Algoritma Runut-balik (*Backtracking*) (Bagian 2)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
2025

2. Sum of Subsets Problem

- **Persoalan**: Diberikan n buah bobot (*weight*) berupa bilangan-bilangan positif (*integer*) yang berbeda $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dan sebuah target berupa bilangan bulat positif m. Tentukan semua himpunan bagian dari n bobot tersebut yang jumlahnya sama dengan m.

  Contoh: $n = 4$; $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (11, 13, 24, 7)$, $m = 31$.

  Himpunan bagian yang memenuhi adalah {11, 13, 7} dan {24, 7} .

- Termasuk ke dalam persoalan kombinatorika

- Perhatikan, persoalan *sum of subset* mungkin saja tidak memiliki solusi. Misalnya pada contoh di atas, jika m = 30, maka tidak ada himpunan bagian yang memenuhi.

Contoh persoalan *sum of subset* dalam dunia nyata

Sum-of-subset problem adalah persoalan memilih kombinasi dari sekumpulan objek sehingga totalnya pas dengan batas/target, seperti:

1. Belanja dengan budget

Misalnya Anda punya uang Rp100.000 dan Anda ingin membeli kombinasi barang dari daftar belanja (dengan harga berbeda), sehingga totalnya pas Rp100.000.

Ini persoalan *sum-of-subset*:

Daftar harga = himpunan $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

Uang (*budget*)= *m*

Kombinasi barang = subset.

2. Pemilihan tugas / proyek

Manajer proyek punya sejumlah proyek dengan biaya dan durasi berbeda. Ia ingin memilih proyek-proyek dengan total durasi tepat 40 jam kerja seminggu dan total biaya tidak melebihi anggaran.

2. Pengisian muatan truk (load balancing)

Truk punya kapasitas muatan tertentu, misal 1 ton. Anda punya barang-barang dengan bobot berbeda, dan Anda ingin memilih kombinasi barang yang totalnya pas 1 ton.

Tujuannya: Efisiensi maksimal (tidak sisa ruang) dan tidak *overload*.

4. Investasi / pembiayaan

Investor ingin memilih sejumlah investasi dari daftar peluang yang masing-masing butuh dana berbeda, supaya total dana yang dipakai pas sama dengan budget investasinya.

- Solusi *sum-of subset problem* dinyatakan sebagai vektor $X = (x_1 , x_2 , ..., x_n)$, $x_i \in \{0, 1\}$

  $x_i = 1$, artinya w_i dimasukkan ke dalam subset

  $x_i = 0$, artinya w_i tidak dimasukkan ke dalam subset

- Pohon ruang status untuk persoalan *sum of subset* berupa pohon biner.

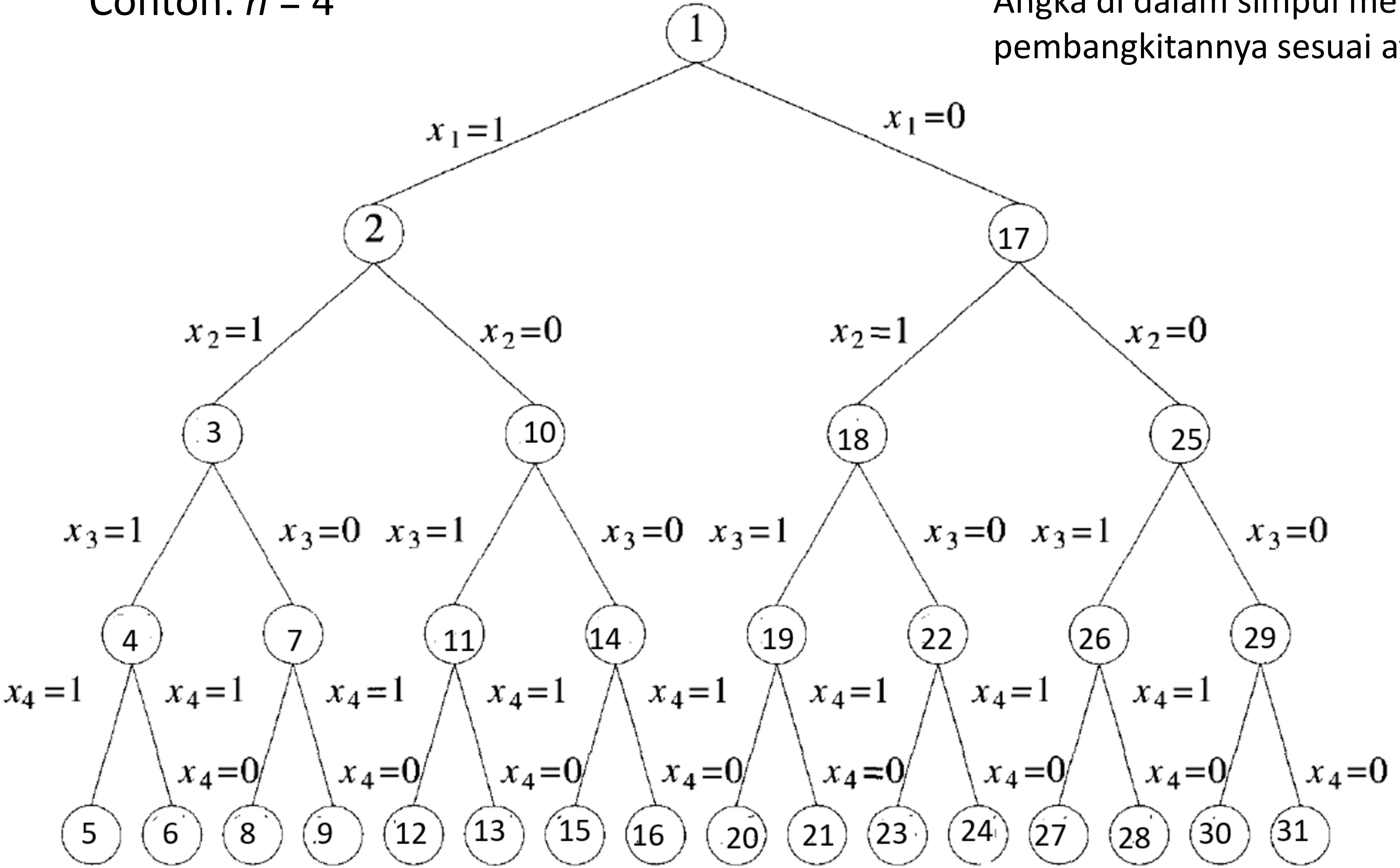
- Sisi pada cabang kiri menyatakan w_i diambil ($x_i = 1$),

- sedangkan sisi pada cabang kanan menyatakan w_i tidak diambil ($x_i = 0$).

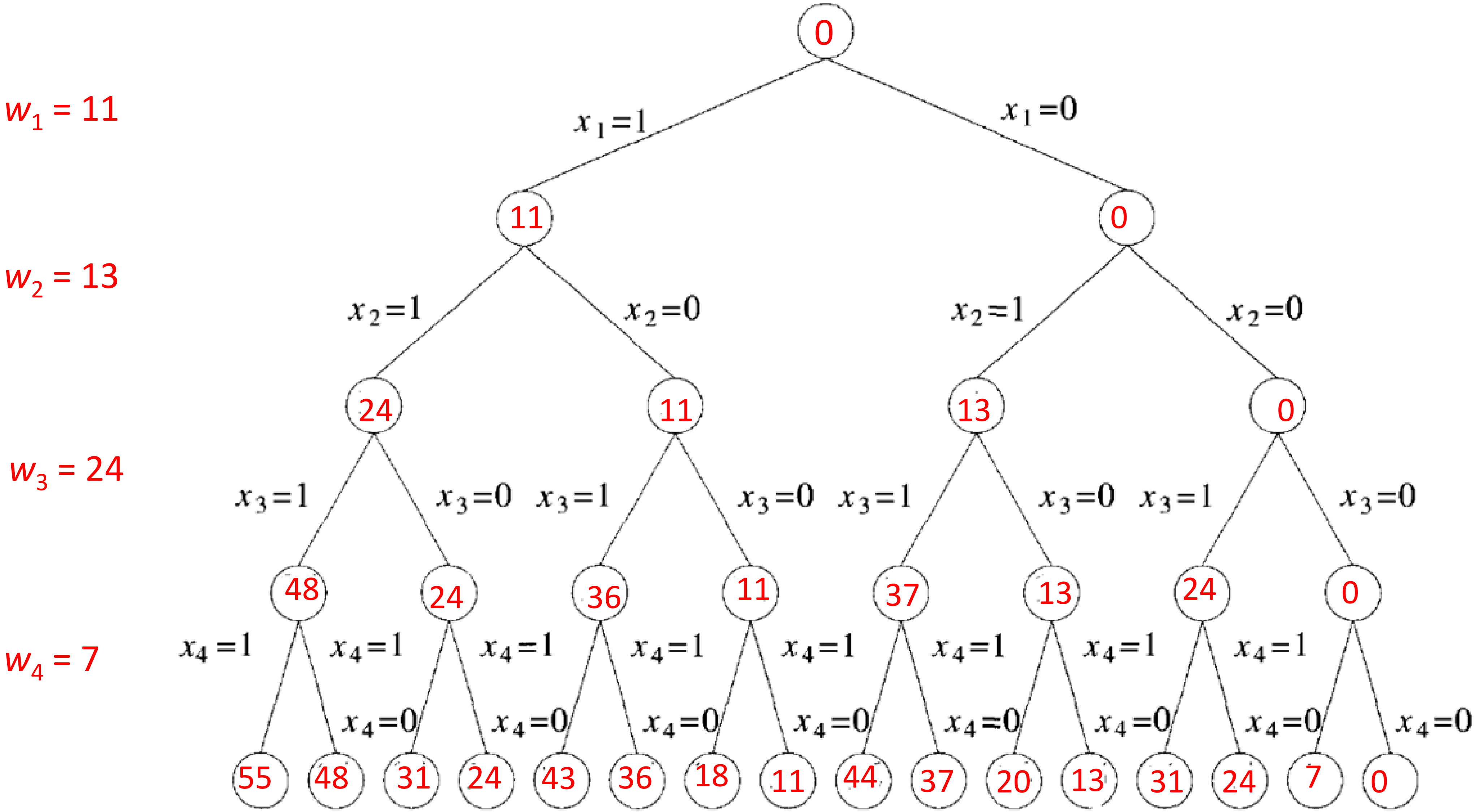
- Sembarang lintasan dari akar ke daun menyatakan himpunan bagian (*subset*)

Contoh: n = 4

Angka di dalam simpul menyatakan urutan pembangkitannya sesuai aturan DFS



- Sekarang, angka di dalam setiap simpul kita ganti dengan nilai yang menyatakan jumlah bobot sampai ke simpul tersebut



- Sebelum dilakukan pencarian solusi, urutkan semua bobot secara menaik dari nilai terkecil hingga nilai yang terbesar.

- Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ sudah di-*assign* dengan sebuah nilai (0 atau 1). Maka, pada pengisian nilai untuk x_k, kita dapat menggunakan fungsi pembatas (*bounding function*) sebagai berikut:

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \textit{true} \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq m$$

- Ini berarti, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tidak mengarah ke simpul solusi (*goal node*) jika kondisi di atas tidak dipenuhi.

- Perhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq m$ artinya jumlah bobot sampai simpul ke-k ditambah dengan bobot-bobot yang tersisa masih lebih besar atau sama dengan m.

- Oleh karena bobot-bobot sudah terurut menaik, maka kita dapat memperkuat fungsi pembatas dengan kondisi bahwa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tidak mengarah ke simpul solusi jika

$$\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + w_{k+1} > m$$

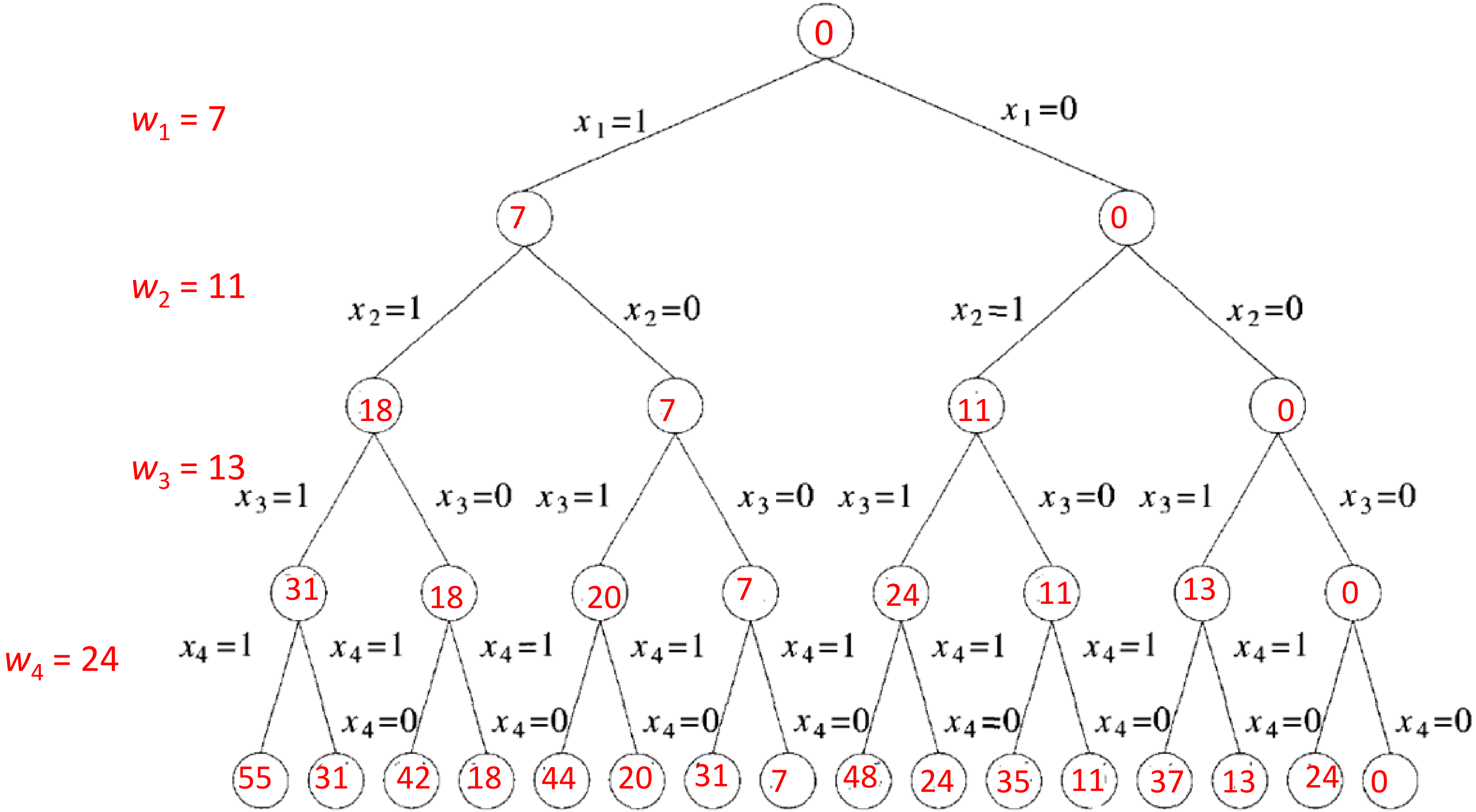
- artinya tidak mengarah ke simpul solusi jumlah bobot sampai simpul ke-*k* ditambah dengan bobot ke-(*k*+1) lebih besar dari *m*.
- Jika jumlah bobot sampai simpul ke-*k* sudah sama dengan *m*, maka STOP.
- Dengan demikian, fungsi pembatas keseluruhan adalah

$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) = true$ jika dan hanya jika $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq m$ **dan**

$$\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_i = m \text{ atau } \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + w_{k+1} \leq m \right)$$

- Artinya $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mengarah ke simpul solusi jika kedua kondisi di atas dipenuhi.

Contoh: $n = 4$; $m = 31$, $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (7, 11, 13, 24)$ → sudah diurut menaik



Pencarian solusi: n = 4; (w_1, w_2, w_3, w_4) = (7, 11, 13, 24), m = 31.

$B(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ = *true* iff

$$\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq m$$

dan

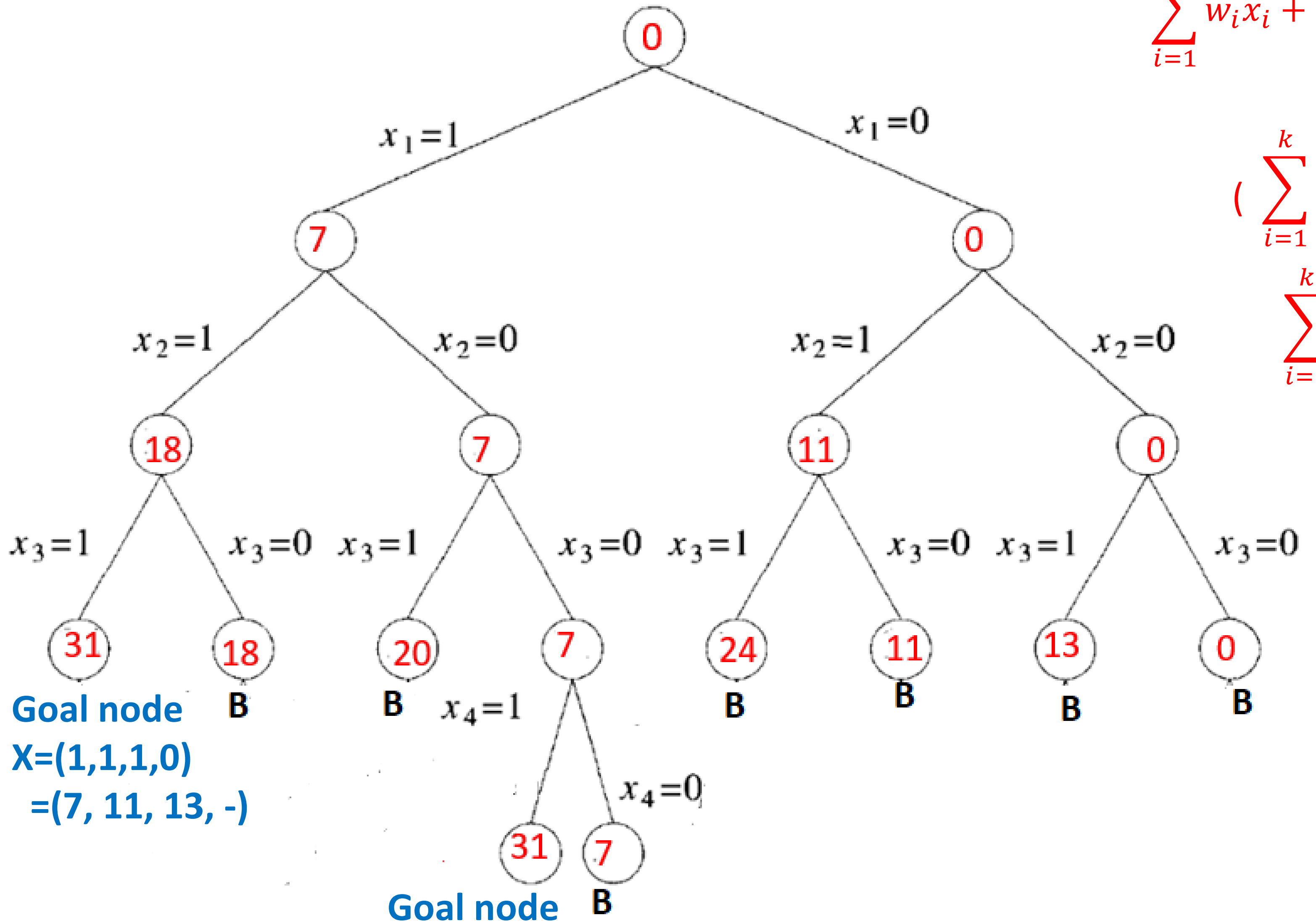
$$\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_i = m \text{ atau } \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + w_{k+1} \leq m \right)$$

w_1 = 7

w_2 = 11

w_3 = 13

w_4 = 24



Goal node
X=(1,1,1,0)
=(7, 11, 13, -)

Goal node
X=(1,0,0,1)
= (7, -, -, 24)

Pseudo-code algoritma *sum-of-subset* dengan *backtracking*

- $Wt = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i$
- $sisabobot = \sum_{i=k+1}^{n} w_i$

$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) = true$ iff

$$\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq m$$

dan

$$\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_i = m \text{ atau } \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + w_{k+1} \leq m \right)$$

- Mengarah ke simpul solusi (*promising*) jika *bounding function B* memberikan nilai *true*:

$$(Wt + sisabobot \geq m) \text{ dan } (Wt = m \text{ atau } Wt + w_{k+1} \leq m)$$

Algoritma *SumofSubset*:

Masukan: n, m, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

Luaran: semua himpunan bagian dari W yang jumlahnya sama dengan m

Langkah-Langkah algoritma:

1. Urutkan elemen-elemen W sehingga terurut membesar (dari kecil ke besar)
2. Hitung $total = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$
3. Panggil prosedur *SumOfSubset*(0, 0, *total*)

function *promising*(**input** *k* : **integer**, *Wt* : **integer**, *sisabobot* : *integer*) $\rightarrow$ **boolean**
{ true jika simpul ke-k mengarah ke goal node, false jika tidak }

Algoritma:
return (($Wt + sisabobot \geq m$) **and** ($Wt = m$ **or** $Wt + w[k+1] \leq m$))

```
procedure SumOfSubsets(input k : integer,  Wt : integer, sisabobot : integer)
{ Mencari semua kombinasi himpunan bagian yang jumlahnya sama dengan m
  Masukan: Wt = jumlah bobot sampai simpul ke-k, sisabobot = jumlah bobot dari k+1 sampai n
  Luaran: semua himpunan bagian yang jumlah bobotnya sama dengan m
}

Algoritma:
    if  promising(k, Wt, sisabobot)  then
       if   Wt = m  then
          write(x[1], x[2], …, x[n])
       else
          x[k+1] = 1          { masukkan w[k+1] }
          SumOfSubsets(k+1, Wt + w[k+1], sisabobot – w[k+1])

          x[k+1] = 0           { w[k+1] tidak dimasukkan  }
          SumOfSubsets(k+1, Wt, sisabobot – w[k+1])
       endif
    endif
```

Program C++ untuk persoalan *Sum of Subset*

```
// Program Sum of Subset Problem

#include <iostream>
using namespace std;

int x[10], w[10];
int N, m;

bool promising(int k, int W, int sisabobot)
{
    return ((W + sisabobot >= m) && (W == m || W + w[k+1] <= m));
}
```

```
void sumofsubsets(int k, int Wt, int sisabobot) {
  int j;

  if (promising(k, Wt, sisabobot)){
      if (Wt==m) {
          for(j=1;j<=N;j++)
             if (x[j]==1) cout << w[j] << " ";
          cout << endl;
      }
      else {
        x[k+1] = 1;
        sumofsubsets(k+1, Wt + w[k+1], sisabobot - w[k+1]);

        x[k+1] = 0;
        sumofsubsets(k+1, Wt, sisabobot - w[k+1]);
      }
  }
}
```

```
int main() {
 int j, total;

 N = 4;
 w[1] = 7; w[2] = 11; w[3] = 13; w[4] = 24;  //semua bobot sudah terurut menaik
 m = 31;
 cout << "N = " << N << endl;
 cout << "m = " << m << endl;
 total = 0;
 for (j=1;j<=N; j++) {
    cout << "w[" << j << "] = " << w[j] << endl;
    total = total + w[j];
 }
 cout << "Solusi:" << endl;
 sumofsubsets(0, 0, total);
 return 0;
}
```

Command Prompt

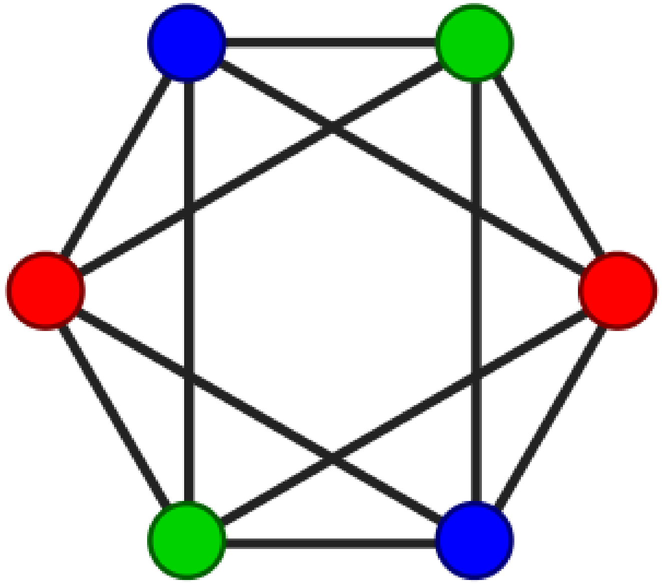
```
D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>g++ sumofsubset.cpp

D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>a
N = 4
m = 31
w[1] = 7
w[2] = 11
w[3] = 13
w[4] = 24
Solusi:
7 11 13
7 24

D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>
```

3. Pewarnaan Graf (*Graph Colouring)*

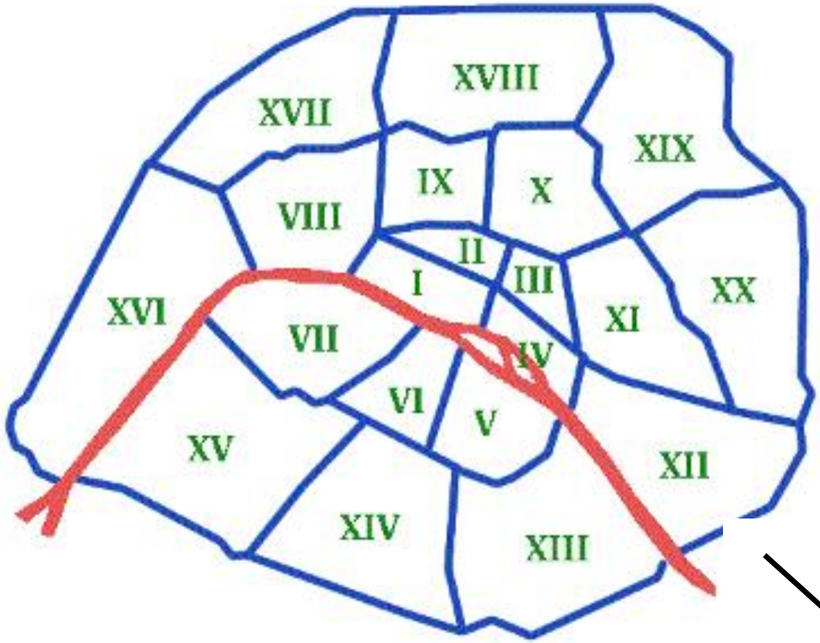
Persoalan:

Diberikan sebuah graf *G* dengan *n* buah simpul dan disediakan *m* buah warna. Bagaimana mewarnai seluruh simpul di dalam graf *G* sedemikian sehingga tidak ada dua buah simpul bertetangga memiliki warna sama?

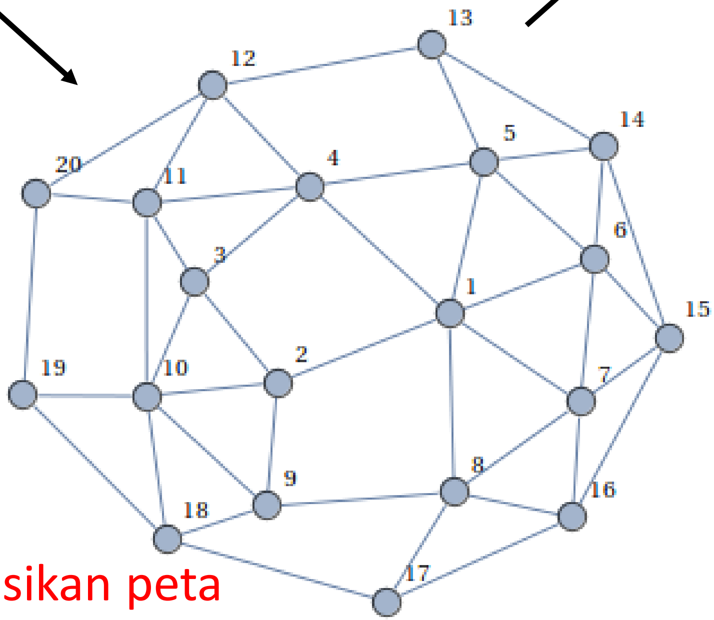
(Perhatikan juga bahwa tidak seluruh warna harus dipakai)



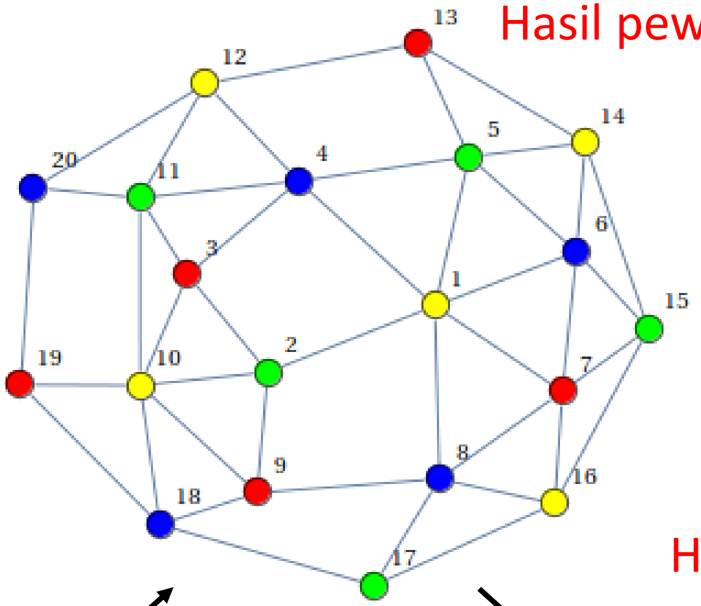
Contoh aplikasi pewarnaan graf: pewarnaan peta



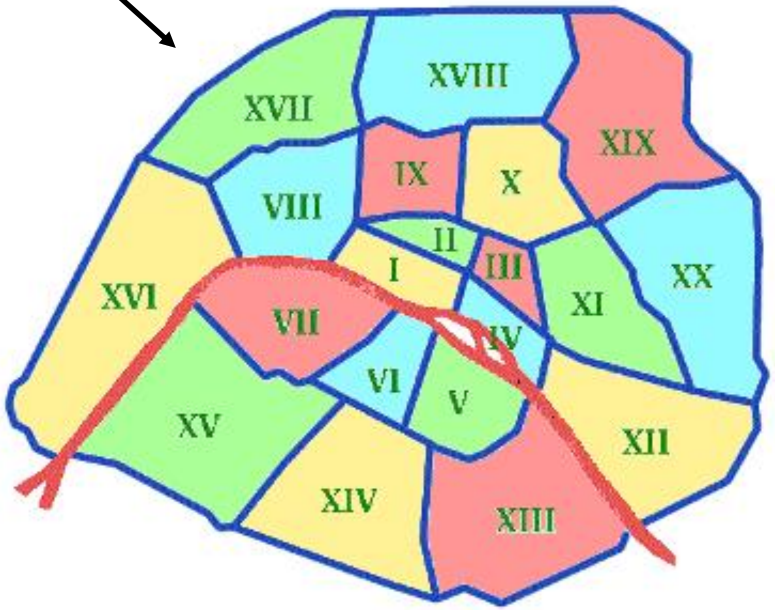
Peta wilayah di kota Paris



Graf yang merepresentasikan peta

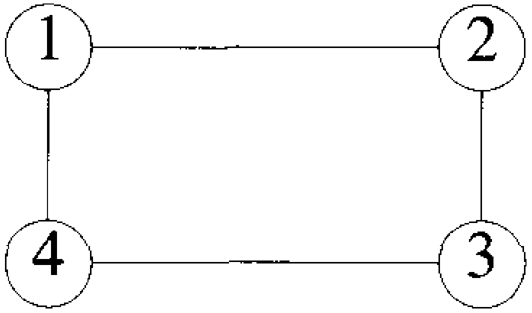


Hasil pewarnaan graf

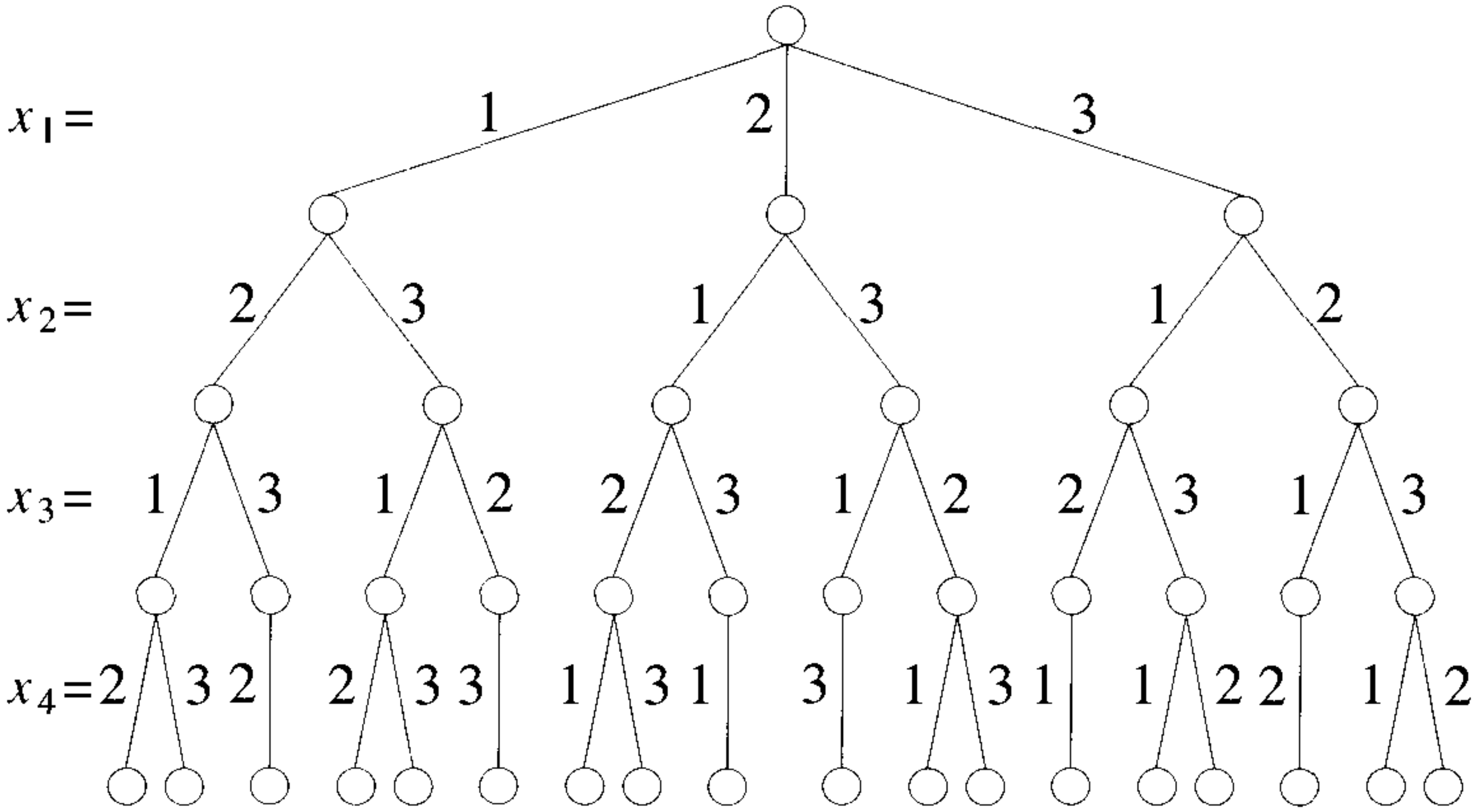


Hasil pewarnaan peta

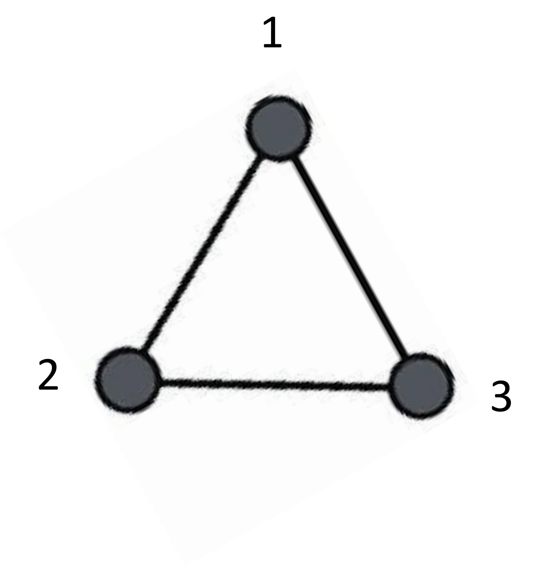
Tinjau untuk n = 4 dan m = 3.

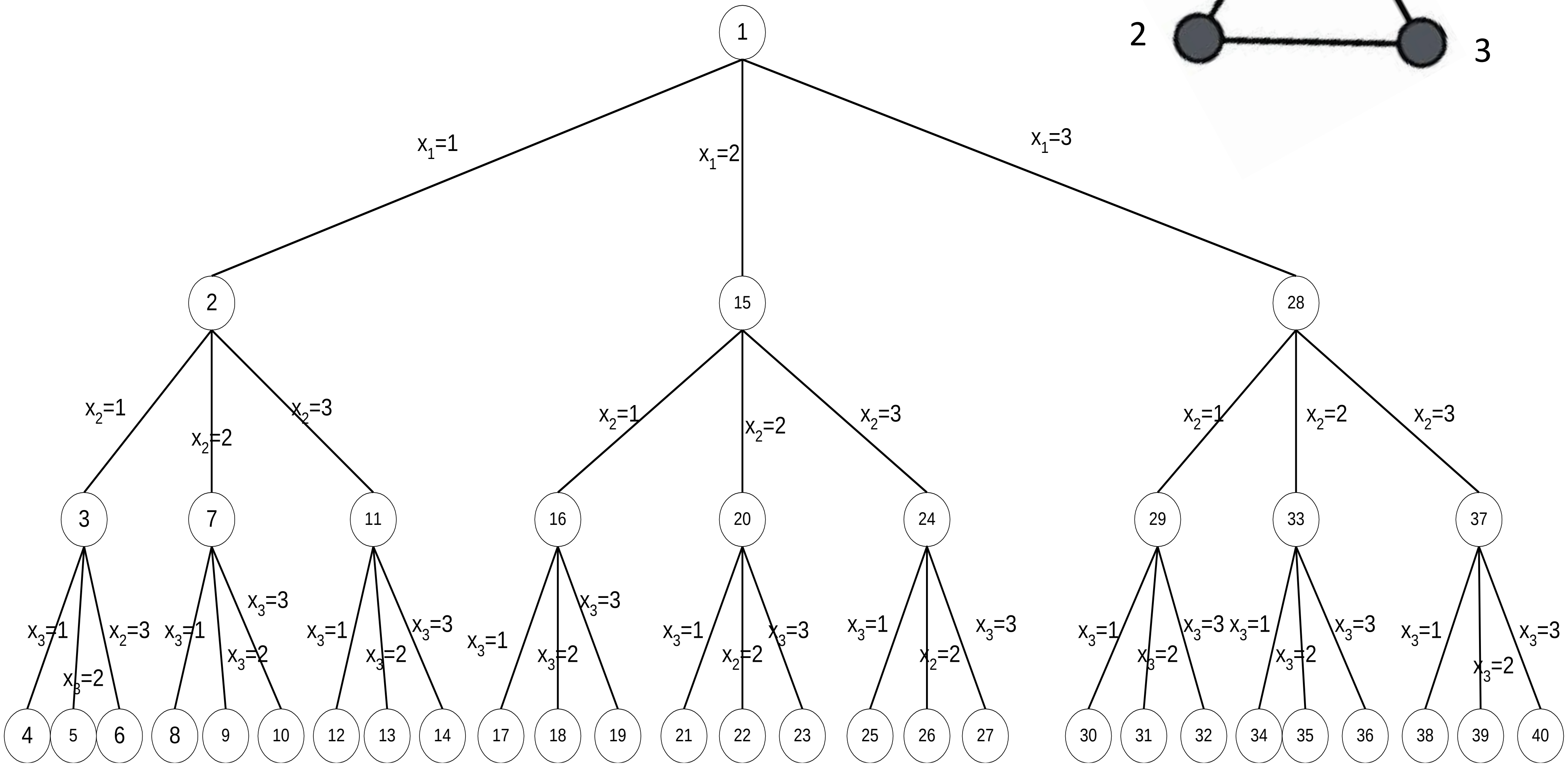


Misalkan warna dinyatakan dengan angka 1, 2, …, m dan solusi dinyatakan sebagai vektor X dengan n-*tuple*: $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in \{1, 2, …, m\}$



Tinjau untuk *n* = 3 dan *m* = 3.





- Solusi dinyatakan sebagai vector x = (x[1], x[2], …, x[n])

  $x[i]$ adalah warna untuk simpul ke-i

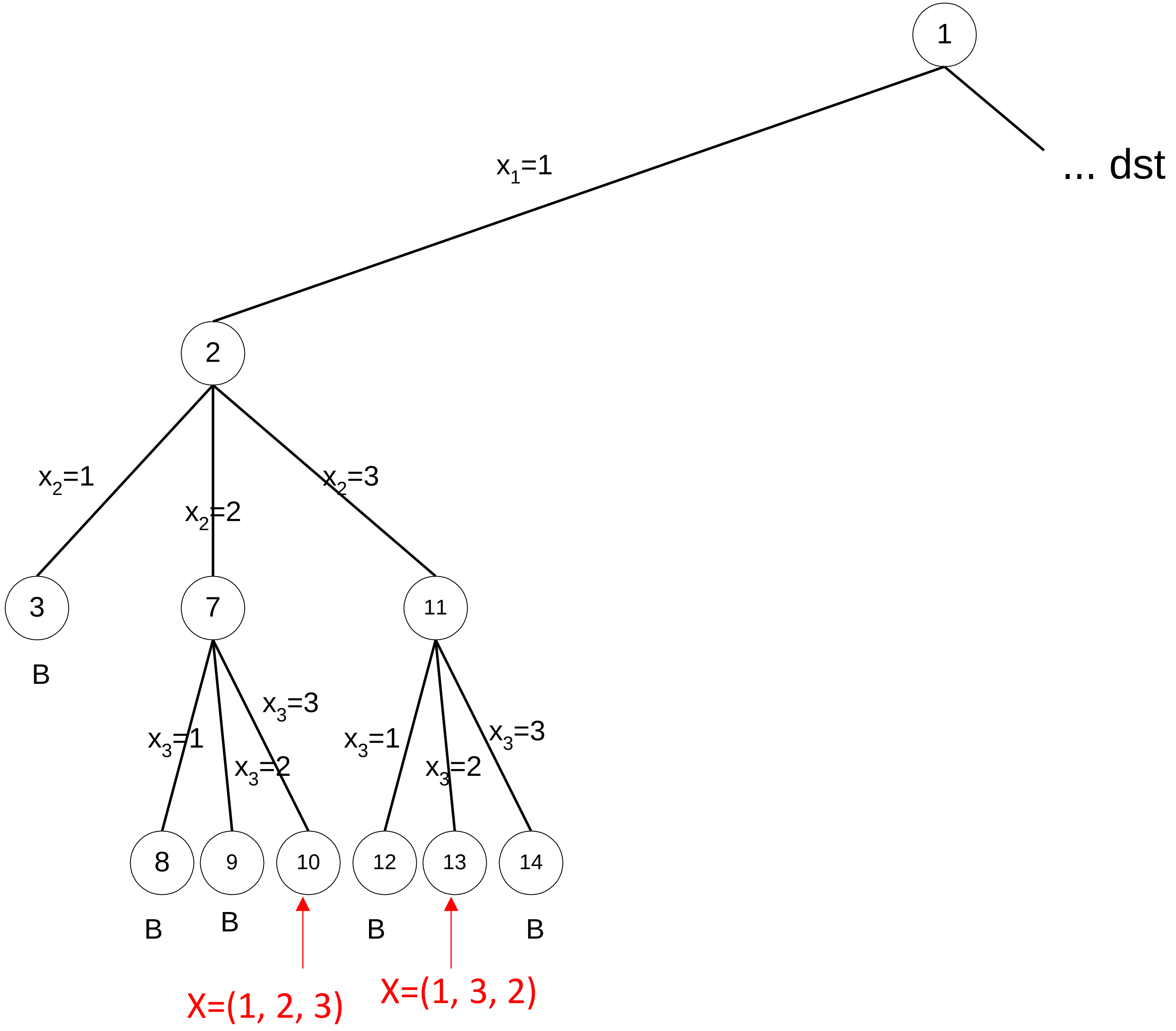
- Fungsi pembangkit T(k):

  $x[k] \leftarrow x[k] \leftarrow (x[k]+1) \bmod (m+1)$

- Fungsi pembatas B:

  - true jika x[k] tidak sama dengan warna simpul-simpul tetangganya
  - false jika ya

Pencarian solusi secara *backtracking*:



Algoritma Runut-balik Untuk Pewarnaan Graf

- Masukan:

  1. Matriks ketetanggaan G[1..n, 1..n]

     G[i,j] = true   jika ada sisi (i,j)

     G[i,j] = false jika tidak ada sisi (i,j)

  2. Warna

     Dinyatakan dengan integer 1, 2, ...,m

- Luaran:

  1. Tabel X[1..n], yang dalam hal ini, x[i] adalah warna untuk simpul i.

- Algoritma:

  1. Inisialisasi x[1..n] dengan 0 sebagai berikut:

```
for i←1 to n do
    x[i]←0
endfor
```

2. Panggil prosedur *PewarnaanGraf*(1)

```
procedure PewarnaanGraf(input k : integer)
{ Mencari semua solusi solusi pewarnaan graf; algoritma rekursif
  Masukan: k adalah nomor simpul graf.
  Luaran: jika solusi ditemukan, solusi dicetak ke piranti keluaran
}
Deklarasi
  stop : boolean

Algoritma:
  stop ← false
  while not stop do
      WarnaiSimpul(k)      {coba isi x[k] dengan sebuah warna}
      if  x[k] = 0  then        {tidak ada warna lagi yang bisa dicoba,  habis}
          stop ← true
      else
          if  k = n  then                          {apakah seluruh simpul sudah diwarnai?}
              write(x[1], x[2], …, x[k])      { cetak solusi }
          else
              PewarnaanGraf(k + 1)        {warnai simpul berikutnya}
       endif
    endif
  endwhile
```

```
procedure WarnaiSimpul(input k : integer)
{ Menentukan warna untuk simpul k
 Masukan: simpul ke-k
 Luaran: nilai untuk x[k]
}
Deklarasi
    stop, keluar : boolean
    j : integer

Algoritma:
  stop ← false
  while not stop do
       x[k] ← (x[k]+1) mod (m+1)      { bangkitkan warna untuk simpul ke-k}
       if  x[k] = 0  then                    {semua warna telah terpakai}
           stop ← true
       else
           {periksa warna simpul-simpul tetangganya}
           …
```

```
      for  j ← 1 to n do
         if  (G[k, j])       {jika ada sisi dari simpul k ke simpul j}
             and                {dan}
           (x[k] = x[j])    {warna simpul k = warna simpul j }
         then
            exit loop      {keluar dari kalang}
         endif
      endfor

      if  j = n+1 {seluruh simpul tetangga telah diperiksa dan
                  ternyata warnanya berbeda dengan x[k] }
      then
         stop ← true      {x[k] sudah benar, keluar dari kalang}
      endif

   endif
endwhile
```

Kompleksitas waktu algoritma PewarnaanGraf

- Pohon ruang status yang untuk persoalan pewarnaan graf dengan *n* simpul dan *m* warna adalah pohon *m-ary* dengan tinggi *n*.

- Tiap simpul pada aras *i* mempunyai *m* anak, yang bersesuaian dengan *m* kemungkinan pengisian $x[i]$, $1 \leq i \leq n$.

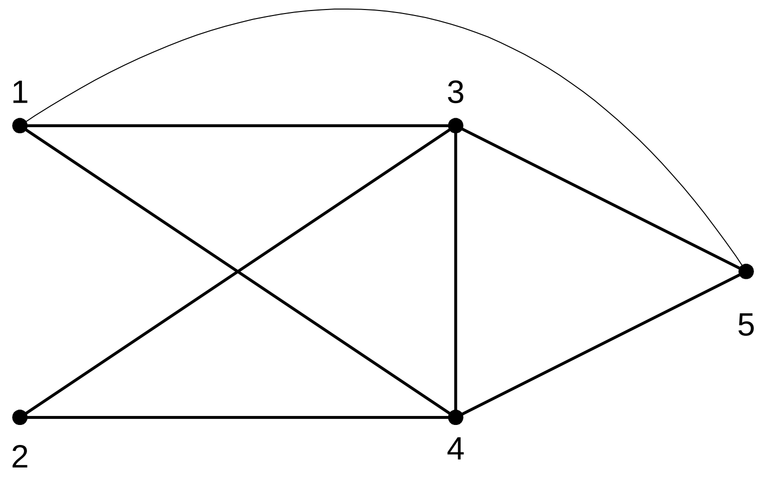
- Simpul pada aras *n* adalah simpul daun. Jumlah simpul internal (simpul bukan daun) adalah $\sum_{i=0}^{n-1} m^i$

- Tiap simpul internal menyatakan pemanggilan prosedur *WarnaiSimpul* yang membutuhkan waktu dalam $O(mn)$. Total kebutuhan waktu algoritma *PewarnaanGraf* adalah

$$\sum_{i=1}^{n} m^i n = \frac{n(m^{n+1}-1)}{(m-1)} = O(nm^n)$$

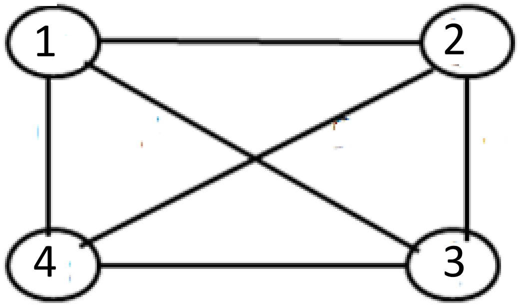
4. Sirkuit Hamilton

- Persoalan: Diberikan graf terhubung $G = (V, E)$ dengan n buah simpul. Temukan semua sirkuit (atau siklus) Hamilton dalam graf itu. Sirkuit Hamilton adalah perjalanan yang mengunjungi semua simpul tepat satu kali dan kembali lagi ke simpul awal.
- Contoh:



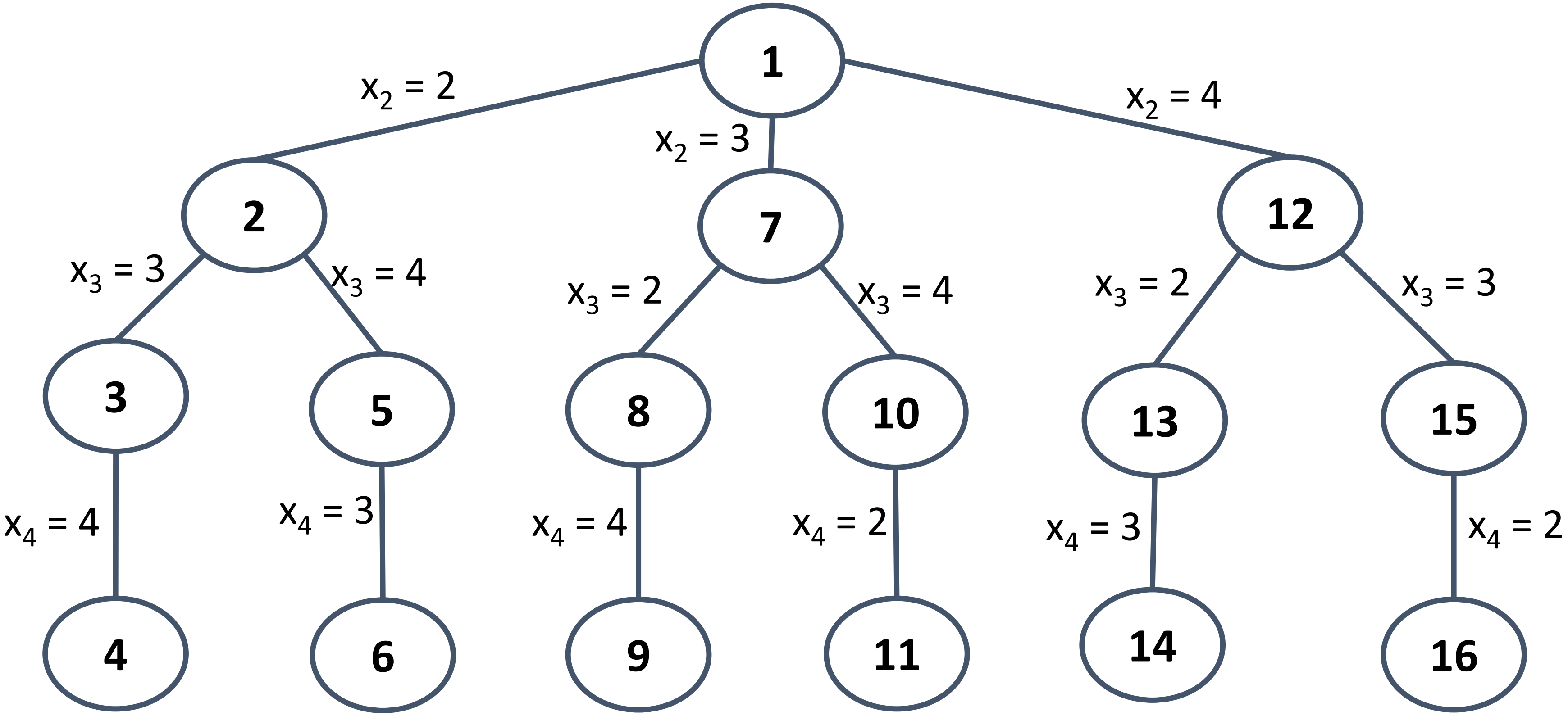
Sirkuit Hamiltonnya adalah (dimulai dari simpul 1:

1, 3, 2, 4, 5, 1
1, 4, 2, 3, 5, 1
1, 5, 4, 2, 3, 1
1, 5, 3, 2, 4, 1



Graf G

Pohon ruang status berdasarkan graf G
(sirkuit Hamilton dimulai dari 1)



Algoritma Runut-balik Sirkuit Hamilton

Masukan: Matriks G[1..n, 1..n] { *n* = jumlah simpul graf}
G[i,j] = true jika ada sisi dari simpul i ke simpul j
G[i,j] = false jika tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j

Luaran: Vektor X[1..n], yang dalam hal ini, x[i] adalah simpul i di dalam sirkuit Hamilton.

Algoritma:

1. Inisialisasi x[2..n] dengan 0, sedangkan x[1] diisi dengan 1 (karena diasumsikan siklus Hamilton dimulai dari simpul 1) sebagai berikut:.

   $x[1] \leftarrow 1$
   for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
      $x[i] \leftarrow 0$
   endfor

2. Panggil prosedur *SirkuitHamilton*(2)

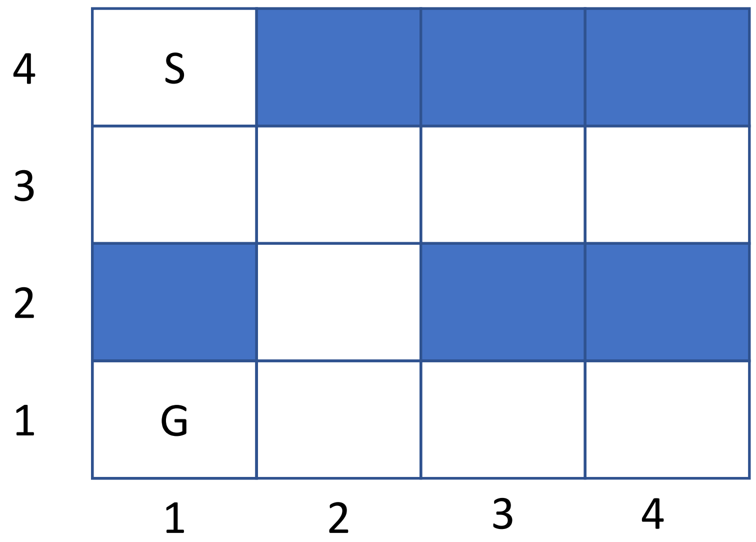
```
procedure SirkuitHamilton(input  k : integer)
{ Menemukan semua sirkuit Hamilton pada graf terhubung. Sirkuit dimulai  dari simpul 1
Masukan: k adalah nomor simpul graf
Luaran: jika solusi ditemukan, solusi dicetak ke piranti keluaran
}
Deklarasi
  stop : boolean

Algoritma:
  stop ← false
  while not stop do
     {tentukan semua nilai untuk x[k] }
     SimpulBerikutnya(k)    {isi x[k] dengan simpul berikutnya}
     if  x[k] = 0  then           {tidak ada simpul lagi, habis}
        stop←true
     else
        if  k = n  then                    {seluruh simpul sudah dikunjungi}
           write(x[1], x[2], …, x[n])  {cetak sirkuit Hamilton}
       else
          SirkuitHamilton(k+1)    {cari simpul berikutnya}
       endif
    endif
  endwhile
```

```
procedure SimpulBerikutnya(input k : integer)
{ Menentukan simpul berikutnya untuk membentuk sirkuit Hamilton
Masukan: k
Luaran: nilai untuk x[k]
Keterangan: x[1], x[2], ..., x[k-1] adalah lintasan yang terdiri atas k – 1 simpul berbeda.
x[k] berisi simpul berikutnya dengan nomor yang lebih tinggi yang:
              (i)  belum terdapat di dalam { x[1], x[2], ..., x[k-1]}
              (ii) terhubung oleh sebuah sisi ke x[k-1]
Jika tidak memenuhi kedua kondisi itu, maka x[k] = 0. Jika k = n,  maka harus diperiksa apakah x[k]
terhubung ke x[1] }
}
Deklarasi
    stop, sama : boolean
    j : integer

Algoritma:
   stop ← false
   while not stop do
      x[k] ← (x[k] + 1) mod (n + 1);       {pembangkitan simpul berikutnya}
      if  x[k] = 0 then
         stop←true
      else
```

```
      if  G[x[k – 1], x[k]]    {ada sisi dari x[k] ke x[k-1]}  then
        { periksa apakah x[k] berbeda dengan simpul-simpul x[1],  x[2], ..., x[k-1] }
        sama ← false
        j←1
        while (j ≤ k – 1) and (not sama) do
           if  x[j] = x[k] then   sama ← true  else  j ← j + 1 endif
        endwhile
        { j > k – 1  or sama }

        if  not sama {berarti simpul x[k] berbeda} then
           if  (k < n) {belum semua simpul dikunjungi}
                        or          { atau }
                  ((k = n)  and (G[x[n], 1]))   {ada sisi dari x[n] ke x[1]}   then
              stop ← true
           endif
        endif
      endif
    endif
  endwhile
```

Soal UAS 2019

Terdapat sebuah labirin sederhana seperti pada Gambar 1. Titik S (Start) berada pada posisi (1,4), dan titik G (*Goal*) berada pada posisi (1,1). Sel yang diarsir adalah sel yang tidak bisa dilewati.Persoalan yang akan diselesaikan adalah menemukan jalur dari S menuju G dengan menggunakan Algoritma Backtracking. Jarak dari satu titik ke titik berikutnya adalah 1 (satu) satuan jarak. Operasi yang bisa dilakukan adalah bergerak *east*(posisi x bertambah 1), *south*(posisi y berkurang 1), *west*(posisi x berkurang 1), dan *north*(posisi y bertambah 1). Jika diperlukan, urutan prioritas operasi yang dilakukan adalah *east*, *south*, *west*, *north*.



Buatlah pohon pencarian jalur ke titik Goal(1,1)dengan menggunakan Algoritma *Backtracking*, dimulai dari titik (1,4). Tulislah nomor urutan pembangkitan pada setiap simpul pohon pencarian. Pencarian dihentikan ketika sudah mencapai titik G. Kemudian tuliskan hasil urutan aksiyang dilakukan untuk mencapai G dari S.

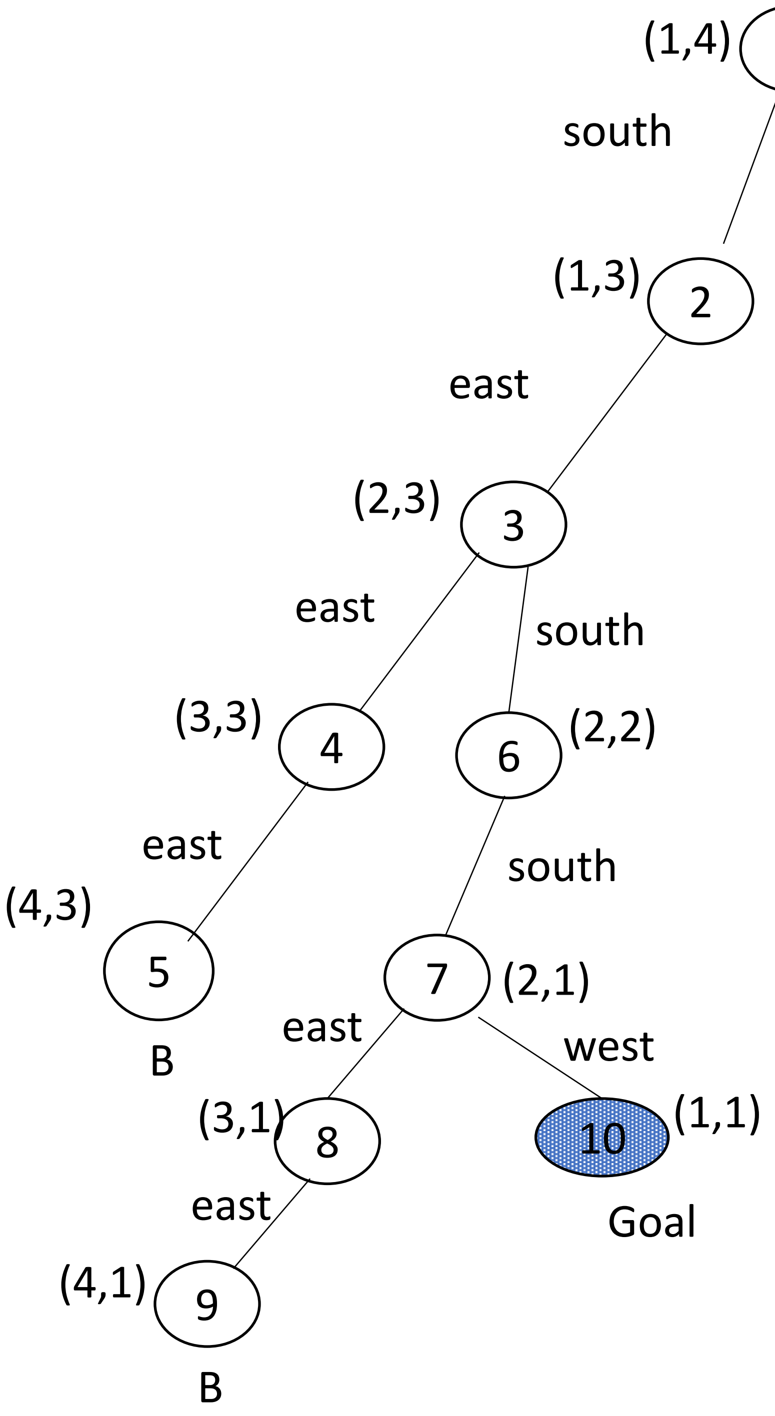
Penyelesaian:

- Solusi dinyatakan sebagai vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$

  $x_i \in \{east, south, west, north\}$

- Fungsi T(.) mencoba meng-assign x_i dengan urutan *east*, *south*, *west*, *north*

- Fungsi pembatas B memeriksa apakah koordinat sel sekarang belum mencapai batas labirin ($1 < x < 4$ dan $1 < y < 4$) atau sudah tidak bisa berpindah lagi ke mana-mana. Jika *true*, ekspansi simpul, jika *false*, matikan simpul.



Urutan aksi: south – east – south – south – west

Solusi: X = (south, east, south, south, west)