

IF5110 Teori Komputasi

2. Mesin Turing (Bagian 1)

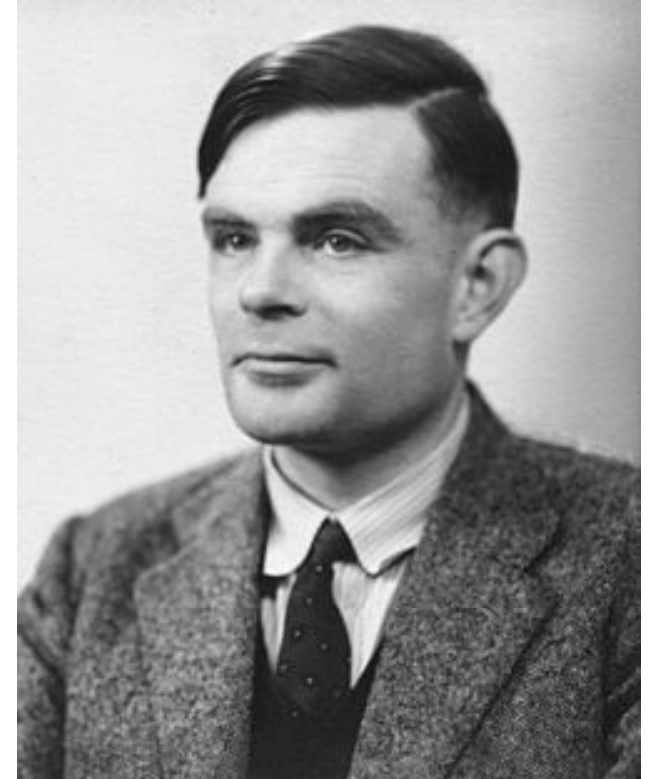
Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Magister Informatika STEI-ITB

Sejarah Mesin Turing (1)

- Diusulkan pada tahun 1936 oleh Alan Turing, seorang matematikawan Inggris sebagai model matematis sederhana sebuah komputer.
- Meskipun sederhana, Mesin Turing memiliki kemampuan untuk menggambarkan perilaku komputer *general-purpose*.
- Mesin Turing dapat digunakan untuk menghitung kelas fungsi bilangan bulat yang dikenal sebagai fungsi rekursif sebagian (*partial recursive function*).

- **Alan Mathison Turing**, (23 June 1912 – 7 June 1954), was an English [mathematician](#), [logician](#), [cryptanalyst](#), and [computer scientist](#). He was highly influential in the development of [computer science](#), providing a formalisation of the concepts of "[algorithm](#)" and "computation" with the [Turing machine](#), which played a significant role in the creation of the modern computer. Turing is widely considered to be the father of computer science and [artificial intelligence](#).^[3]



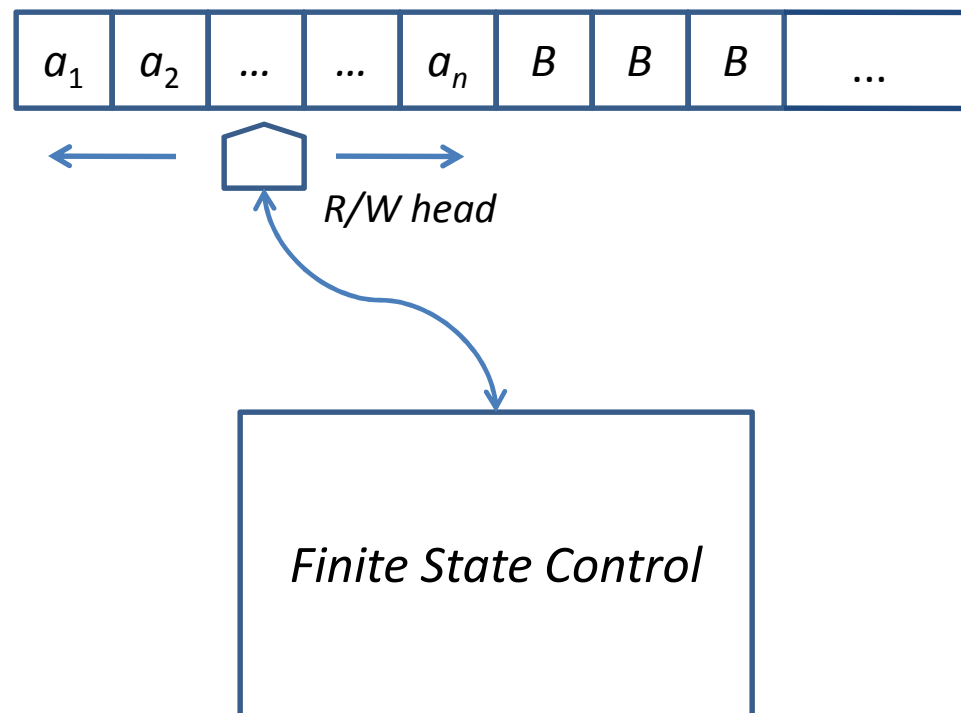
Sejarah Mesin Turing (2)

- Sama seperti *Finite State Automata* dan *Push Down Automata* yang dapat mengenali bahasa formal, maka mesin Turing juga dapat berperan sebagai mesin pengenalan bahasa formal.
- Bahasa yang dikenali oleh Mesin Turing adalah bahasa tanpa-pembatasan (*non-restricted language*), yang disebut juga himpunan terenumerasi rekursif (*recursively enumerable set*).

Model Mesin Turing (1)

- Sebuah mesin Turing terdiri dari komponen-komponen :
 1. Pengendali berhingga (*finite control*)
 2. Pita masukan dengan sifat:
 - panjangnya tidak berhingga
(ujung kiri terbatas, ujung kanan tidak terbatas)
 - dapat dibaca maupun ditulis
 - sel yang tidak berisi simbol masukan akan berisi simbol kosong (*blank* = B)
- Pada keadaan awal, n sel pertama dari pita masukan berisi rangkaian simbol yang harus dikenali (dinyatakan sebagai a_1, a_2, \dots, a_n). Sel di sebelah kanan rangkaian simbol berisi B.

Model Mesin Turing (2)



Model Mesin Turing (3)

- Perbedaan mesin Turing dengan FSA dan PDA

<i>FSA/PDA</i>	Mesin Turing
1. Pita masukan hanya dapat dibaca.	1. Pita masukan dapat dibaca dan ditulis.
2. <i>Head</i> hanya dapat digerakkan ke kanan	2. <i>Head</i> dapat digerakkan ke kiri maupun ke kanan.
3. Pita masukan hanya berisi string masukan.	3. Pita masukan juga berfungsi sebagai tempat penyimpanan yang pada pengaksesannya tidak dibatasi. *)

*) Bandingkan dengan tempat penyimpanan PDA yang hanya dapat diakses sebagai *stack*

Aksi Mesin Turing

- Perilaku mesin Turing bergantung pada simbol masukan yang berada pada posisi *head* baca/tulis dan status dari *Finite Control*.
- Dalam setiap gerakannya, mesin Turing dapat melakukan salah satu dari aksi berikut:
 1. Berubah status.
 2. Menuliskan simbol pada pita masukan. Aksi penulisan ini mengubah simbol yang sebelumnya berada pada sel tsb.
 3. Menggerakkan *head* ke kiri atau ke kanan.

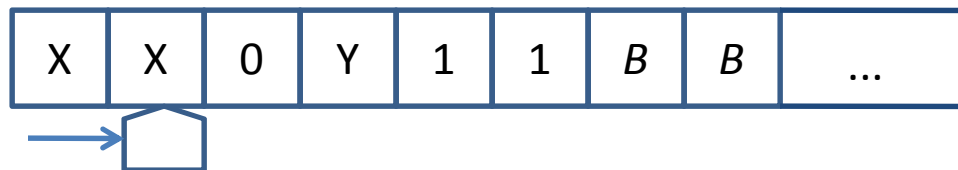
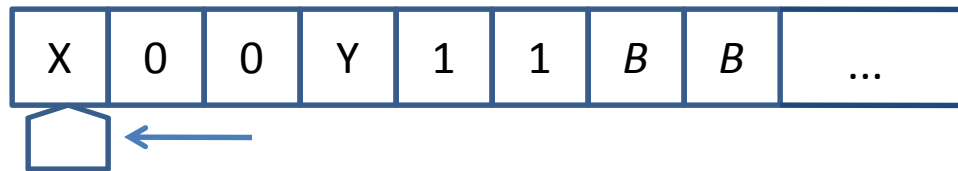
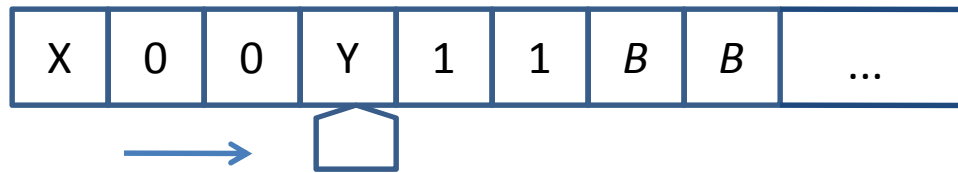
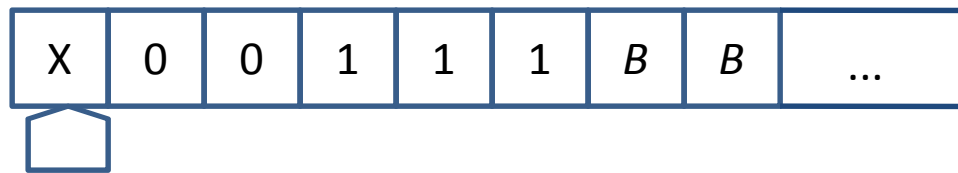
Contoh: Mesin Turing M akan digunakan untuk mengenali bahasa $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$. Contoh *string* di dalam L misalnya
01, 0011, 000111, 00001111, dst.

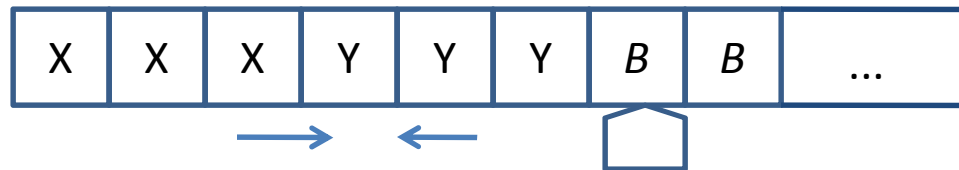
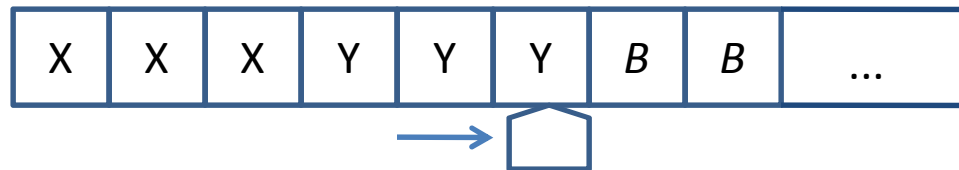
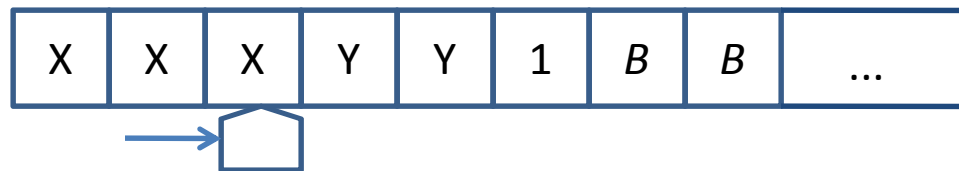
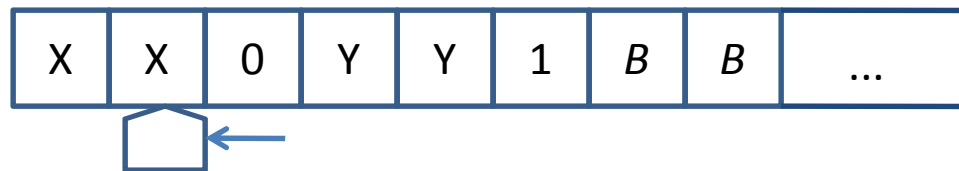
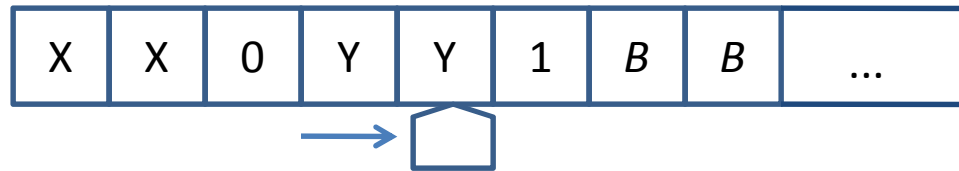
Cara kerja mesin Turing untuk mengenali bahasa L dinyatakan dengan algoritma berikut:

1. Ganti simbol '0' paling kiri dengan simbol 'X'.
2. Gerakkan *head* ke kanan hingga dijumpai simbol '1'.
3. Ganti simbol '1' paling kiri dengan simbol 'Y'
4. Gerakkan *head* ke kiri hingga dijumpai simbol 'X'
5. Geser *head* ke kanan (akan diperoleh '0' paling kiri).
6. Kembali ke langkah 1.

- Jika pada saat bergerak ke kanan untuk mencari '1' , mesin Turing M menjumpai simbol B , maka berarti banyaknya '0' lebih dari banyaknya '1'.
Kesimpulannya, *string* masukan tidak dikenali.
- Jika pada saat bergerak ke kiri M tidak menjumpai lagi '0', maka M memeriksa apakah masih ada '1'. Bila habis maka *string* diterima (dikenali).
- Jika sebuah *string* diterima (dikenali), maka mesin Turing M berhenti. Untuk *string* yang tidak dikenali (ditolak) ada kemungkinan M tidak berhenti (*looping*).

Contoh: String masukan adalah 000111





Kesimpulan: string '000111' dikenali oleh mesin *M*.

- Dari penjelasan di atas, terlihat ada empat modus kerja yang berbeda dari mesin Turing:

Status	Aksi	Keterangan
a	JUMPA 0	Menemukan simbol '0'
b	CARI 1	Mencari simbol '1' ke arah kanan
c	CARI X	Mencari simbol X ke arah kiri
d	SISA	Memeriksa simbol yang tersisa pada pita masukan

- Dalam setiap modus kerja (status), aksi yang dilakukan mesin Turing mungkin menerima/membaca berbagai simbol pada pita.
- Aksi yang dilakukan dalam setiap modus kerja (status) dapat berbeda-beda.
- Perilaku/gerakan yang lengkap dari mesin Turing pengenalan 0^n1^n ditunjukkan pada tabel berikut:

	0	1	X	Y	B
JUMPA 0 (a)	status <i>b</i> tuliskan 'X' kanan			Status <i>d</i> kanan	
CARI 1 (b)	kanan	status <i>c</i> tuliskan 'Y' kiri		kanan	
CARI X (c)	kiri		status <i>a</i> kanan	kiri	
SISA (d)				kanan	status <i>e</i> kanan

string dikenali

Cara membaca tabel ini: Misalkan dalam status *a*, jika mesin menerima simbol '0' maka mesin berubah ke status *b*, mengganti simbol '0' dengan X dan menggerakkan *head* ke kanan

- Notasi yang lebih ringkas:

Tripel (q, a, D) menyatakan aksi bahwa mesin berubah ke status q , menuliskan simbol a , dan menggerakkan *head* ke arah D .

	0	1	X	Y	B
a	(b, X, R)			(d, Y, R)	
b	$(b, 0, R)$	(c, Y, L)		(b, Y, R)	
c	$(c, 0, L)$		(a, X, R)	(c, Y, L)	
d				(d, Y, R)	(e, B, R)

Definisi Formal Mesin Turing

- Sebuah mesin Turing M dilambangkan dengan notasi formal sbb:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

yang dalam hal ini,

Q : himpunan berhingga status (a, b, c, \dots atau q_0, q_1, q_2, \dots)

Γ : himpunan berhingga simbol-simbol yang muncul di pita

$B \in \Gamma$: melambangkan simbol *blank*

Σ : himpunan simbol-simbol, subset dari Γ , termasuk di dalamnya B

δ : fungsi pergerakan yang memetakan $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}^*$)

$q_0 \in Q$: status awal

$F \subseteq Q$: himpunan status akhir

*) L dan R menyatakan gerakan head ke kiri/kanan

- Dengan menggunakan notasi formal tersebut, maka mesin Turing pengenal bahasa $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ dapat ditulis sbb:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

yang dalam hal ini,

$$Q = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$$

$$\Sigma = \{0, 1, B\}$$

$$q_0 = a$$

$$F = \{e\}$$

$$\delta(a, 0) = (b, X, R); \quad \delta(a, Y) = (d, Y, R);$$

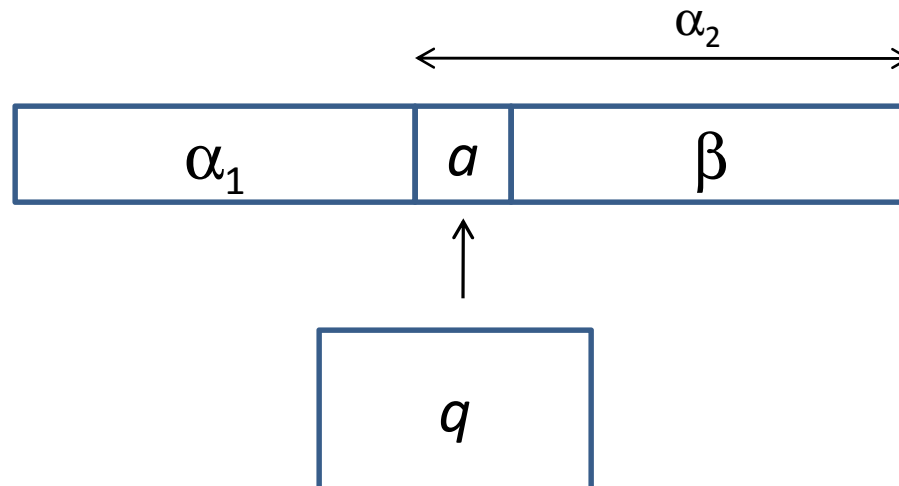
$$\delta(b, 0) = (b, 0, R); \quad \delta(b, 1) = (c, Y, L); \quad \delta(b, Y) = (b, Y, R);$$

$$\delta(c, 0) = (c, 0, L); \quad \delta(c, X) = (a, X, L); \quad \delta(c, Y) = (c, Y, L);$$

$$\delta(d, Y) = (d, Y, R); \quad \delta(d, B) = (e, B, R);$$

Deskripsi Sesaat

- Keadaan sebuah Mesin Turing setiap saat dicirikan oleh tiga hal:
 - Status sekarang (q)
 - Simbol yang sedang diterima/dibaca
 - Posisi *head* (“nomor sel” yang sedang dibaca) pada pita.



- Jika $\alpha_2 = a\beta$, maka konfigurasi sesaat mesin Turing pada gambar di atas dapat dinyatakan secara tekstual oleh deskripsi sesaat (*instantaneous description*):

$$\alpha_1 q \alpha_2$$

yang artinya:

- mesin sedang berada pada status q
- $\alpha_1\alpha_2$ adalah string yang tertera pada pita
- mesin sedang membaca simbol paling kiri dari α_2

- Contoh gerakan ke kiri oleh $\delta(p, X_i) = (q, Y, L)$:

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} p \boxed{X_i} X_{i+1} \dots X_n \vdash X_1 X_2 \dots q X_{i-1} \boxed{Y} X_{i+1} \dots X_n$$

- Contoh gerakan ke kanan oleh $\delta(p, X_i) = (q, Y, R)$:

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} p \boxed{X_i} X_{i+1} \dots X_n \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-1} \boxed{Y} q X_{i+1} \dots X_n$$

- Sebuah *string* (kalimat) diterima oleh mesin Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ jika mesin tersebut mencapai status akhir. Dengan kata lain suatu kalimat w diterima oleh M jika terdapat rangkaian deskripsi sesaat:

$$q_0 w \vdash^* \alpha_1 p \alpha_2$$

yang dalam hal ini $p \in F$ dan $\alpha_1 \alpha_2 \in \Gamma^*$

- Contoh: $Q = \{a, b, c, d, e\}$, $\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$, $\Sigma = \{0, 1, B\}$
 $q_0 = a$, $F = \{e\}$, dan fungsi transisi δ dinyatakan oleh tabel berikut:

	0	1	X	Y	B
a	(b, X, R)			(d, Y, R)	
b	(b, 0, R)	(c, Y, L)		(b, Y, R)	
c	(c, 0, L)		(a, X, L)	(c, Y, R)	
d				(d, Y, R)	(e, B, R)

maka komputasi string '0011' oleh mesin Turing M dinyatakan dalam rangkaian deskripsi sesaat berikut:

$a0011 \vdash Xb011 \vdash X0b11 \vdash Xc0Y1 \vdash cX0Y1 \vdash$
 $Xa0Y1 \vdash XXbY1 \vdash XXYa1 \vdash XXcYY \vdash XcXYY \vdash$
 $XXaYY \vdash XXYdY \vdash XXYYd \vdash XXYYBe$ (*accepted!*)

Latihan.

- a) Tuliskan rangkaian deskripsi sesaat jika M menerima input string 000. Bagaimana kondisi akhir M dan apa kesimpulan anda?
- b) Ulangi a untuk input 0010

***Unrestricted Grammar* → Mesin Turing**

- Misalkan w adalah kalimat yang dihasilkan oleh tata bahasa $G = (N, T, S, P)$.
- Mesin Turing M yang menerima w bekerja dengan cara mensimulasikan proses penurunan w dari simbol awal S oleh tata bahasa G .
- *Input* awal yang dibaca oleh M adalah $w\#S\#$
- M menerapkan aturan produksi yang ada di P dengan mengubah *string* yang terletak di antara '#' sehingga pada pita masukan suatu saat diperoleh $w\#w\#$

- **Contoh:** Misalkan tata bahasa G memiliki aturan produksi sbb,

$$S \rightarrow ACaB \qquad aD \rightarrow Da$$

$$Ca \rightarrow aaC \qquad AD \rightarrow AC$$

$$CB \rightarrow DB \qquad aE \rightarrow Ea$$

$$CB \rightarrow E \qquad AE \rightarrow \varepsilon$$

$aaaa\#S\# \Rightarrow aaaa\#ACaB\# \Rightarrow aaaa\#AaaCB\# \Rightarrow$
 $aaaa\#AaaDB\# \Rightarrow aaaa\#AaDaB\# \Rightarrow aaaa\#ADaaB\# \Rightarrow$
 $aaaa\#ACaaB\# \Rightarrow aaaa\#AaaCaB\# \Rightarrow aaaa\#AaaaaCB\# \Rightarrow$
 $aaaa\#AaaaaE\# \Rightarrow aaaa\#AaaaEa\# \Rightarrow aaaa\#AaaEaa\# \Rightarrow$
 $aaaa\#AaEaaa\# \Rightarrow aaaa\#AEaaaa\# \Rightarrow aaaa\#aaaa\#$

Pekerjaan Rumah 1

- Rancanglah mesin Turing yang menerima bahasa dengan string bit '0' dan '1' yang sama banyaknya.
 - (a) Tuliskan algoritma pengenalan *string* input
 - (b) Tuliskan $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$
 - (c) Tuliskan rangkaian deskripsi sesaat untuk *string* masukan 010101

Sumber:

1. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction To Automata Theory , Languages, and Computation 3rd Edition*, Addison Wesley, 2007.
2. Hans Dulimarta, *Catatan Kuliah Matematika Informatika (Bagian Mesin Turing)*, Program Magister Informatika ITB, 2003.