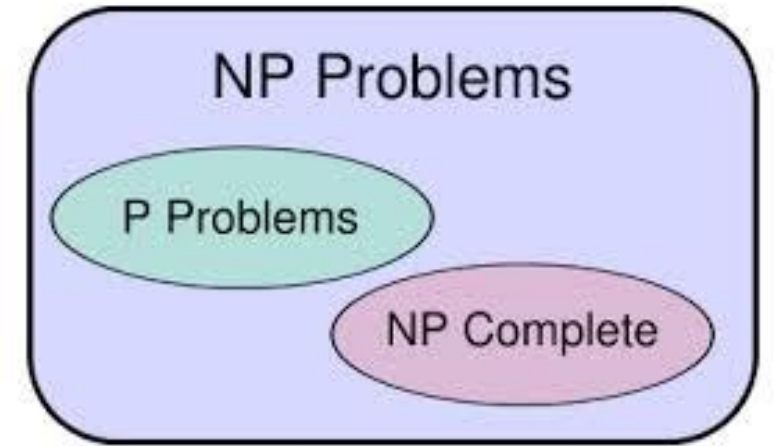


Teori P, NP, dan NP-Complete

(Bagian 1) (Update 2026)



Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi M

Program Studi Teknik Informatika ITB

Ikhtisar

- Polynomial-time algorithm vs nonpolynomial-time algorithm
- Tractable problem vs intractable problem
- Solvable problem vs unsolvable problem
- Mesin Turing
- Decidable problem vs Undecidable problem
- Halting problem
- Deterministic vs nondeterministic algorithm
- Decision problem
- P vs NP vs NP-C vs vs NP-Hard Problem

Polynomial-time vs Nonpolynomial-time algorithm

- Berdasarkan kebutuhan waktunya, algoritma untuk menyelesaikan persoalan dapat dibagi menjadi dua kelompok besar:
 1. Algoritma waktu-polinom (*polynomial-time algorithms*)
 2. Algoritma waktu-non-polinom (*nonpolynomial-time algorithms*)

- *Polynomial-time algorithm* adalah algoritma yang kompleksitas waktunya dibatasi oleh fungsi polinom sebagai fungsi dari ukuran masukannya (n).
 - Contoh: Persoalan *sorting* $\rightarrow T(n) = O(n^2)$, $T(n) = O(n \log n)$
 Persoalan *searching* $\rightarrow T(n) = O(n)$, $T(n) = O(\log n)$
 Perkalian matriks $\rightarrow T(n) = O(n^3)$, $T(n) = O(n^{2.83})$
 - Algoritma yang tergolong “bagus”
- *Nonpolynomial-time algorithm* adalah algoritma yang kompleksitas waktunya dibatasi oleh fungsi non-polinom sebagai fungsi dari ukuran masukannya (n).
 - Contoh: TSP $\rightarrow T(n) = O(n!)$
 Integer knapsack problem $\rightarrow T(n) = O(2^n)$
 , graph coloring, sum of subset, bin packing problem
 - Persoalan “sulit” (*hard problem*).

Tractable vs Intractable Problem

- Sebuah persoalan dikatakan ***tractable*** jika ia dapat diselesaikan dalam waktu yang wajar (*reasonable*).
- Sebuah persoalan dikatakan ***intractable*** jika ia tidak dapat diselesaikan dalam waktu yang wajar dengan bertambahnya ukuran masukan persoalan.
- Apa yang dimaksud dengan waktu yang wajar? Standar waktunya adalah *polynomial time* atau *non-polynomial time* untuk n kecil
 - *Polynomial time*: $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(1)$, $O(n \lg n)$
 - *Not in polynomial time*: $O(2^n)$, $O(n^n)$, $O(n!)$ untuk n yang kecil

Solved Problem vs Unsolved Problem

- **Solved problem:** persoalan yang solusinya telah ditemukan, dibuktikan secara matematis, dan diketahui oleh umum.

Contoh:

- mencari lintasan terpendek antara dua buah simpul (algoritma Dijkstra)
- mencari bilangan kromatis graf (algoritma Welsh-Powell)
- mencari N buah bilangan pertama

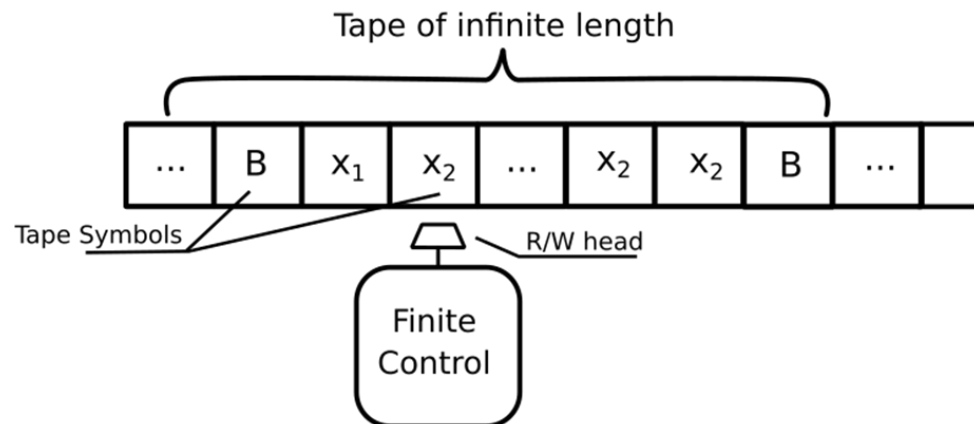
- **Unsolved problem:** persoalan yang belum ditemukan solusinya, meskipun para ilmuwan dan peneliti telah berusaha keras bertahun-tahun untuk memecahkannya. Suatu hari, masalah ini mungkin saja terpecahkan, atau mungkin juga tidak. .

Contoh:

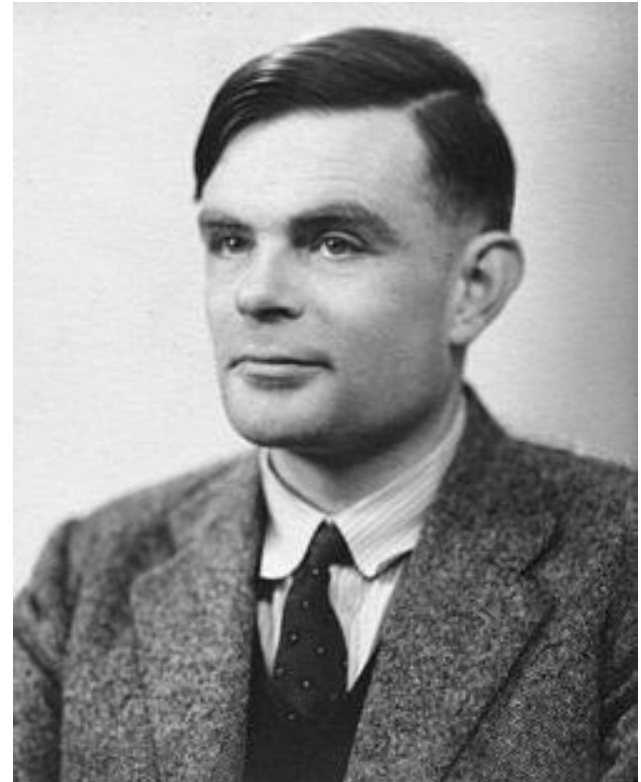
- Riemann Hypothesis
- P vs NP (akan dibahas nanti)

Mesin Turing

- **Mesin Turing:** model matematika komputasi teoritis yang digunakan untuk mendefinisikan secara formal apa itu algoritma, apa yang bisa dihitung oleh komputer, dan dan batas kemampuan komputasi.
- Diperkenalkan oleh Alan Turing tahun 1936.
- Mesin Turing menggambarkan bagaimana sebuah perangkat mekanis membaca dan memanipulasi data berdasarkan seperangkat aturan yang telah ditentukan



- **Alan Mathison Turing**, (23 June 1912 – 7 June 1954), was an English [mathematician](#), [logician](#), [cryptanalyst](#), and [computer scientist](#). He was highly influential in the development of [computer science](#), providing a formalisation of the concepts of "[algorithm](#)" and "computation" with the [Turing machine](#), which played a significant role in the creation of the modern computer. Turing is widely considered to be the father of computer science and [artificial intelligence](#).^[3]



Sumber: Wikipedia.org

Decidable Problem vs Undecidable Problem

- *Decidable problem*: Persoalan yang dapat diselesaikan oleh komputer (menggunakan Turing Machine) dalam jumlah langkah terbatas, dan selalu menghasilkan jawaban "Ya" atau "Tidak" yang benar untuk setiap input yang diberikan.
- Memiliki algoritma penyelesaian pasti dan selalu berhenti (tidak *looping/infinite loop*).
- Dengan kata lain: persoalan tersebut dapat diputuskan oleh mesin Turing.
- Contoh:
 - Menentukan apakah terdapat lintasan dari simpul s ke t ? (Pakai BFS pasti berhenti)
 - Menentukan apakah sebuah bilangan bulat prima atau komposit? (Pasti ada algoritma yang selesai menentukannya)
 - Menentukan apakah sebuah matriks simetri terhadap diagonal utama

- *Undecidable problem*: Persoalan yang tidak terdapat algoritma (dalam hal ini mesin Turing) yang dapat dibangun untuk menghasilkan jawaban "Ya" atau "Tidak" yang benar untuk *semua kemungkinan kasus*.
- Artinya: tidak mungkin dibuat algoritma universal untuk menyelesaikannya.
- Komputer mungkin bisa menjawab untuk beberapa kasus tertentu, tetapi secara logis tidak ada algoritma universal yang berfungsi untuk seluruh kemungkinan input
- Contoh yang terkenal: *Halting problem* (lihat slide berikut)

- *Halting problem*: diberikan sebuah program (P) dan input (x) untuk program tersebut, tentukan apakah program akan berhenti (*halt*) dengan *input* tersebut atau berlanjut bekerja secara tak terbatas (*infinite loop*)?



Alan designed the perfect computer

Halting problem dikemukakan oleh Alan Turing pada tahun 1936

- Kode program P berikut:

```
input(x);  
while (x != 0) {  
    x = x + 1;  
}
```

tidak pernah berhenti jika $x = 1$

- Tetapi, jika $x = -1$

```
input(x);  
while (x != 0) {  
    x = x + 1;  
}
```

maka program pasti berhenti.

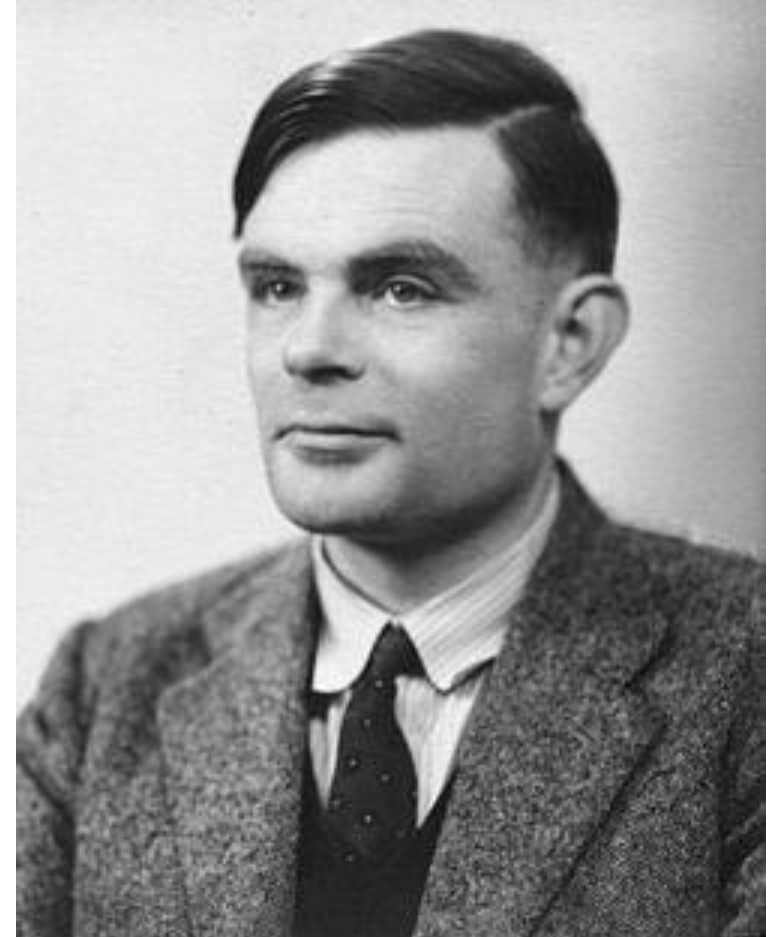
- Misalkan A adalah algoritma untuk menyelesaikan *halting problem*.
- A menerima input:
 - (i) kode program P dan
 - (ii) input untuk program P , yaitu x ,

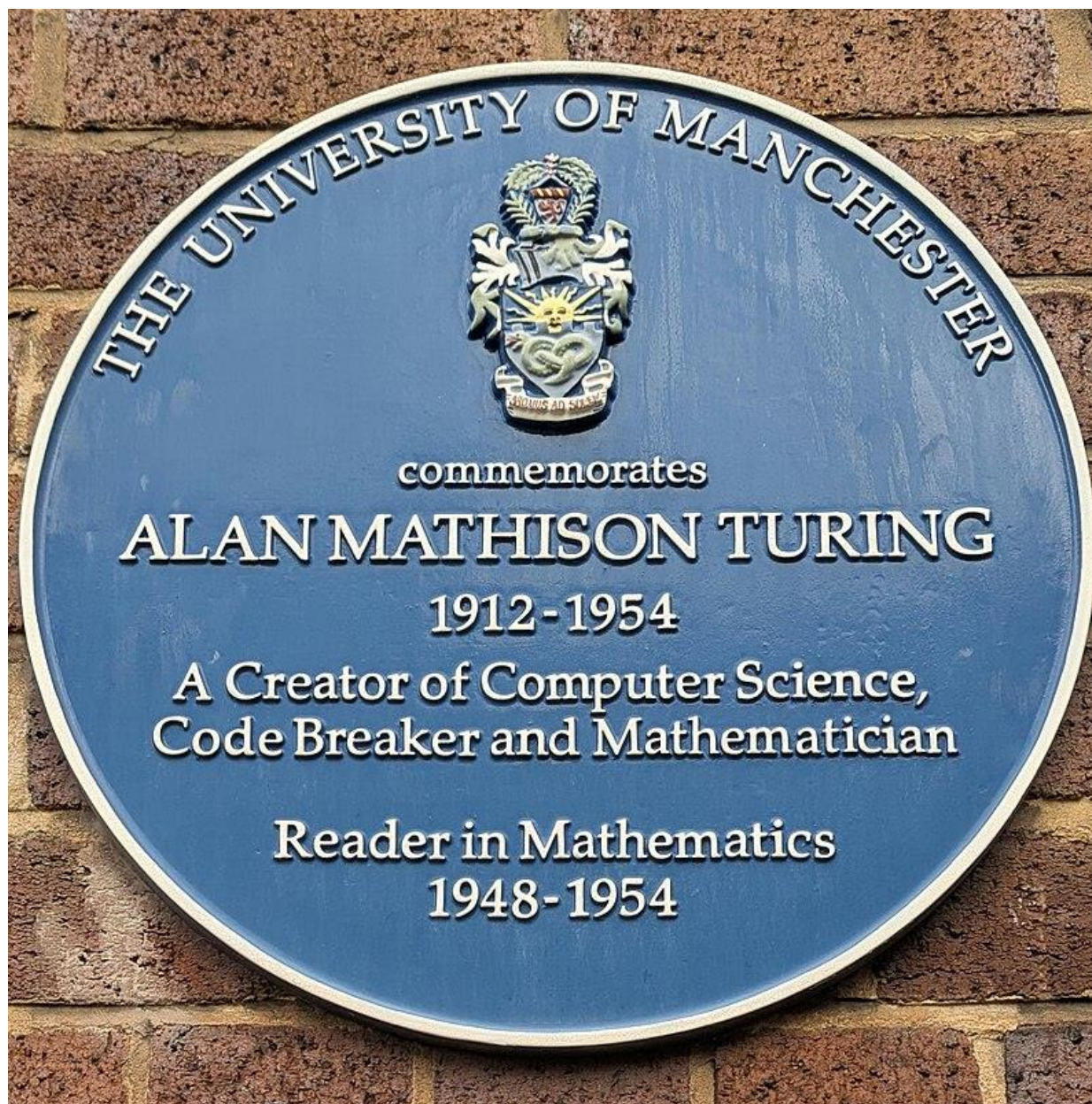
A harus memutuskan apakah program P berhenti untuk masukan x

$A(P, x) = 1$, jika program P berhenti untuk masukan x
 $= 0$, jika program P tidak berhenti

- Turing membuktikan tidak ada algoritma universal A yang dapat memutuskan apakah **semua** program P berhenti ketika dijalankan dengan **semua** masukan x itu.
→ *Halting problem* tidak bisa diselesaikan → *undecidable problem*

- **Alan Mathison Turing**, (23 June 1912 – 7 June 1954), was an English [mathematician](#), [logician](#), [cryptanalyst](#), and [computer scientist](#). He was highly influential in the development of [computer science](#), providing a formalisation of the concepts of "[algorithm](#)" and "computation" with the [Turing machine](#), which played a significant role in the creation of the modern computer. Turing is widely considered to be the father of computer science and [artificial intelligence](#).^[3]





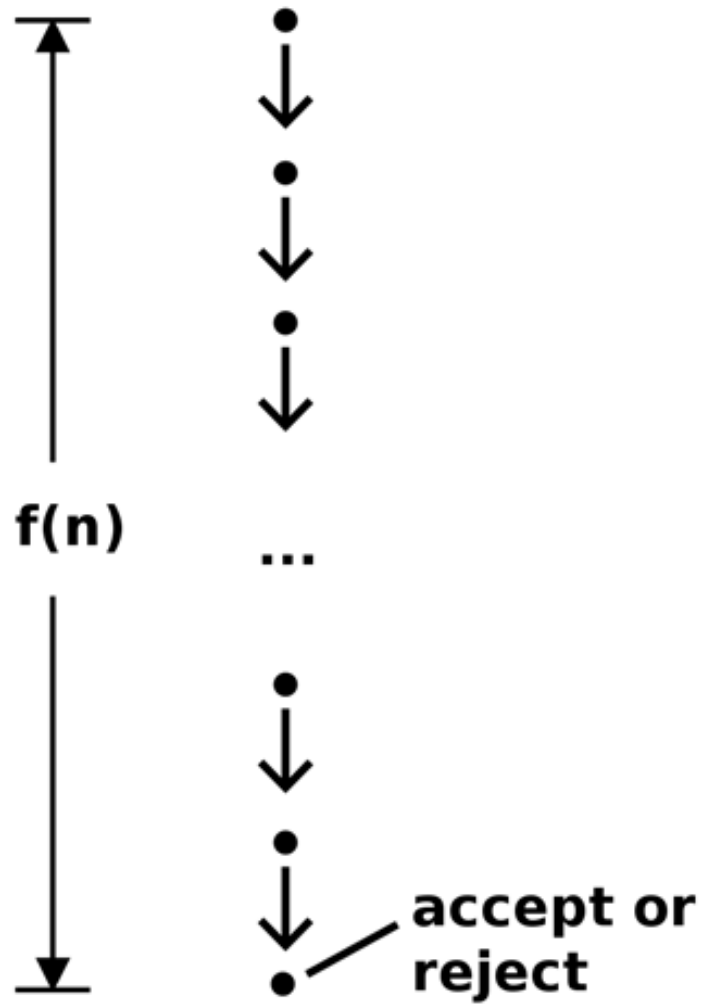
Algoritma Deterministik

- **Algoritma deterministik** adalah algoritma yang dapat ditentukan dengan pasti langkah apa yang akan dikerjakan selanjutnya oleh algoritma tersebut.

...
langkah $k-1$
langkah k
langkah $k+1$
...

- Artinya, untuk input yang sama, selalu menjalankan langkah yang sama, dan menghasilkan output yang sama. Tidak ada “pilihan acak” atau banyak kemungkinan jalur eksekusi.
- Algoritma deterministik bekerja sesuai dengan cara program dieksekusi oleh komputer (mengerjakan instruksi secara sekuensial).
- Semua algoritma yang sudah kita pelajari sejauh ini adalah algoritma deterministic (Merge sort, Dijkstra, BFS/DFS, Euclidean algorithm, dll)

Deterministic



Mesin Turing Deterministik (DTM):
Pada setiap *state* hanya ada satu transisi.

Misalnya: $\delta(q, a) = (p, b, R)$

Contoh: *Sequential search*

function *Sequential-Search*(A, x)

*{Menghasilkan indeks k sedemikian sehingga $A[k]=x$
atau -1 jika tidak terdapat x di dalam $A[1..n]$ }*

Algoritma:

(1) $k \leftarrow 1$

(2) **while** ($A[k] \neq x$) **and** ($k < n$) **do**

$k \leftarrow k + 1$

end

(3) **if** $A[k] = x$ **then**

return k

else

return -1

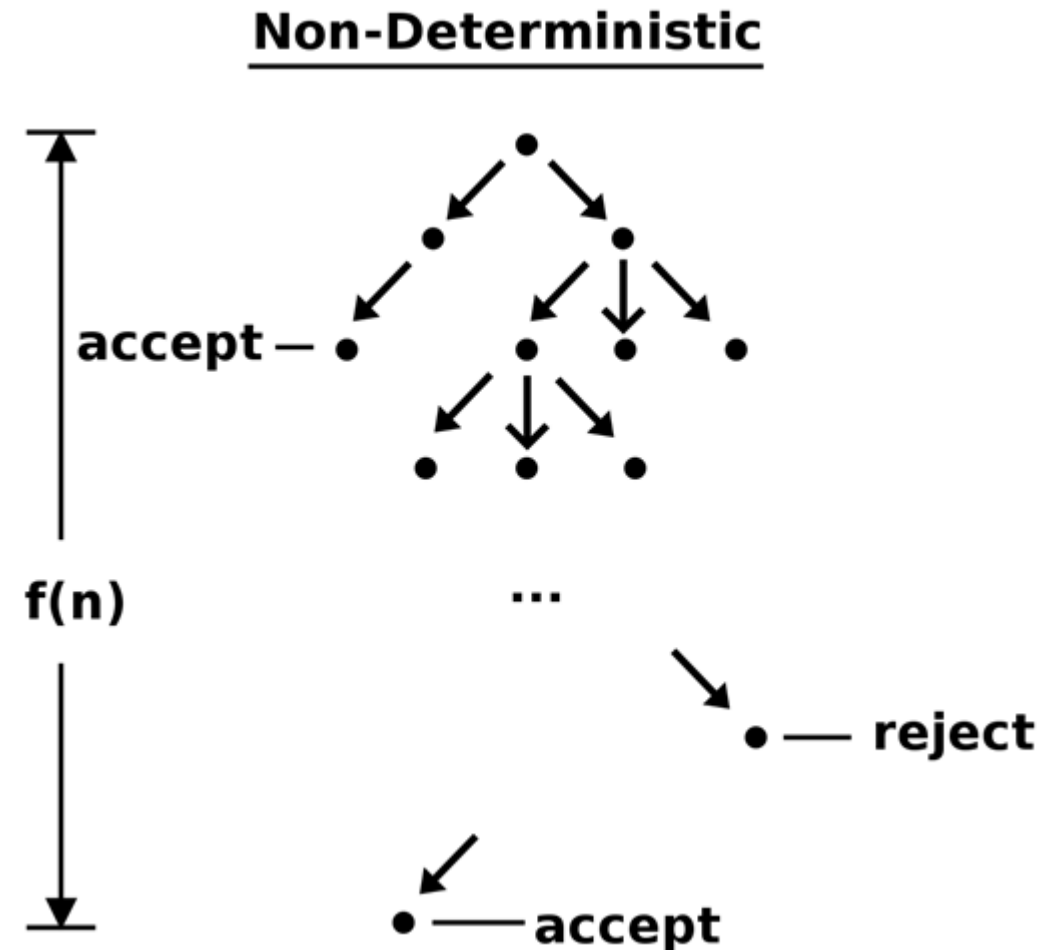
end

Untuk array A dan nilai input x yang sama,
langkahnya selalu identik, hasilnya selalu sama.

Kompleksitas waktu: $O(n)$

Algoritma Non-deterministik

- **Algoritma non-deterministik** adalah algoritma yang pada suatu langkah akan berhadapan dengan beberapa pilihan langkah berikutnya (opsi), dan algoritma memiliki kemampuan untuk menerka atau memilih sebuah langkah.
- Algoritma non-deterministik dijalankan mesin non-deterministik (komputer hipotetik, komputer bersifat imajiner atau teoritis).
- Contoh: mesin turing *nondeterministic*.



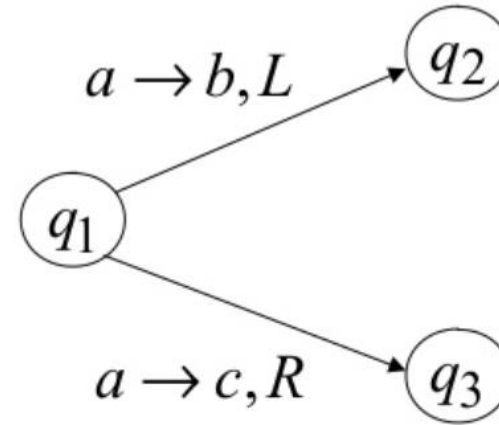
Mesin Turing Nondeterministik

Pada satu state dan simbol bisa terdapat beberapa kemungkinan transisi.

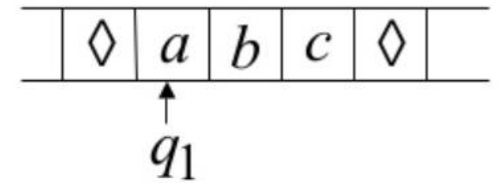
Misalnya:

$$\delta(q_1, a) = \{ (q_2, b, L), (q_3, c, R) \}$$

Mesin dapat memilih salah satu.

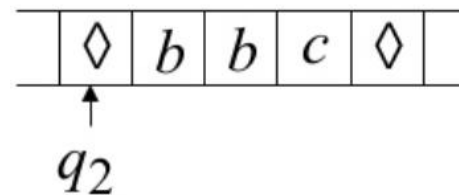


Time 0

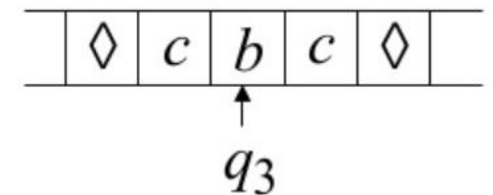


Time 1

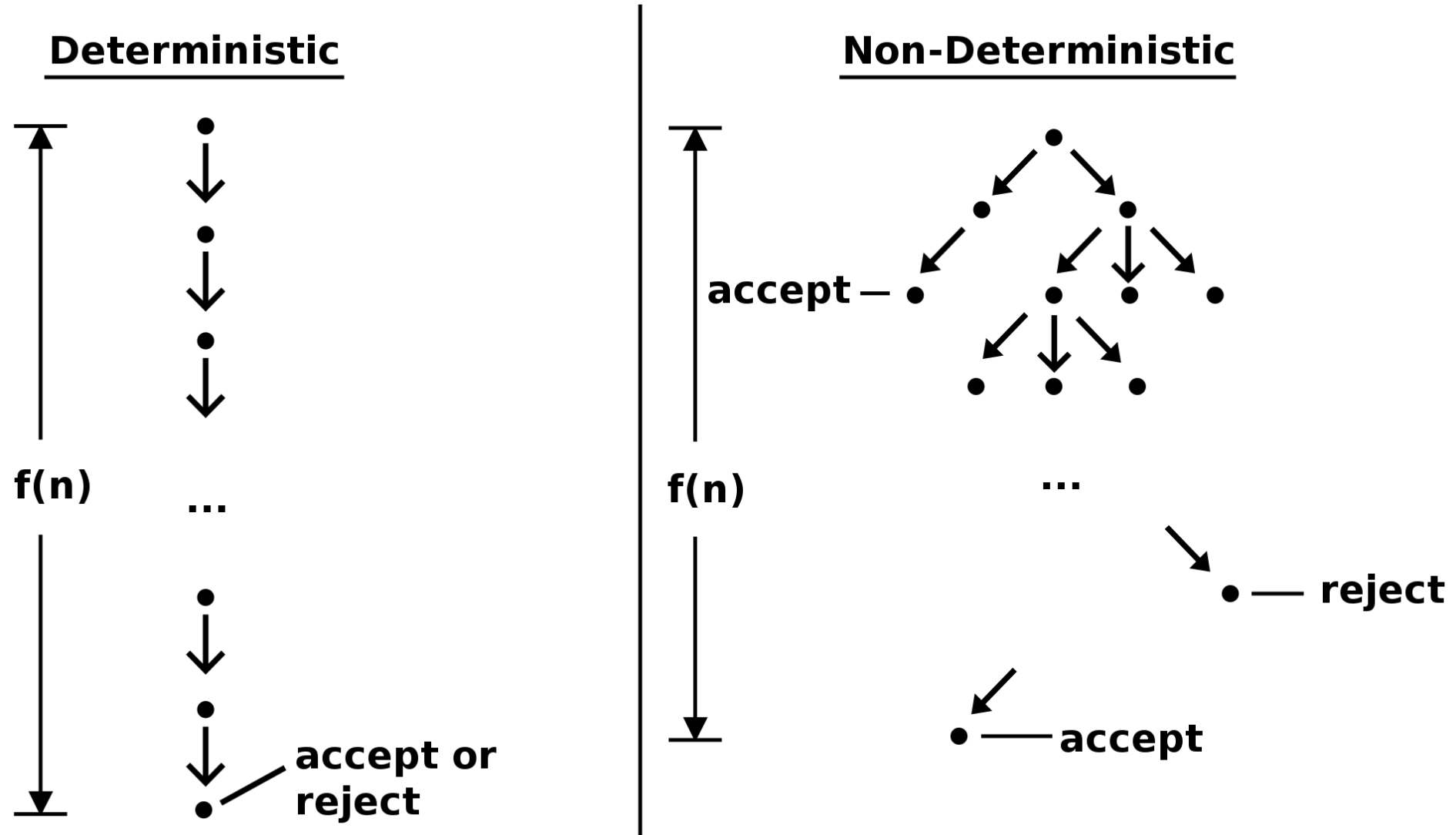
Choice 1



Choice 2



Perbedaan komputasi deterministik vs komputasi non deterministik



- Algoritma non-deterministik bukan berarti random, probabilistik, atau hasil berubah-ubah,
- tetapi, seolah-olah algoritma dapat “menerka” solusi yang benar secara “Ajaib”, lalu memverifikasi kebenaran solusi tersebut.
- Algoritma non deterministik dapat digunakan untuk menghampiri solusi persoalan-persoalan yang solusi eksaknya membutuhkan waktu komputasi yang mahal.
- Misalnya untuk menyelesaikan persoalan TSP, Knapsack, *Sum of Subset*, dll.

Contoh (Sum of subset): Diberikan himpunan { 3, 5, 9, 12} dan $m = 17$. Apakah terdapat subset yang jumlahnya 17?

- Jika menggunakan algoritma deterministik, misalnya algoritma brute force, maka algoritma mencoba semua subset satu per satu dan memeriksa apakah jumlahnya = 17.
- Tetapi jika menggunakan algoritma non-deterministik, maka algoritma dapat menebak dengan benar sebuah subset lalu memeriksa dengan cepat apakah jumlahnya = m .
- Misalnya menebak: { 5, 12} lalu memeriksa $5 + 12 = 17$. Selesai.

Ada dua tahapan di dalam algoritma non-deterministik:

- 1) **Tahap menerka atau memilih (non-deterministik)**: Diberikan *instance* persoalan, tahap ini memilih atau menerka satu opsi dari beberapa opsi yang ada. Bagaimana cara membuat pilihan itu tidak didefinisikan aturannya.
- 2) **Tahap verifikasi (deterministik)**: memeriksa apakah opsi yang diterka menyatakan solusi. Luaran dari tahap ini adalah sinyal **sukses** jika solusi ditemukan atau sinyal **gagal** jika bukan solusi.

Contoh: Non-deterministic Search

Algoritma *Search*(*A*, *x*)

{ tahap menerka }

$k \leftarrow \text{Pilih}(1, n)$ $O(1)$

{ tahap verifikasi }

if ($A[k] = x$) **then** $O(1)$

write(k); **Sukses**() $O(1)$

else

write(-1); **Gagal**() $O(1)$

Kompleksitas waktu: $O(1) + O(1) + O(1) + O(1) = O(1)$

Contoh lain: Sorting

```
1  Algorithm NSort( $A, n$ )
2  // Sort  $n$  positive integers.
3  {
4      for  $i := 1$  to  $n$  do  $B[i] := 0$ ; // Initialize  $B[ ]$ .
5      for  $i := 1$  to  $n$  do
6          {
7               $j := \text{Choice}(1, n)$ ;
8              if  $B[j] \neq 0$  then Failure();
9               $B[j] := A[i]$ ;
10         }
11     for  $i := 1$  to  $n - 1$  do // Verify order.
12         if  $B[i] > B[i + 1]$  then Failure();
13     write ( $B[1 : n]$ );
14     Success();
15 }
```

Algorithm 11.2 Nondeterministic sorting

Sumber: Horowitz & Sahni, Fundamental of Computer Algorithms, 2nd Edition

Persoalan Keputusan

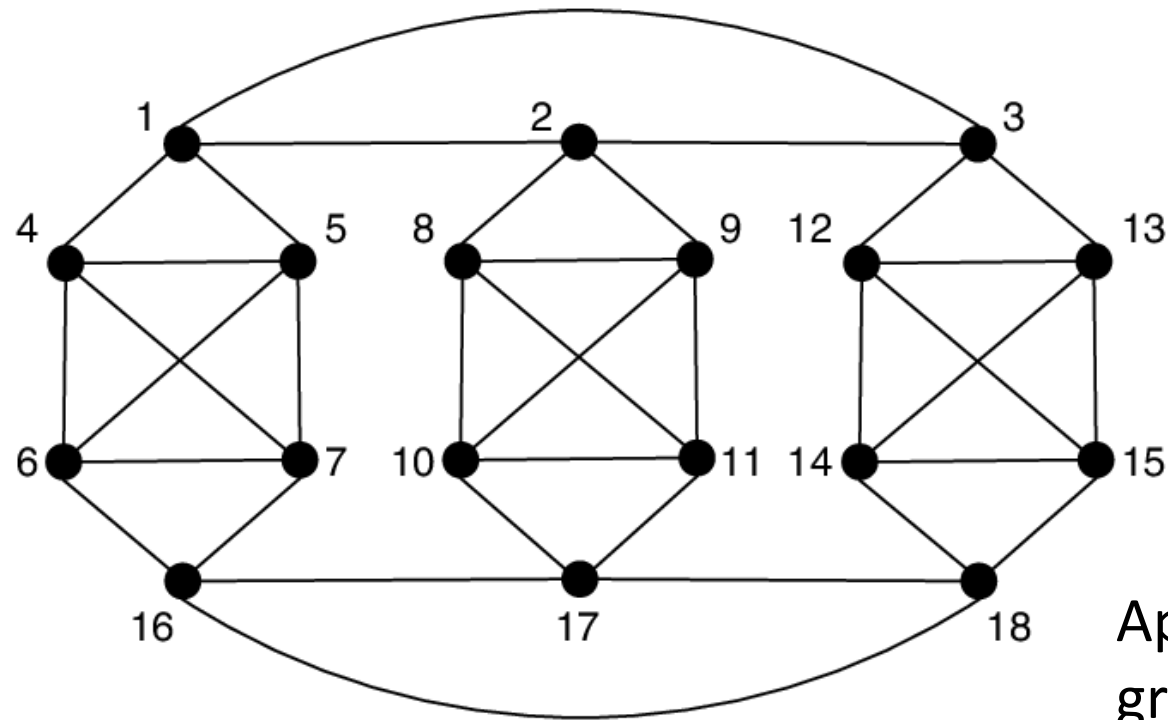
- Dalam membahas teori P dan NP, kita hanya membatasi pada persoalan keputusan (*decision problem*)
- **Persoalan keputusan** adalah persoalan yang solusinya hanya jawaban “yes” atau “no” (ekivalen dengan *accept/reject*, ada/tidak ada, bisa/tidak bisa)

Contoh:

1. Diberikan sebuah integer x .
Tentukan apakah elemen x terdapat di dalam tabel? **Ada/tidak ada**
2. Diberikan sebuah integer x .
Tentukan apakah x bilangan prima? **Prima/tidak prima**
3. Diberikan sebuah graf dengan n simpul. Apakah terdapat lintasan dari u ke v ?
Ada/tidak ada

Contoh-contoh persoalan keputusan lainnya

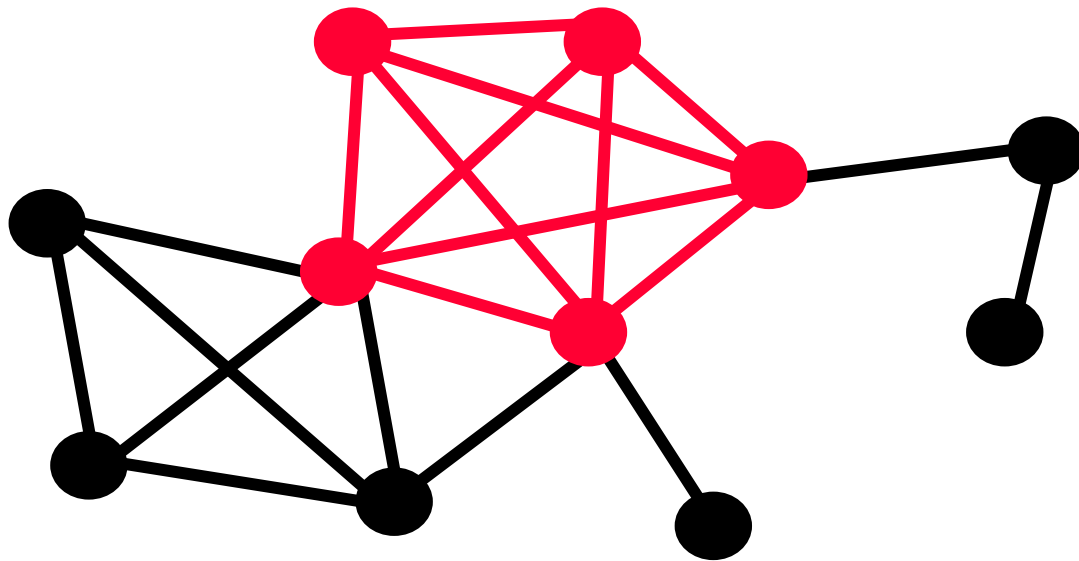
1. Persoalan sirkuit Hamilton



Apakah terdapat sirkuit Hamilton di dalam graf ini? (Yes/no)

2. Clique Problem

Sebuah *clique* adalah *subset* dari himpunan simpul di dalam graf yang semuanya terhubung.



Apakah terdapat clique yang jumlah simpulnya 5? (Yes/no)

Upagraf yang berwarna merah adalah sebuah *clique*

3. SAT (*Satisfiable Problem*)

- Diberikan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah himpunan peubah Boolean. Sebuah klausa (ekspresi) Boolean mengandung peubah atau negasi dari peubah. Sebuah koleksi klausa Boolean C dikatakan *satisfiable* jika terdapat *assignment* nilai-nilai kebenaran untuk X yang secara simultan membuat C bernilai *true*.
- Contoh: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ $C = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
 $x_i = \{1, 0\}$, 1 = true, 0 = false
jika $C = 1 \rightarrow \text{satisfied}$; jika $C = 0 \rightarrow \text{not satisfied}$
misal $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0 \rightarrow C = (1' \vee 0 \vee 0') \wedge (0) \wedge (1 \vee 0') = 0 \rightarrow \text{not satisfied}$

PERSOALAN SAT:

Diberikan *instance* persoalan, yaitu himpunan peubah Boolean X dan klausa C

Pertanyaan: apakah terdapat *assignment* nilai-nilai peubah sehingga C *satisfied*?

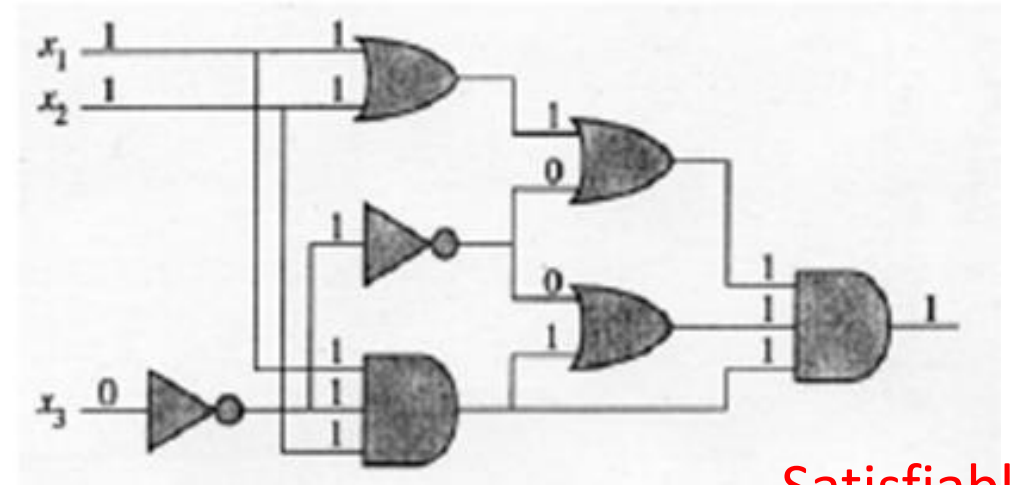
(Yes/No)

Example *Yes*

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} \quad C = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$$

The truth assignment $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ satisfies C .

The answer is *Yes*



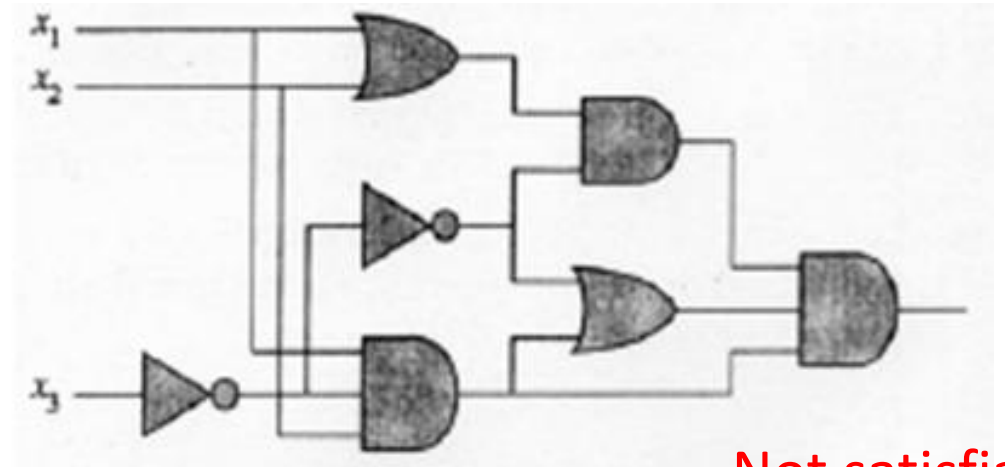
Satisfiable

Example *No*

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} \quad C' = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \bar{x}_1 \wedge (x_1 \vee x_3)$$

There are no truth assignments that satisfies C'

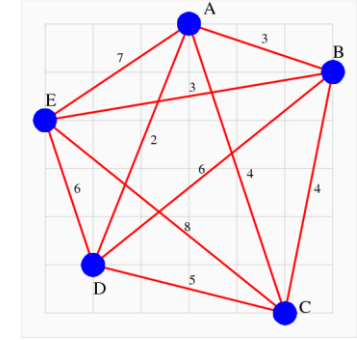
The answer is *No*



Not satisfiable

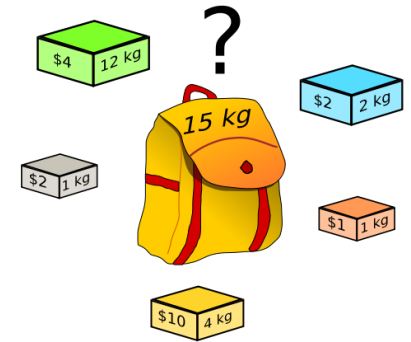
- Setiap persoalan optimasi yang kita kenal memiliki *decision problem* yang bersesuaian.
- Perhatikan beberapa persoalan berikut:
 1. Travelling Salesperson Problem (TSP)
 2. Knapsack Problem
 3. Graph Colouring

1. Travelling Salesperson Problem



- Diberikan graf berarah dengan bobot (*weight*) pada setiap sisinya. Sebuah tur di dalam graf tersebut dimulai dari sebuah simpul, mengunjungi simpul lainnya tepat sekali dan kembali lagi ke simpul asalnya.
- *Travelling Salesperson Optimization Problem* (TSOP): Carilah tur dengan total bobot sisi minimal → TSP yang sudah biasa dikenal.
- *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP): Apakah terdapat tur dengan total bobot sisinya $\leq d$.
→ TSP decision problem.

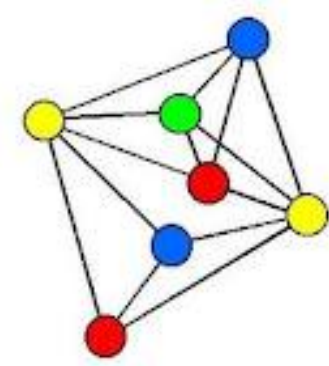
2. Knapsack Problem



- Diberikan n buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas W . Setiap objek memiliki bobot dan profit masing-masing.
- **Integer Knapsack Optimization Problem**: Tentukan objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* asalkan tidak melebihi W namun memberikan total profit maksimum. → *Knapsack problem yang sudah kita kenal*
- **Integer Knapsack Decision Problem**: Apakah dapat memasukkan objek-objek ke dalam *knapsack* namun tidak melebihi W tetapi total profitnya $\geq P$.

→ *Integer Knapsack decision problem*

3. Graph Colouring Problem



- **Graph-Colouring Optimization Problem:** Tentukan jumlah minimal warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf sehingga dua simpul bertetangga memiliki warna berbeda.

→ *Graph Colouring problem yang kita kenal.*

- **Graph-Colouring Decision Problem:** Apakah terdapat pewarnaan graf yang menggunakan paling banyak m warna sedemikian sehingga dua simpul bertetangga memiliki warna berbeda?

→ *Graph Colouring decision problem*

- Kita belum menemukan algoritma polinomial untuk persoalan optimasi atau persoalan keputusan pada contoh-contoh di atas.
- Namun, jika kita dapat menemukan algoritma polinomial untuk jenis persoalan optimasi tersebut, maka kita juga mempunyai algoritma polinom untuk persoalan keputusan yang bersesuaian.
- Hal ini karena solusi persoalan optimasi menghasilkan solusi persoalan keputusan yang bersesuaian.

- Contoh: jika pada persoalan *Travelling Salesperson Optimization Problem* (TSOP) tur minimal adalah 120,
- maka jawaban untuk persoalan *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP) adalah “yes” jika $d \leq 120$, atau “no” jika $d > 120$.
- Begitu juga pada persoalan *Integer Knapsack Optimization Problem*, jika keuntungan optimalnya adalah 230, jawaban untuk persoalan keputusan *integer knapsack* yang berkoresponden adalah “yes” jika $P \geq 230$, dan “no” jika $P < 230$.

Dua tahapan di dalam algoritma non-deterministik untuk persoalan keputusan:

1. **Tahap menerka (non-deterministik):** Diberikan *instance* persoalan, tahap ini (misalnya) menghasilkan string S . String ini dapat dianggap sebagai sebuah terkaan solusi. String yang dihasilkan bisa saja tidak bermakna (*non-sense*).
2. **Tahap verifikasi (deterministik):** memeriksa apakah S menyatakan solusi persoalan. Luaran tahap ini adalah “true” jika S merupakan solusi, atau “false” jika bukan.

Agoritma non-deterministik *Travelling Salesperson Decision Problem* (TSDP):

Persoalan: apakah terdapat tur di dalam graf dengan total bobot $\leq d$.

- Tahap menerka

$S \leftarrow \text{Terka}(\text{string})$

- Tahap verifikasi

S diverifikasi apakah merupakan sebuah tur lengkap, lalu periksa apakah total bobot semua sisinya lebih kecil atau sama dengan d

if S adalah tur dan total bobot $\leq d$ **then**

 return **true**

else

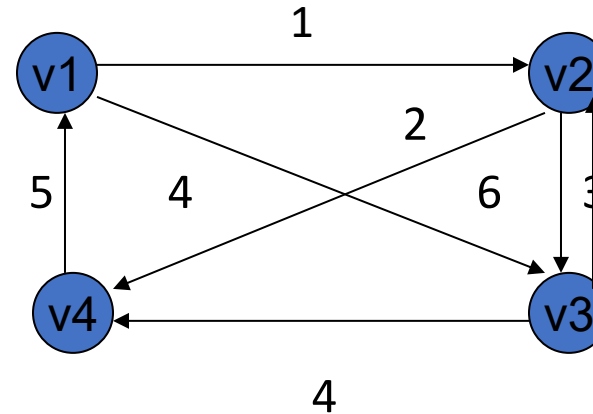
 return **false**

end

Kompleksitas waktu: $O(n)$

- Algoritma non-deterministik dikatakan “menyelesaikan” (*completion*) persoalan keputusan apabila:
 - 1) Untuk suatu *instance* persoalan dimana jawabannya adalah “yes”, terdapat beberapa string *S* yang pada tahap verifikasi menghasilkan “true”
 - 2) Untuk suatu *instance* persoalan dimana jawabannya adalah “no”, tidak terdapat string *S* yang pada tahap verifikasi menghasilkan “true”.

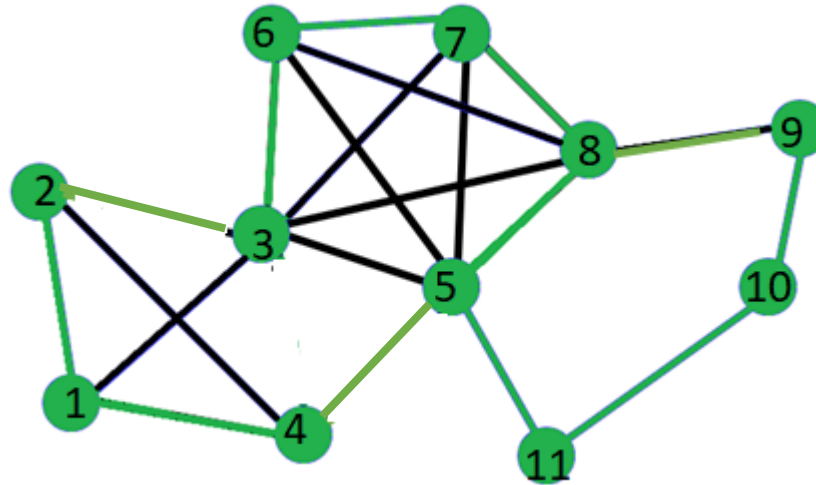
- Contoh untuk TSDP dengan $d = 15$:



S	Luaran	Alasan
[v1, v2, v3, v4, v1]	False	Total bobot > 15
[v1, v4, v2, v3, v1]	False	S bukan sebuah tur
^%@12*&a%	False	S bukan sebuah tur ($S = \text{string non-sense}$)
[v1, v3, v2, v4, v1]	True	S sebuah tur, total bobot ≤ 15

- Kita dapat menyatakan bahwa algoritma non-deterministik “menyelesaikan” TSDP dalam dua tahap tersebut

- **Persoalan sirkuit Hamilton:** Diberikan sebuah graf G . Apakah G mengandung sirkuit Hamilton? Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui setiap simpul di dalam graf tepat satu kali.



Algoritma non-deterministik:

1. **Terkalah permutasi semua simpul**
2. **Verifikasi:** Periksa apakah permutasi tersebut membentuk sirkuit. Jika benar, maka jawabannya adalah “true”, jika tidak maka jawabannya adalah “false”

BERSAMBUNG KE BAGIAN 2