

Penggunaan Mesin Turing *Multitrack* untuk Operasi Bilangan Biner

Hairil Anwar / 23514034
Program Magister Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
23514034@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Dalam tulisan ini akan dibahas penggunaan Mesin Turing untuk melakukan operasi pada bilangan biner. Operasi-operasi yang dibahas adalah operasi *bitwise*, operasi penjumlahan dan pengurangan. Jenis Mesin Turing yang digunakan adalah Mesin Turing *Multitrack* dengan pita terbatas kanan dan penunjuk yang dimulai dari kanan. Simulasi gerakan dalam melakukan operasi-operasi di atas akan ditunjukkan hingga hasil operasi diperoleh atau Mesin Turing berhenti.

Index Terms—Biner, Penjumlahan, Pengurangan, Mesin Turing *Multitrack*.

I. MESIN TURING

Mesin Turing terdiri atas pita, penunjuk, dan pengendali berhingga dengan sifat-sifat dideskripsikan sebagai berikut^[2]:

- 1) Mesin Turing memiliki pita masukan yang terbatas pada satu sisi dan tak terbatas pada sisi lainnya (panjangnya tak berhingga). Pita ini berisi simbol-simbol yang dapat dibaca dan pita ini juga dapat ditulisi dengan simbol-simbol. Pita dapat dianggap sebagai deretan kotak-kotak yang setiap kotaknya hanya berisi satu simbol.
- 2) Penunjuk (*header*) yang berfungsi membaca dan menuliskan simbol pada pita. Penunjuk dapat bergerak ke kiri atau ke kanan.
- 3) Pengendali berhingga (*finite control*) yang menyimpan status dari Mesin Turing dan mengatur pergerakan penunjuk dalam membaca dan menulis simbol pada pita. Status pada Mesin Turing dapat berubah sesuai dengan simbol yang dibaca.

Operasi-operasi dasar yang dapat dilakukan oleh Mesin Turing adalah sebagai berikut:

- 1) Membaca simbol yang ditunjuk oleh *header*
- 2) Menuliskan simbol baru pada simbol yang dibaca oleh *header* sesuai dengan status pada pengendali beringga
- 3) Berubah status
- 4) Menggerakkan *header* ke kiri atau ke kanan

Operasi-operasi di atas dilakukan untuk satu gerakan pada Mesin Turing. Mesin Turing dapat berhenti (*halt*)

ketika mencapai status akhir. Secara formal, Mesin Turing dituliskan dalam 7 Tupel, $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$, dimana:

Q = himpunan berhingga status

Σ = himpunan simbol-simbol pada pita masukan awal

Γ = himpunan simbol-simbol yang dapat dibaca atau ditulisi pada pita

δ = fungsi pergerakan

q_0 = status awal

B = simbol kosong (*blank*)

F = status akhir

Satu fungsi gerakan pada Mesin Turing dapat dituliskan sebagai $\delta(q_i, X) = (q_j, Y, D)$ dengan q_i adalah status saat ini, X adalah simbol yang terbaca, q_j perubahan status setelah membaca X , Y adalah simbol yang dituliskan pada X , dan D adalah pergerakan penunjuk setelah menuliskan Y .

Selain Mesin Turing yang dijelaskan di atas, terdapat beberapa jenis Mesin Turing lainnya. Berikut ini beberapa jenis Mesin Turing dan perbedaannya dengan Mesin Turing biasa:

- 1) Mesin Turing *two-way infinite tape*, Mesin Turing ini sama dengan Mesin Turing biasa namun memiliki pita yang tidak terbatas ke dua arah.
- 2) Mesin Turing *Multitrack*, Mesin Turing ini memiliki banyak jalur pita dan satu penunjuk untuk semua jalur pita. Penunjuk dapat membaca dan menulis simbol sejumlah jalur pita dalam satu gerakannya.
- 3) Mesin Turing *Multitape*, Mesin Turing ini memiliki banyak jalur pita dan satu penunjuk untuk setiap jalur pita. Setiap penunjuk dapat bergerak secara terpisah.
- 4) Mesin Turing Non-deterministik, Mesin Turing ini memiliki transisi status atau gerakan yang banyak untuk satu pasangan status dan simbol yang dibaca.
- 5) Mesin Turing *Multidimensional*, Mesin Turing ini memiliki pita berbentuk dua dimensi atau lebih. Pada kasus dua dimensi penunjuk dapat bergerak ke kiri, ke kanan, ke atas, atau ke bawah.
- 6) Mesin Turing *Multihead*, Mesin Turing ini hanya memiliki satu jalur pita namun memiliki jumlah penunjuk (*head*) yang banyak.

II. MESIN TURING *MULTITRACK*

Selain yang telah dijelaskan sebelumnya, perbedaan mendasar pada Mesin Turing *Multitrack* dengan Mesin Turing biasa ada pada notasi fungsi pergerakannya. Fungsi pergerakan untuk Mesin Turing *Multitrack* dituliskan sebagai $\delta(q_i, [X_1, X_2, \dots, X_N]) = (q_j, [Y_1, Y_2, \dots, Y_N], D)$ dengan q_i adalah status saat ini, Y_N adalah simbol yang terbaca pada jalur pita ke-N, q_j perubahan status setelah membaca simbol pada pita, Y_N adalah simbol yang dituliskan pada jalur pita ke-N, dan D adalah pergerakan penunjuk setelah menuliskan simbol pada pita.

Secara umum pita pada Mesin Turing terbatas pada sisi kirinya dan tidak terbatas pada sisi lainnya dengan penunjuk dimulai dari ujung paling kiri. Namun dapat juga digunakan pita yang terbatas pada sisi kanannya dan tidak terbatas pada sisi lainnya dengan penunjuk yang dimulai dari ujung paling kanan. Dapat tunjukan bahwa keduanya ekuivalen. Selanjutnya akan digunakan skema pita yang terbatas kanan untuk melakukan operasi pada bilangan biner. Dalam tulisan ini akan dibahas penggunaan Mesin Turing *Multitrack* untuk melakukan operasi-operasi sederhana pada bilangan biner. Mesin Turing yang digunakan adalah Mesin Turing *Multitrack*.

III. BILANGAN BINER DAN OPERASI *BITWISE*

Bilangan biner adalah bilangan dengan basis 2 dimana suatu bilangan hanya dinyatakan dalam '0' dan '1' saja. Bilangan biner banyak diimplementasikan dalam bidang elektronik seperti pengkodean informasi dalam komputer saat ini. Bilangan biner juga digunakan sebagai bilangan yang paling fundamental. Semua bilangan dengan basis 8 (oktal), basis 10 (desimal), atau basis 16 (hexadesimal) dapat dikonversikan menjadi bilangan biner. Terdapat beberapa operasi bitwise untuk bilangan biner yaitu^[4]: operasi NOT, AND, OR dan XOR. Berikut ini tabel kebenaran untuk operasi tersebut:

Tabel 3.1. tabel kebenaran NOT

| A | NOT A |
|---|-------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Tabel 3.2. tabel kebenaran AND, OR dan XOR

| A | B | A AND B | A OR B | A XOR B |
|---|---|---------|--------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabel 3.3. Konversi beberapa basis bilangan

| Biner (Basis 2) | Desimal (Basis 10) | Okta-desimal (Basis 8) | Hexa-desimal (Basis 16) |
|-----------------|--------------------|------------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 3 | 3 |
| 100 | 4 | 4 | 4 |
| 101 | 5 | 5 | 5 |
| 110 | 6 | 6 | 6 |
| 111 | 7 | 7 | 7 |
| 1000 | 8 | 10 | 8 |
| 1001 | 9 | 11 | 9 |
| 1010 | 10 | 12 | A |
| 1011 | 11 | 13 | B |
| 1100 | 12 | 14 | C |
| 1101 | 13 | 15 | D |
| 1110 | 14 | 16 | E |
| 1111 | 15 | 17 | F |
| 10000 | 16 | 20 | 10 |

IV. MESIN TURING *MULTITRACK* UNTUK OPERASI *BITWISE*

A. Operasi NOT

Untuk melakukan operasi NOT pada bilangan biner A dengan Mesin Turing *Multitrack*, input A terlebih dahulu dituliskan pada jalur 1. Hasil operasinya akan dituliskan pada jalur pita yang sama. Berikut langkah-langkah untuk melakukan operasi NOT dengan Mesin Turing *Multitrack* dua jalur:

- 1) Set status awal a.
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika pasangan simbol terbaca '0B', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 4) Jika pasangan simbol terbaca '1B', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 5) Jika pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti.
- 6) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2.

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* untuk melakukan operasi NOT:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{a, s\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = a$$

$$F = s$$

Fungsi pergerakan:

$$\delta(a, [0, B]) = (a, [1, B], L)$$

$$\delta(a, [1, B]) = (a, [0, B], L)$$

$$\delta(a, [B, B]) = (s, [B, B], L)$$

Misalkan diberikan input bilangan biner A = 1001 sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan operasi NOT dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 1 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Status = s

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 1 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Diperoleh hasil operasi NOT pada input A adalah 0110.

B. Operasi AND

Untuk melakukan operasi AND pada bilangan dua biner A dan B dengan Mesin Turing *Multitrack*, input A dan B terlebih dahulu dituliskan pada pita jalur ke-1 dan ke-2. Hasil operasinya akan dituliskan pada pita jalur. Berikut langkah-langkah untuk melakukan operasi AND dengan Mesin Turing *Multitrack* dua jalur:

- 1) Set status awal a.
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika pasangan simbol terbaca '00', '01' atau '01', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 4) Jika pasangan simbol terbaca '11', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 5) Jika pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti.
- 6) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* untuk melakukan operasi AND:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{a, s\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = a$$

$$F = s$$

Fungsi pergerakan:

$$\delta(a, [0, 0]) = (a, [0, 0], L)$$

$$\delta(a, [0, 1]) = (a, [0, 1], L)$$

$$\delta(a, [1, 0]) = (a, [0, 0], L)$$

$$\delta(a, [1, 1]) = (a, [1, 1], L)$$

$$\delta(a, [B, B]) = (s, [B, B], L)$$

Misalkan diberikan input bilangan biner A = 1001 dan B = 0101 sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan operasi AND dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = s

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Diperoleh hasil operasi AND dengan input A dan B adalah 0001.

C. Operasi OR

Untuk melakukan operasi OR pada bilangan dua biner A dan B dengan Mesin Turing *Multitrack*, input A dan B terlebih dahulu dituliskan pada pita jalur ke-1 dan ke-2. Hasil operasinya akan dituliskan pada pita jalur. Berikut langkah-langkah untuk melakukan operasi OR dengan Mesin Turing *Multitrack* dua jalur:

- 1) Set status awal a.
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika pasangan simbol terbaca '00', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 4) Jika pasangan simbol terbaca '01', '01' atau '11', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 5) Jika pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti.
- 6) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* untuk melakukan operasi OR:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{a, s\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = a$$

$$F = s$$

Fungsi pergerakan:

$$\delta(a, [0, 0]) = (a, [0, 0], L)$$

$$\delta(a, [0, 1]) = (a, [1, 1], L)$$

$$\delta(a, [1, 0]) = (a, [1, 0], L)$$

$$\delta(a, [1, 1]) = (a, [1, 1], L)$$

$$\delta(a, [B, B]) = (s, [B, B], L)$$

Misalkan diberikan input bilangan biner A = 1001 dan B = 0101 sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan operasi OR dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = s

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Diperoleh hasil operasi OR dengan input A dan B adalah 1101.

D. Operasi XOR

Untuk melakukan operasi XOR pada bilangan dua biner A dan B dengan Mesin Turing *Multitrack*, input A dan B terlebih dahulu dituliskan pada pita jalur ke-1 dan ke-2. Hasil operasinya akan dituliskan pada pita jalur. Berikut langkah-langkah untuk melakukan operasi XOR dengan Mesin Turing *Multitrack* dua jalur:

- 1) Set status awal a.
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika pasangan simbol terbaca '00' atau '11', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 4) Jika pasangan simbol terbaca '01' atau '10', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 6.
- 5) Jika pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti.
- 6) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* untuk melakukan operasi XOR:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{a, s\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = a$$

$$F = s$$

Fungsi pergerakan:

$$\delta(a, [0, 0]) = (a, [0, 0], L)$$

$$\delta(a, [0, 1]) = (a, [1, 1], L)$$

$$\delta(a, [1, 0]) = (a, [1, 0], L)$$

$$\delta(a, [1, 1]) = (a, [0, 1], L)$$

$$\delta(a, [B, B]) = (s, [B, B], L)$$

Misalkan diberikan input bilangan biner A = 1001 dan B = 0101 sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan operasi OR dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 0 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = a

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 0 |
| ... | B | B | 0 | 1 | 0 | 1 |

Status = s

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 1 | 0 | 0 |
| ... | B | B | B | B | B | B |

Diperoleh hasil operasi OR dengan input A dan B adalah 1100.

V. MESIN TURING MULTITRACK UNTUK PENJUMLAHAN DUA BILANGAN BINER

Untuk melakukan penjumlahan dua bilangan biner akan digunakan Mesin Turing *Multitrack* dengan dua jalur pita. Input A dan B dituliskan pada pita jalur ke-1 dan jalur ke-2. Kemudian akan dilakukan penjumlahan A+B yang hasil akan disimpan pada pita jalur ke-1. Langkah-langkah untuk melakukan operasi penjumlahan dua bilangan biner pada Mesin Turing *Multitrack* dua jalur adalah sebagai berikut:

- 1) Set status awal c_0 .
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika status adalah c_0 dan pasangan simbol terbaca '00', '0B', atau 'B0', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 4) Jika status adalah c_0 dan pasangan simbol terbaca '01', '10', '1B', atau 'B1', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 5) Jika status adalah c_0 dan pasangan simbol terbaca '11', maka tulis '0' pada jalur ke-1 dan ganti status menjadi c_1 . Lanjut ke langkah 11.
- 6) Jika status adalah c_0 dan pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti. Lanjut ke langkah 11.
- 7) Jika status adalah c_1 dan pasangan simbol terbaca '00', '0B', atau 'B0', maka tulis '1' pada jalur ke-1 dan ganti status menjadi c_0 . Lanjut ke langkah 11.
- 8) Jika status adalah c_1 dan pasangan simbol terbaca '01', '10', '1B' atau 'B1', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 9) Jika status adalah c_1 dan pasangan simbol terbaca

'11', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.

- 10) Jika status adalah c_1 dan pasangan simbol terbaca 'BB', maka tulis '1' pada jalur ke-1 dan ganti status menjadi c_0 . Lanjut ke langkah 11.
- 11) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2.

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* dua jalur untuk melakukan operasi penjumlahan dua bilangan biner:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{c_0, c_1, s\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = c_0$$

$$F = s$$

Fungsi pergerakan:

// pergerakan dari status c_0

$$\delta(c_0, [0,0]) = (c_0, [0,0], L)$$

$$\delta(c_0, [0,1]) = (c_0, [1,1], L)$$

$$\delta(c_0, [1,0]) = (c_0, [1,0], L)$$

$$\delta(c_0, [1,1]) = (c_1, [0,1], L)$$

$$\delta(c_0, [0,B]) = (c_0, [0,B], L)$$

$$\delta(c_0, [B,0]) = (c_0, [0,0], L)$$

$$\delta(c_0, [1,B]) = (c_0, [1,B], L)$$

$$\delta(c_0, [B,1]) = (c_0, [1,1], L)$$

$$\delta(c_0, [B,B]) = (s, [B,B], L)$$

// pergerakan dari status c_1

$$\delta(c_1, [0,0]) = (c_0, [1,0], L)$$

$$\delta(c_1, [0,1]) = (c_1, [0,1], L)$$

$$\delta(c_1, [1,0]) = (c_1, [0,0], L)$$

$$\delta(c_1, [1,1]) = (c_1, [1,1], L)$$

$$\delta(c_1, [0,B]) = (c_0, [1,B], L)$$

$$\delta(c_1, [B,0]) = (c_0, [1,0], L)$$

$$\delta(c_1, [1,B]) = (c_1, [0,B], L)$$

$$\delta(c_1, [B,1]) = (c_1, [0,1], L)$$

$$\delta(c_1, [B,B]) = (s, [1,B], L)$$

Misalkan diberikan dua bilangan biner A dan B dengan $A = 10011010$ dan $B = 1111011$ sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan penjumlahan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Status = c_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = c_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = s

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Diperoleh solusi penjumlahan A dengan B pada pita jalur ke-1 adalah $A + B = 100010101$.

VI. MESIN TURING *MULTITRACK* UNTUK PENGURANGAN DUA BILANGAN BINER

Untuk melakukan pengurangan dua bilangan biner akan digunakan Mesin Turing *Multitrack* dengan dua jalur pita. Input A dan B dituliskan pada pita jalur ke-1 dan ke-2. Kemudian dilakukan pengurangan $A - B$ yang hasilnya disimpan pada pita jalur ke-1. Digunakan dua status untuk berhenti yaitu status s untuk menyatakan proses pengurangan berhasil ($A \geq B$) dan status f untuk menyatakan proses pengurangan tidak berhasil ($A < B$). Langkah-langkah untuk melakukan operasi pengurangan dua bilangan biner pada Mesin Turing *Multitrack* adalah sebagai berikut:

- 1) Set status awal b_0 .
- 2) Baca simbol pada jalur ke-1 dan jalur ke-2.
- 3) Jika status adalah b_0 dan pasangan simbol terbaca '00', '11', '0B' atau 'B0', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 4) Jika status adalah b_0 dan pasangan simbol terbaca '10' atau '1B', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 5) Jika status adalah b_0 dan pasangan simbol terbaca '01' atau 'B1', maka tulis '1' pada jalur ke-1 dan ganti status menjadi b_1 . Lanjut ke langkah 11.
- 6) Jika status adalah b_0 dan pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti dengan status s.
- 7) Jika status adalah b_1 dan pasangan simbol terbaca '00', '11', '0B' atau 'B0', maka tulis '1' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 8) Jika status adalah b_1 dan pasangan simbol terbaca '10' atau '1B', maka tulis '0' pada jalur ke-1 dan ganti status menjadi b_0 . Lanjut ke langkah 11.
- 9) Jika status adalah b_1 dan pasangan simbol terbaca '01' atau 'B1', maka tulis '0' pada jalur ke-1. Lanjut ke langkah 11.
- 10) Jika status adalah b_1 dan pasangan simbol terbaca 'BB', maka berhenti dengan status f.

11) Gerakkan penunjuk ke kiri dan kembali ke langkah 2.

Notasi formal Mesin Turing *Multitrack* dua jalur untuk melakukan operasi pengurangan dua bilangan biner:

$$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\}$$

$$Q = \{b_0, b_1, s, f\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = b_0$$

$$F = \{s, f\}$$

Fungsi pergerakan:

// pergerakan dari status b_0

$$\delta(b_0, [0,0]) = (b_0, [0,0], L)$$

$$\delta(b_0, [0,1]) = (b_1, [1,1], L)$$

$$\delta(b_0, [1,0]) = (b_0, [1,0], L)$$

$$\delta(b_0, [1,1]) = (b_0, [0,1], L)$$

$$\delta(b_0, [0,B]) = (b_0, [0,B], L)$$

$$\delta(b_0, [B,0]) = (b_0, [0,0], L)$$

$$\delta(b_0, [1,B]) = (b_0, [1,B], L)$$

$$\delta(b_0, [B,1]) = (b_1, [1,1], L)$$

$$\delta(b_0, [B,B]) = (s, [B,B], L)$$

// pergerakan dari status b_1

$$\delta(b_1, [0,0]) = (b_1, [1,0], L)$$

$$\delta(b_1, [0,1]) = (b_1, [0,1], L)$$

$$\delta(b_1, [1,0]) = (b_0, [0,0], L)$$

$$\delta(b_1, [1,1]) = (b_1, [1,1], L)$$

$$\delta(b_1, [0,B]) = (b_1, [1,B], L)$$

$$\delta(b_1, [B,0]) = (b_1, [1,0], L)$$

$$\delta(b_1, [1,B]) = (b_0, [0,B], L)$$

$$\delta(b_1, [B,1]) = (b_1, [0,1], L)$$

$$\delta(b_1, [B,B]) = (f, [1,B], L)$$

Misalkan diberikan dua bilangan biner A dan B dengan A = 10011110 dan B = 1111011 sebagai input untuk Mesin Turing di atas, maka akan dilakukan proses pengurangan dengan gerakan sebagai berikut:

Status = b_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_1

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = b_0

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Status = s

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | B | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Diperoleh solusi pengurangan A dengan B pada pita jalur ke-1 adalah A - B = 100011.

VII. KESIMPULAN

Telah ditunjukkan penggunaan Mesin Turing *Multitrack* dengan dua jalur pita dan jenis pita terbatas kanan. Operasi yang dilakukan berupa operasi bitwise yaitu: NOT, AND, OR dan XOR serta operasi penjumlahan dan pengurangan pada dua bilangan biner. Dengan menggunakan Mesin Turing *Multitrack* penyelesaian dapat dilakukan dengan langsung dengan banyak gerakan berbanding lurus dengan panjang inputan.

REFERENCES

- [1] Chen Wenyu, Wang Xiaobin, Cheng Xiaou, dan Sun Shixin, "Turing compute model for non-negative binary number", Journal of Software, 2009, vol. 5, pp. 123-130.
- [2] http://www.alanturing.net/turing_archive/pages/reference%20articles/what%20is%20a%20turing%20machine.html Diakses pada tanggal 10 Desember 2014
- [3] <http://www.cs.umd.edu/class/sum2003/cmcs311/Notes/BitOp/bitwise.html> Diakses pada tanggal 11 Desember 2014
- [4] <http://www.cs.umd.edu/class/sum2003/cmcs311/Notes/BitOp/bitwise.html> Diakses pada tanggal 11 Desember 2014

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2014



Hairil Anwar / 23514034