Bapak Rinaldi Munir yang telah mengajarkan mata kuliah ini dalam satu semester ini. Materi kuliah yang disampaikan cukup menarik dan dapat dimengerti dengan baik sehingga tugas makalah ini dapat dilaksanakan.

REFERENSI

- [1] S. Barry Cooper and Jan Van Leeuwen (eds), "Alan Turing-His Work and Impact", Elsevier, 2013, pp. 3.
- [2] B. Jack Copeland, *Hypercomputation*. Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 461, 463.
- [3] Bryant and O'Hallaron, *Computer Systems A Programmer's Perspective*, Prentice Hall, 2013.

- [4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, Introduction To Automata Theory , Languages, and Computation 3rd Edition, Addison Wesley, 2007.
- [5] Rinaldi Munir. Materi Kuliah Teori Komputasi. Bandung: Program Studi Magister Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika 2014.
- [6] Achmad Imam Kistijantoro. Materi Kuliah Arsitektur dan Komputer B. Program Studi Magister Informatika. Sekolah Teknik Elektro dan Informatika 2013.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Desember 2014

ttd

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Budi Chandra' with a stylized flourish underneath.

Budi Chandra (23512157)