Deret Geometri untuk beberapa Kasus Pecahan Mesir

Andrew Octaviano[1], Stefanus[2], Indrawan[3]

Laboratorium Ilmu dan Rekayasa Komputasi
Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : aob_85@yahoo.com[1], nush_ing@yahoo.com[2], if13118@students.if.itb.ac.id[3]

Abstrak

Masyarakat Mesir kuno telah mampu merepresentasikan bilangan rasional dalam beberapa pecahan satuan. Representasi bilangan rasional dalam bentuk seperti itu disebut Pecahan Mesir. Meskipun matematika saat ini belum dapat memberikan kejelasan yang penuh mengenai Pecahan Mesir, namun hingga kini telah cukup banyak metode yang dapat digunakan untuk mencari Pecahan Mesir. Makalah ini akan mengulas metode yang kami temukan dengan memanfaatkan deret geometri untuk mencari Pecahan Mesir dalam beberapa kasus khusus.

Kata kunci: *deret geometri, pecahan mesir.*

1. Pendahuluan

Kita mengenal 2 cara untuk menyatakan bilangan rasional yaitu, bentuk pecahan dan desimal. Contoh dari bentuk pecahan adalah 1/2, 1/3, dan 1/4. Sedangkan contoh dari bilangan desimal adalah 0,25 untuk desimal berhingga dan 0,333… untuk desimal tidak berhingga. Ada 1 cara yang dipakai oleh orang Mesir kuno, yaitu menuliskannya dalam bentuk penjumlahan beberapa pecahan dengan pembilang 1. Contohnya, 3/4 dapat didekomposisi menjadi 1/2 + 1/4. Penjumlahan seperti itu di namakan Pecahan Mesir (Eygptian Fraction).

Setiap bilangan rasional sembarang mempunyai representasi Pecahan Mesir yang tidak terbatas. Hal ini disebabkan karena bilangan 1/a dapat dituliskan sebagai 1/(a+1) + 1/(a(a+1)). Contoh : 3/4 yang dapat ditulis sebagai 1/2 + 1/4 dapat juga ditulis sebagai (1/3 + 1/6) + (1/5 + 1/20).

Dalam mencari representasi Pecahan Mesir, kita dapat menggunakan berbagai macam algoritma. Algoritma yang lazim digunakan adalah Brute Force dan Greedy. Sedangkan ada berbagai macam metode lain untuk mendekomposisi bilangan rasional seperti metode sisa biner (binary remainder), algoritma pecahan satuan lanjutan (continued fraction unit fraction), metode sisa yang diperluas (generalized remainder), algoritma greedy terbalik (reverse greedy), metode kelipatan kecil (small multiple) dan algoritma pemisahan (splitting). Ada juga metode yang menggunakan dasar pendekatan atau aproksimasi seperti metode Harmonik dan Greedy bilangan Ganjil (Odd Greedy). [1,2]

Dalam makalah ini, kami akan mencoba mencari representasi Pecahan Mesir dari beberapa kasus khusus bilangan rasional dengan menggunakan deret geometri, yakni deret yang setiap sukunya merupakan kelipatan dari suku sebelumnya.

2. Penggunaan Deret Geometri

Dalam menggunakan deret geometri untuk mencari Pecahan Mesir dari suatu bilangan rasional, sebelumnya kami berikan teorema berikut

Teorema.
Diberikan bilangan rasional x/y kurang dari 1, dimana x dan y adalah bilangan asli yang tidak memiliki faktor yang sama, terdapat bilangan asli k sehingga ky/(kx-1) adalah bilangan bulat a lebih besar dari 1 jika dan hanya jika terdapat bilangan r = kx lebih besar dari 1 sehingga

$$x/y = 1/a + 1/(ar) + 1/(ar^2) + \ldots + 1/(ar^{s-1}) + 1/(a(r^s-r^{s-1})) \quad \ldots\ldots(1)$$

untuk setiap bilangan asli s.

Sketsa bukti.
$\rightarrow$
Misal ky/(kx-1) = a dengan a adalah bilangan asli lebih besar dari 1, maka ky = a (kx-1) dan kx/ky = x/y = kx/(a(kx-1)) = (1/a)/(1-(1/kx)). Bentuk terakhir kita kenali sebagai deret geometri tak hingga dengan suku pertama 1/a dan rasio 1/kx. Kita misalkan kx sebagai r dan kita potong deret tersebut pada suku ke-s+1 atau pada suku $1/(ar^s)$. Dengan menjumlahkan deret tak hingga dimulai dari suku tersebut kita akan mendapatkan $(1/ar^s)/(1-(1/r)) = 1/(a(r^s-r^{s-1}))$. Jadi $x/y = 1/a + 1/(ar) + 1/(ar^2) + \ldots + 1/(ar^{s-1}) + 1/(a(r^s-r^{s-1}))$
$\leftarrow$

Misal $x/y = 1/a + 1/(ar) + 1/(ar^2) + \ldots + 1/(ar^{s-1}) + 1/(a(r^s-r^{s-1}))$ dengan $x<y$ dan x, y, a bilangan asli dan $a>1$. Kita telah tahu bahwa suku terakhir dapat diuraikan menjadi deret tak hingga dimulai dengan $1/(ar^s)$ dengan rasio $1/r$ sehingga $x/y = 1/a + 1/(ar) + 1/(ar^2) + \ldots = (1/a)/(1-(1/r)) = r/(a(r-1)) = x/y$. Misal $x = r$, maka $a = a(r-1)/(r-1) = y/(x-1)$. Karena $x/y = kx/ky$, maka a juga = $ky/(kx-1)$ bilangan asli lebih besar dari 1.

Dengan alat ini, kita dapat mencari Pecahan Mesir dari bilangan rasional yang memenuhi kondisi yang diperlukan. Bukan hanya itu, banyaknya suku yang diinginkan pun dapat dipilih berdasarkan pemilihan letak suku pada deret geometri yang dipotong.

Contoh.
5/9, harus dicari bilangan asli k sehingga $9k/(5k-1)$ = bilangan asli $a > 1$. Didapatkan $k = 2$ sehingga $a = 2$, $r = kx = 10$ dan $5/9 = 1/2 + 1/20 + 1/200 + \ldots$. Apabila suku hendak dibatasi, deret dapat dipotong dan deret mulai tempat pemotongan dapat dijumlahkan menurut deret geometri membentuk satu pecahan dengan pembilang satu.

$$
\begin{aligned}
5/9 &= 1/2 + 1/20 + 1/200 + \ldots \\
&= 1/2 + 1/18 \\
&= 1/2 + 1/20 + 1/180 \\
&= 1/2 + 1/20 + 1/200 + 1/1800 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Dengan cara sama, dapat diverifikasi bahwa

$$
\begin{aligned}
3/4 &= 1/2 + 1/6 + 1/18 + \ldots \\
&= 1/2 + 1/4 \\
&= 1/2 + 1/6 + 1/12 \\
&= 1/2 + 1/6 + 1/18 + 1/36 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Dan

$$2/7 = 1/7 + 1/14 + 1/28 + \ldots$$

Walaupun sayangnya untuk 2 suku terakhir, hasilnya adalah sama

$$
\begin{aligned}
&= 1/7 + 1/7 \\
&= 1/7 + 1/14 + 1/14
\end{aligned}
$$

Dalam keadaan terburu-buru, semua pecahan dengan pembilang 2 akan mengambil sifat di atas, karena $k=1$ akan langsung menghasilkan k dan a yang sesuai kondisi. Dengan sedikit lagi kesabaran, akan juga didapatkan $k=4$ dan $a=4$ yang juga sesuai kondisi yang diinginkan dan menghasilkan Pecahan Mesir.

$$
\begin{aligned}
2/7 &= 1/4 + 1/32 + 1/256 + \ldots \\
&= 1/4 + 1/28 \\
&= 1/4 + 1/32 + 1/224 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

5/7 adalah salah satu contoh kasus dimana metode ini sama sekali tidak dapat digunakan. Untuk k bilangan asli, tidak akan didapatkan $7k/(5k-1)$ berupa bilangan asli lebih besar dari 1. Untuk $k = 1$, hasilnya adalah 1,75 sedangkan untuk limit k menuju tak hingga, hasilnya semakin menurun yaitu 1,4. Karena tidak mungkin didapatkan hasil berupa bilangan asli lebih besar dari 1, maka metode ini tidak dapat digunakan.

Hasil diatas cukup berguna dalam menentukan batas penghitungan k dan a. Karena a yang hendak kita peroleh adalah >1, maka tidak semua k perlu diperiksa (dimana k adalah bilangan asli yang berjumlah tak hingga), saat hasil a berada di bawah 2 atau diketahui tidak akan pernah mencapai bilangan bulat, maka sudah dapat dipastikan metode ini tidak dapat digunakan.

3. Kelebihan dan Kekurangan

Metode ini memiliki kelebihan berupa fleksibilitas dalam menentukan jumlah suku yang diinginkan dari salah satu representasi Pecahan Mesir dari bilangan rasional. Kemudahan lain yang didapat adalah dalam menentukan penyebut suku-suku berikutnya, dengan memanfaatkan pengetahuan tentang deret geometri.

Sedangkan kelemahannya adalah keterbatasan jumlah kasus akibat adanya kondisi-kondisi yang harus dipenuhi. Dengan selisih pembilang dan penyebut yang semakin kecil, semakin kecil pula kemungkinan mendapatkan k dan a yang memenuhi syarat. Selain itu, dimana metode lain mungkin berusaha mencari penyebut yang tidak terlampau besar, metode ini mungkin terkesan boros dalam mencari penyebut-penyebut suku berikutnya. Juga kejadian tidak mengenakkan untuk $r = 1/2$ yang menyebabkan 2 suku terakhir menjadi sama. Hal ini, tentu saja, cukup mudah dibuktikan.

4. Algoritma

Algoritma yang dituliskan disini diperoleh dari cara-cara yang telah diturunkan sebelumnya, yakni sebagai berikut

```
Input bilangan rasional
If bilangan berpembilang 1 then
   Pecahan Mesir : = bilangan tersebut
Else
   Input jumlah suku
   Cari k asli sehingga ky/(kx-1) = a asli > 1
   If ada k dan a yang memenuhi then
      For i := 0 to (jumlah suku -1) do
         Pecahan Mesir:=Pecahan Mesir + 1/(ar^i)
      Pecahan Mesir:=Pecahan Mesir+1/(a(r^(i+1)-r^i))
```

5. Kesimpulan

Telah terdapat cukup banyak metode untuk mencari Pecahan Mesir dari suatu bilangan rasional. Semuanya memiliki kelebihannya masing-masing. Metode yang ditawarkan dalam makalah ini, dengan segala kelebihan dan kekurangannya, adalah salah satu alternatif untuk menentukan representasi tersebut.

6. Daftar Pustaka

1. *Algorithms for Egyptian Fractions* **http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/numth/egypt/intro.html**
2. *Egyptian Fraction* **http://mathworld.wolfram.com/EgyptianFraction.html**