Algoritma *Divide and Conquer*

(Bagian 3)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

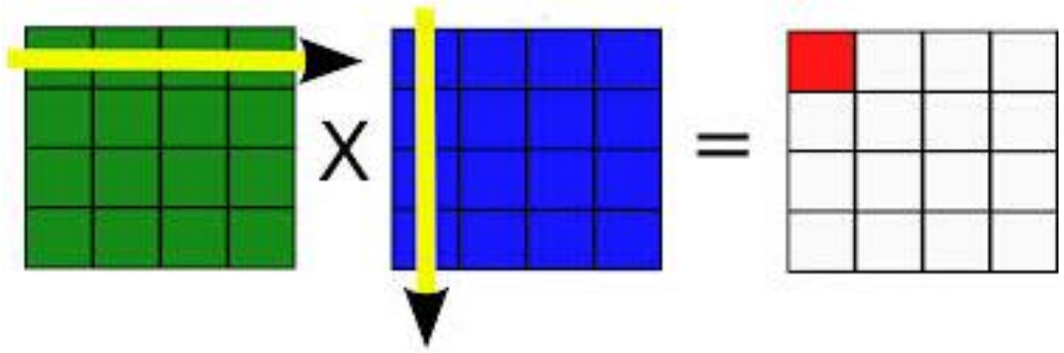
Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
2024

7. Perkalian Matriks

- Misalkan *A* dan *B* dua buah matrik berukuran $n \times n$.

- Perkalian matriks: $C = A \times B$, matriks C juga berukuran $n \times n$



Elemen-elemen hasilnya: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Elemen-elemen hasilnya: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Penyelesaian secara *Brute Force*

Algoritma *brute force*: kalikan setiap vektor baris *i* dari matriks A dengan setiap vektor kolom *j* dari matriks *B*.

```
function KaliMatriks(A, B : Matriks,  n : integer)  → Matriks
{ Mengalikan matriks A dan B yang berukuran n × n, menghasilkan matriks C yang juga berukuran n × n }

Deklarasi
   i, j, k : integer

Algoritma:
   for  i←1 to n do
      for j←1 to n do
         C[i, j]←0    { inisialisasi penjumlah }
         for k ← 1 to n do
              C[i, j]←C[i, j] + A[i, k]*B[k, j]
          endfor
      endfor
   endfor
   return C
```

Kompleksitas waktu algoritma: $O(n^3)$

Penyelesaian dengan *Divide and Conquer*

Matriks A dan B dibagi menjadi 4 buah matriks bujur sangkar. Masing-masing matriks bujur sangkar berukuran $n/2 \times n/2$:

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 \\ C21 & C22 \end{bmatrix}$$

$$\qquad\quad \mathbf{A} \qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{B} \qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{C}$$

Elemen-elemen matriks C adalah:

$$C11 = A11 \cdot B11 + A12 \cdot B21$$
$$C12 = A11 \cdot B12 + A12 \cdot B22$$
$$C21 = A21 \cdot B11 + A22 \cdot B21$$
$$C22 = A21 \cdot B12 + A22 \cdot B22$$

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A11} & \mathrm{A12} \\ \hline \mathrm{A21} & \mathrm{A22} \end{array}\right]$$

$$\mathrm{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B11} & \mathrm{B12} \\ \hline \mathrm{B21} & \mathrm{B22} \end{array}\right]$$

$$\mathrm{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{C11} & \mathrm{C12} \\ \hline \mathrm{C21} & \mathrm{C22} \end{array}\right]$$

Contoh 11. Misalkan matriks A adalah sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 8 & 16 \\ 21 & 5 & 12 & 10 \\ \hline 5 & 1 & 2 & 3 \\ 45 & 9 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Matriks A dibagi menjadi 4 upa-matriks 2 x 2:

$$A11 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 21 & 5 \end{bmatrix} \quad A12 = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \quad A21 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 45 & 9 \end{bmatrix} \quad A22 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pseudo-code perkalian matriks dengan algoritma *divide and conquer*:

```
function KaliMatriks2(A, B : Matriks, n : integer) → Matriks
{ Memberikan hasil kali matriks A dan B yang berukuran n × n.  }
Deklarasi
   i, j, k : integer
   A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22,  C11, C12, C21, C22 : Matriks

Algoritma:
   if  n = 1  then      { matriks berukuran 1 x 1 atau sebagai scalar }
       return  A * B   { perkalian dua buah scalar biasa }
   else
      Bagi A menjadi A11, A12, A21, dan A22 yang masing-masing berukuran n/2 x n/2
      Bagi B menjadi B11, B12, B21, dan B22 yang masing-masing berukuran n/2 x n/2
      C11 ← KaliMatriks2(A11, B11, n/2) + KaliMatriks2(A12, B21, n/2)
      C12 ← KaliMatriks2(A11, B12, n/2) + KaliMatriks2(A12, B22, n/2)
      C21 ← KaliMatriks2(A21, B11, n/2) + KaliMatriks2(A22, B21, n/2)
      C22 ← KaliMatriks2(A21, B12, n/2) + KaliMatriks2(A22, B22, n/2)
      return C  { C adalah gabungan C11, C12, C13, C14  }
   endif
```

$$C11 = A11 \cdot B11 + A12 \cdot B21$$
$$C12 = A11 \cdot B12 + A12 \cdot B22$$
$$C21 = A21 \cdot B11 + A22 \cdot B21$$
$$C22 = A21 \cdot B12 + A22 \cdot B22$$

Pseudo-code untuk operasi penjumlahan (+):

```
function  Tambah(A, B : Matriks, n : integer) → Matriks
{ Memberikan hasil penjumlahkan dua buah matriks, A dan B, yang berukuran n × n  }

Deklarasi
  i, j, k : integer

Algoritma:
  for  i ← 1 to  n do
     for  j ← 1 to n  do
        C[i, j]  ← A[i, j] + B[i, j]
     endfor
  endfor

   return  C
```

Kompleksitas algoritmanya: $O(n^2)$

$$C11 = A11 \cdot B11 + A12 \cdot B21$$
$$C12 = A11 \cdot B12 + A12 \cdot B22$$
$$C21 = A21 \cdot B11 + A22 \cdot B21$$
$$C22 = A21 \cdot B12 + A22 \cdot B22$$

- Kompleksitas waktu perkalian matriks dengan *divide and conquer*:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 8T(n/2) + cn^2 & ,n > 1 \end{cases}$$

Menurut Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh a = 8, b = 2, d = 2, dan memenuhi $a > b^d$ (yaitu $8 > 2^2$) maka relasi rekurens

$T(n) = 8T(n/2) + cn^2$

memenuhi *case* 3 (jika $a > b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

sehingga

$$T(n) = O(n^{{}^2\log 8}) = O(n^3)$$

- Hasil ini tidak memberi perbaikan kompleksitas dibandingkan dengan algoritma *brute force*.

- Dapatkah kita membuat algoritma perkalian matriks yang lebih baik?

Algoritma Perkalian Matriks Strassen

- Ditemukan oleh Volker Strassen, seorang matematikawan Jerman
- Idenya adalah mengurangi jumlah operasi kali. Operasi kali lebih ‘mahal’ ongkos komputasinya dibandingkan dengan operasi penjumlahan.
- Empat persamaan perkalian upamatriks (*sub-matrix*) terdahulu:

$$
\begin{aligned}
C11 &= A11 \cdot B11 + A12 \cdot B21 \\
C12 &= A11 \cdot B12 + A12 \cdot B22 \\
C21 &= A21 \cdot B11 + A22 \cdot B21 \\
C22 &= A21 \cdot B12 + A22 \cdot B22
\end{aligned}
$$

  terdapat 8 operasi perkalian (·) dan 4 operasi penjumlahan (+) upamatriks.

- Strassen memanipulasi empat persamaan di atas sedemikian rupa sehingga jumlah operasi kali berkurang menjadi 7 (dengan konsekuensi operasi penjumlahan menjadi bertambah).

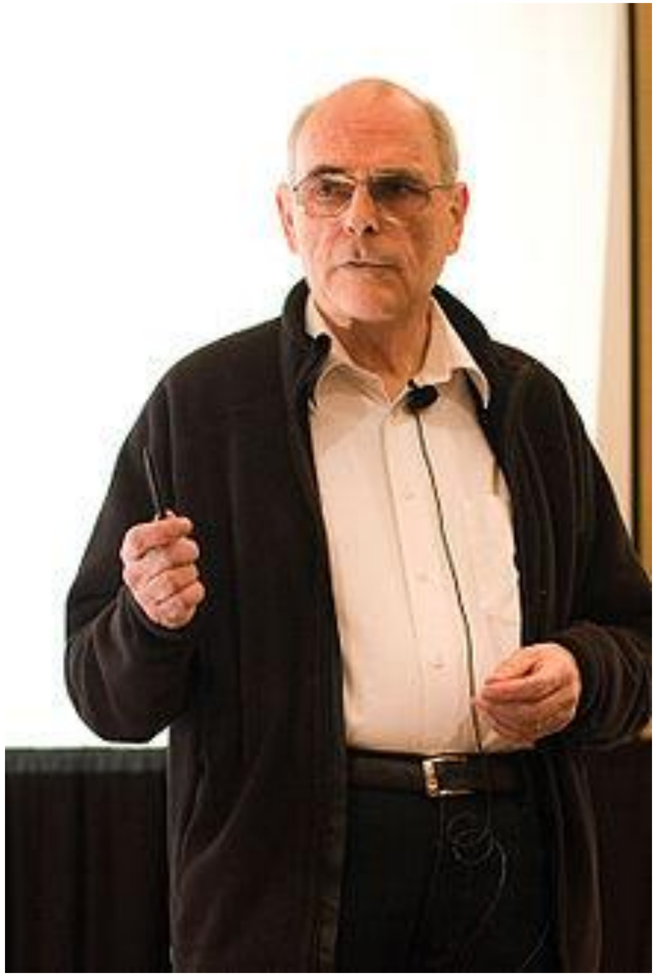
- Caranya adalah melakukan perhitungan intermediate sebagai berikut:

$$M1 = (A12 - A22)(B21 + B22)$$
$$M2 = (A11 + A22)(B11 + B22)$$
$$M3 = (A11 - A21)(B11 + B12)$$
$$M4 = (A11 + A12)B22$$
$$M5 = A11\,(B12 - B22)$$
$$M6 = A22\,(B21 - B11)$$
$$M7 = (A21 + A22)B11$$

maka,

$$C11 = M1 + M2 - M4 + M6$$
$$C12 = M4 + M5$$
$$C21 = M6 + M7$$
$$C22 = M2 - M3 + M5 - M7$$

Terdapat 7 operasi x dan 18 operasi +



- **Volker Strassen** (born April 29, 1936) is a German mathematician, a professor emeritus in the department of mathematics and statistics at the University of Konstanz.

- In 2008 he was awarded the Knuth Prize for "seminal and influential contributions to the design and analysis of efficient algorithms."[5]

Sumber: Wikipedia

```
function KaliMatriksStrassen(A, B : Matriks, n : integer) → Matriks
{ Memberikan hasil kali matriks A dan B yang berukuran n × n.  }
Deklarasi
   i, j, k : integer
   A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22,  C11, C12, C21, C22, M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 : Matriks

Algoritma:
   if  n = 1  then     { matriks berukuran 1 x 1 atau sebagai scalar }
      return  A * B   { perkalian dua buah scalar biasa }
   else
      Bagi A menjadi A11, A12, A21, dan A22 yang masing-masing berukuran n/2 x n/2
      Bagi B menjadi B11, B12, B21, dan B22 yang masing-masing berukuran n/2 x n/2
      M1 ← KaliMatriksStrassen(A12 – A22, B21 + B22, n/2)
      M2 ← KaliMatriksStrassen (A11 + A22, B11 + B22 , n/2)
      M3 ← KaliMatriksStrassen (A11 – A21, B11 + B12 , n/2)
      M4 ← KaliMatriksStrassen (A11 + A12, B22 , n/2)
      M5 ← KaliMatriksStrassen (A11, B12 – B22 , n/2)
      M6 ← KaliMatriksStrassen (A22, B21 – B11 , n/2)
      M7 ← KaliMatriksStrassen (A21 + A22, B11 , n/2)
      C11 ←  M1 + M2 – M4 + M6
      C12 ←  M4 + M5
      C21 ←  M6 + M7
      C22 ← M2 – M3 + M5 – M7
      return C  { C adalah gabungan C11, C12, C13, C14  }
   endif
```

- Kompleksitas algoritmanya menjadi:

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 7T(n/2) + cn^2 & , n > 1 \end{cases}$$

Bila diselesaikan dengan Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh $a = 7$, $b = 2$, $d = 2$, dan memenuhi $a > b^d$ (yaitu $7 > 2^2$) maka relasi rekurens

$T(n) = 7T(n/2) + cn^2$

memenuhi *case* 3 (jika $a > b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

sehingga

$T(n) = O(n^{{}^2\log 7}) = O(n^{2.81})$

- Lebih baik dari perkalian matriks secara *divide and conquer* sebelumnya yang $O(n^3)$

8. Perkalian Bilangan Bulat yang Besar

- Bilangan bulat yang besar (*big number*) adalah bilangan bulat dengan panjang *n* angka atau *n* bit.

  Contoh: 56438901814901432987152, 100001101101010010011001010 1, …

- Bahasa-bahasa pemrograman memiliki keterbatasan dalam merepresentasikan bilangan bulat yang besar.
- Dalam Bahasa C misalnya, tipe bilangan bulat hanya `char` (8 bit), `int`, (16 bit) dan `long` (32 bit).
- Untuk bilangan bulat yang lebih dari 32 bit, kita harus membuat tipe sendiri dan mendefinisikan primitif operasi-operasi aritmetika di dalamnya (+, –, *, /, dll)

- Di sini hanya akan dibahas bagaimana algoritma melakukan operasi perkalian bilangan bulat yang besar.

  Contoh: $1765420875208345186 \times 754711199736308361736432$ = ?

- **Persoalan:** Misalkan bilangan bulat X dan Y yang panjangnya n angka (atau n bit):

$$X = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

$$Y = y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$$

Hitunglah hasil kali X dengan Y.

Contoh 12. Misalkan,

$X = 1234 \quad (n = 4)$
$Y = 5678 \quad (n = 4)$

Cara klasik mengalikan X dan Y (*brute force*):

$$
\begin{array}{rrl}
X \times Y = & 1234 & \\
& \underline{5678} \times & \\
& 9872 & \\
& 8368 & \\
& 7404 & \\
& \underline{6170} + & \\
& 7006652 & (\text{ 7 angka})
\end{array}
$$

Pseudo-code algoritma perkalian bilangan besar secara *brute force*:

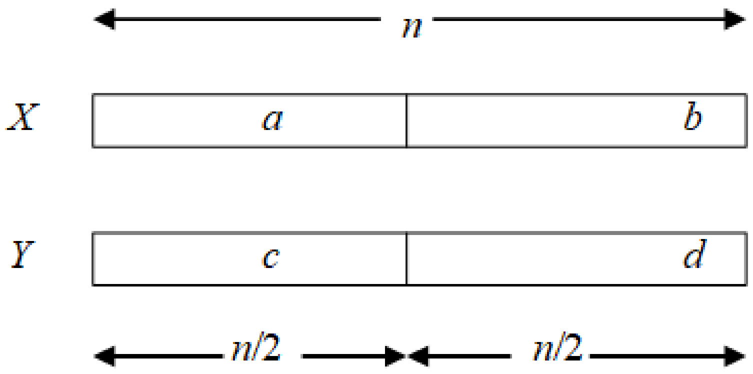
function *Kali1*(*X*, *Y* : *LongInteger*, *n* : **integer**) → *LongInteger*
{ Memberikan hasil perkalian X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma brute force. }

Deklarasi
  temp, *AngkaSatuan*, *AngkaPuluhan* : **integer**

Algoritma:
  for setiap angka y_i dari $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$ **do**
    AngkaPuluhan ← 0
    for setiap angka x_j dari $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ **do**
      temp ← $x_j * y_i$
      temp ← *temp* + *AngkaPuluhan*
      AngkaSatuan ← *temp* **mod** 10
      AngkaPuluhan ← *temp* **div** 10
      write(*AngkaSatuan*)
    endfor
  endfor
  Z ← Jumlahkan semua hasil perkalian dari atas ke bawah
  return *Z*

Kompleksitas algoritma: O(n^2)

Penyelesaian dengan algoritma *divide and conquer*



$a = X \text{ div } 10^{n/2}$ $\quad$ $b = X \bmod 10^{n/2}$

$c = Y \text{ div } 10^{n/2}$ $\quad$ $d = Y \bmod 10^{n/2}$

X dan *Y* dapat dinyatakan dalam *a*, *b*, *c*, dan *d* sebagai

$X = a \cdot 10^{n/2} + b$ dan $Y = c \cdot 10^{n/2} + d$

Perkalian *X* dengan *Y* dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
X \cdot Y &= (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d) \\
&= ac \cdot 10^{n} + ad \cdot 10^{n/2} + bc \cdot 10^{n/2} + bd \\
&= ac \cdot 10^{n} + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd
\end{aligned}
$$

Contoh 13: Misalkan n = 6 dan X = 346769 dan Y = 279431, maka

$$X = 346769 \rightarrow a = 346,\ b = 769 \rightarrow \ \mathrm{X} = 346 \cdot 10^3 + 769$$
$$Y = 279431 \rightarrow c = 279,\ \ d = 431 \rightarrow \ \mathrm{Y} = 279 \cdot 10^3 + 431$$

Perkalian X dengan Y dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (346 \cdot 10^3 + 769) \cdot (279 \cdot 10^3 + 431) \\ &= (346)(279) \cdot 10^6 + (346)(431) \cdot 10^3 + (769)(279) \cdot 10^3 + (769)(431) \\ &= \underbrace{(346)(279)}_{\text{perkalian bilangan besar}} \cdot 10^6 + (\underbrace{(346)(431)}_{\text{perkalian bilangan besar}} + \underbrace{(769)(279)}_{\text{perkalian bilangan besar}}) \cdot 10^3 + \underbrace{(769)(431)}_{\text{perkalian bilangan besar}} \end{aligned}$$

Pseudo-code algoritma perkalian bilangan besar dengan algoritma *divide and conquer*:

function *Kali2*(*X*, *Y* : *LongInteger*, *n* : **integer**) → *LongInteger*
{ Memberikan hasil perkalian X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma divide and conquer. }

Deklarasi
  a, *b*, *c*, *d* : *LongInteger*
  s : **integer**

Algoritma:
  if $n = 1$ then
    return $X * Y$ *{ perkalian skalar biasa }*
  else
    $s \leftarrow n$ **div** 2   *{ bagidua pada posisi s }*
    $a \leftarrow X$ **div** 10^s
    $b \leftarrow X$ **mod** 10^s
    $c \leftarrow Y$ **div** 10^s
    $d \leftarrow Y$ **mod** 10^s
    return $Kali2(a, c, s)*10^{2s} + Kali2(b, c, s)*10^s + Kali2(a, d, s)*10^s + Kali2(b, d, s)$
  endif

Kali2(*a*, *c*, *s*)*10^{2s} + *Kali2*(*b*, *c*, *s*)*10^{s} + *Kali2*(*a*, *d*, *s*)*10^{s} + *Kali2*(*b*, *d*, *s*)

- Kompleksitas algoritma *Kali2*:

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 4T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Catatan: Menghitung 10^s dan 10^{2s} tidak perlu dilakukan dengan memangkatkan 10 sebanyak s kali atau 2s kali, tetapi cukup dilakukan dengan menambahkan 0 sebanyak s kali atau 2s kali

- Dengan menggunakan Teorema Master (tunjukkan!), diperoleh:

$T(n) = O(n^2)$.

- Ternyata, perkalian dengan algoritma *Divide and Conquer* seperti di atas belum memperbaiki kompleksitas waktu algoritmanya, sama seperti perkalian secara *brute force*.
- Adakah algoritma perkalian yang lebih baik?

Perbaikan: Algoritma Perkalian Karatsuba

- Ditemukan Anatolii Alexeevitch Karatsuba, seorang matematikawan Rusia pada tahun 1962

- Idenya sama seperti pada perkalian matriks Strassen, yaitu dengan mengurangi jumlah operasi kali.

- Persamaan perkalian *X* dan *Y* terdahulu:

$$X \cdot Y = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$$

  terdapat 4 operasi perkalian dan 3 operasi penjumlahan bilangan besar.

- Karatsuba memanipulasi persamaan di atas sedemikian rupa sehingga jumlah operasi kali berkurang menjadi 3 (dengan konsekuensi operasi penjumlahan menjadi bertambah).

Misalkan

$$r = (a + b)(c + d) = ac + (ad + bc) + bd$$

maka,

$$(ad + bc) = r - ac - bd = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

Dengan demikian, perkalian X dan Y dimanipulasi menjadi

$$X \cdot Y = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$$

$$= \underbrace{ac}_{p} \cdot 10^n + \{\underbrace{(a + b)(c + d)}_{r} - \underbrace{ac}_{p} - \underbrace{bd}_{q}\} \cdot 10^{n/2} + \underbrace{bd}_{q}$$

Sekarang hanya terdapat tiga operasi kali, yaitu p, q, dan r

Pseudo-code algoritma perkalian bilangan besar dengan algoritma Karatsuba:

function *Kali3*(*X*, *Y* : *LongInteger*, *n* : **integer**) $\rightarrow$ *LongInteger*
{ Memberikan hasil perkalian X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma Karatsuba. }

Deklarasi
  a, *b*, *c*, *d*, *p*, *q*, *r* : *LongInteger*
  s : **integer**

Algoritma:
 if *n* = 1 then
   return *X* * *Y* *{ perkalian skalar biasa }*
 else
   $s \leftarrow n$ **div** 2   *{ bagidua pada posisi s }*
   $a \leftarrow X$ **div** 10^s
   $b \leftarrow X$ **mod** 10^s
   $c \leftarrow Y$ **div** 10^s
   $d \leftarrow Y$ **mod** 10^s
   $p \leftarrow$ *Kali3*(*a*, *c*, *s*)
   $q \leftarrow$ *Kali3*(*b*, *d*, *s*)
   $r \leftarrow$ *Kali3*(*a* + *b*, *c* + *d*, *s*)
   return $p*10^{2s} + (r - p - q)*10^s + q$
 endif

- Kompleksitas algoritmanya:

T(n) = tiga buah perkalian dua integer yang berukuran n/2 + penjumlahan integer berukuran n/2

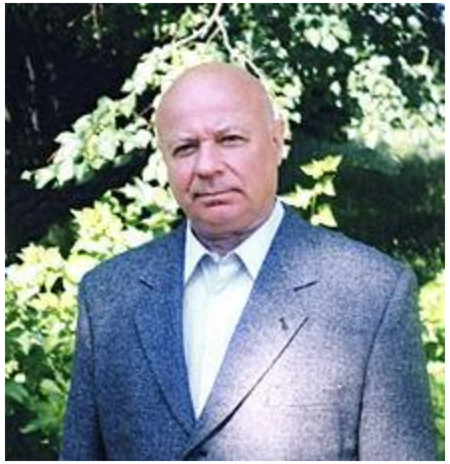
$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 3T(n/2) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

- Bila diselesaikan dengan Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh $a = 3$, $b = 2$, $d = 1$, dan memenuhi $a > b^d$ (yaitu $3 > 2^1$) maka relasi rekurens $T(n) = 3T(n/2) + cn$ memenuhi *case* 3 (jika $a > b^d$), sehingga

  T(n) = O($n^{\,^{2}\log 3}$) = O($n^{1.59}$)

- Ini lebih baik daripada kompleksitas waktu algoritma perkalian sebelumnya (O(n^2)).

Anatolii Alexevich Karatsuba



Anatolii Alexeevitch Karatsuba (Russian: Анато́лий Алексе́евич Карацу́ба; Grozny, January 31, 1937 — Moscow, September 28, 2008) was a Russian mathematician, who authored the first fast multiplication method: the Karatsuba algorithm, a fast procedure for multiplying large numbers. (Sumber: Wikipedia)

9. Perkalian Polinom

- **Persoalan**:

Diberikan dua buah polinom derajat n

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

Hitunglah perkalian $A(x)B(x)$

Contoh 14:

$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

$$B(x) = 3 + 2x + 2x^2$$

$$A(x)B(x) = (1 + 2x + 3x^2)(3 + 2x + 2x^2) = 3 + 8x + 15x^2 + 10x^3 + 6x^4$$

Penyelesaian secara *brute force*

- Misalkan:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i$$

- Maka algoritma *brute force* adalah mengalikan kedua polinom secara langsung:

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k\, x^k \quad \text{, di sini } c_k = \sum_{0 \le i, j \le n, i+j=k} a_i b_j \quad , 0 \le k \le 2n$$

- Dengan menggunakan formula perkalian di atas, ada dua buah kalang (*loop*), kalang pertama dari k = 0 sampai $2n$, kalang kedua dari i = 0 sampai k.

- Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa operasi perkalian adalah $O(n^2)$ dan operasi penjumlahan $O(n^2)$. Kompleksitas algoritma seluruhnya adalah $O(n^2)$.

Penyelesaian dengan algoritma *divide and conquer*

- Bagidua $A(x)$ menjadi $A_0(x)$ dan $A_1(x)$, masing-masing $n/2$ suku

$$A_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}\, x^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$$

$$A_1(x) = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\, x + a_{\lfloor n/2 \rfloor + 2}\, x^2 + \ldots + a_n\, x^{n - \lfloor n/2 \rfloor}$$

maka

$$A(x) = A_0(x) + A_1(x)\, x^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

- Dengan cara yang sama untuk $B(x)$ menjadi $B_0(x)$ dan $B_1(x)$ sedemikian sehingga

$$B(x) = B_0(x) + B_1(x)\, x^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

- Maka, perkalian $A(x)$ dan $B(x)$ ditulis menjadi

$$A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + \{A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x)\}\, x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_1(x)\, B_1(x)\, x^{2\lfloor n/2 \rfloor}$$

$\rightarrow$ Terdapat empat buah perkalian upa-polinom

Contoh 15: $A(x) = 2 + 5x + 3x^2 + x^3 - x^4$ dan $B(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$

Bagidua A(x) menjadi:

$$A_0(x) = 2 + 5x \text{ dan } A_1(x) = 3 + x - x^2 \quad \text{sehingga} \quad A(x) = A_0(x) + A_1(x)\, x^2$$

Bagidua B(x) menjadi:

$$B_0(x) = 1 + 2x \text{ dan } B_1(x) = 2 + 3x + 6x^2 \quad \text{sehingga} \quad B(x) = B_0(x) + B_1(x)\, x^2$$

Maka

$$
\begin{aligned}
A(x)B(x) &= A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))\, x^2 + A_1(x)\, B_1(x)\, x^4 \\
&= (2 + 5x)(1 + 2x) + \{ (2 + 5x)(2 + 3x + 6x^2) + (3 + x - x^2)(1 + 2x) \}\, x^2 + \\
&\quad (3 + x - x^2)(2 + 3x + 6x^2)\, x^4 \\
&= 2 + 9x + 10x^2 + (4 + 16x + 27x^2 + 30x^3 + 3 + 7x + x^2 - 2x^3)\, x^2 + \\
&\quad 6 + 11x + 19x^2 + 3x^3 - 6x^4 \\
&= 2 + 9x + 17x^2 + 23x^3 + 34x^4 + 39x^5 + 19x^6 + 3x^7 - 6x^8
\end{aligned}
$$

$A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))\, x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_1(x)\, B_1(x)\, x^{2\lfloor n/2 \rfloor}$

function *KaliPolinom*(*A*, *B* : *Polinom*, *n* : **integer**) → *Polinom*
{ Memberikan hasil perkalian polinom A(x) dan B(x), masing-masing berderajat n dengan algoritma divide and conquer. }

Deklarasi
A0, A1, B0, B1 : *Polinom*
s : **integer**

Algoritma:

```
if  n = 0 then
   return  A * B    { perkalian skalar biasa }
else
   s ← n div 2       { bagidua suku-suku polinom pada posisi s }
```

$A0 \leftarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{s-1}x^{s-1}$
$A1 \leftarrow a_s + a_{s+1}x + a_{s+2}x^2 + \dots + a_nx^{n-s}$
$B0 \leftarrow b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{s-1}x^{s-1}$
$B1 \leftarrow b_s + b_{s+1}x + b_{s+2}x^2 + \dots + b_nx^{n-s}$

```
   return  KaliPolinom(A0, B0, s) + ( KaliPolinom(A0, B1, s) + KaliPolinom(A1, B0, s) ) * x^s +
           KaliPolinom(A1, B1, s) * x^2s
endif
```

Kompleksitas algoritmanya:

- Tinjau lagi $A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))\, x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_1(x)\, B_1(x)\, x^{2\lfloor n/2 \rfloor}$

- Penjumlahan dua polinom berukuran n/2 (operator + berwarna merah) kompleksitasnya O(n) atau cn

- Kompleksitas algoritmanya: $T(n) = \begin{cases} a & , n = 0 \\ 4T(n/2) + cn & , n > 0 \end{cases}$

- Dengan menggunakan Teorema Master, a = 4, b = 2, d = 1, dan memenuhi $a > b^d$ (yaitu $4 > 2^1$) maka relasi rekurens $T(n) = 4T(n/2) + cn$ memenuhi *case* 3, sehingga

$$T(n) = O(n^{{}^2\log 4}) = O(n^2)$$

- Hasil ini tidak memberi perbaikan dibandingkan dengan algoritma *brute force*.

- Dapatkah kita membuat algoritma perkalian polinom yang lebih baik?

Perbaikan:

- Idenya sama seperti pada metode perkalian Karatsuba, yaitu dengan mengurangi jumlah operasi kali.

- Persamaan perkalian *A*(x) dan *B*(x) sebelumnya:

$$A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))\, x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_1(x)\, B_1(x)\, x^{2\lfloor n/2 \rfloor}$$

  terdapat 4 operasi perkalian dan 3 operasi penjumlahan upa-polinom derajat n/2.

- Dengan memanipulasi persamaan di atas sedemikian rupa kita dapat mengurangi jumlah operasi kali berkurang menjadi 3 (dengan konsekuensi operasi penjumlahan menjadi bertambah).

- Definisikan

$$Y(x) = (A_0(x) + A_1(x)) \times (B_0(x) + B_1(x))$$

$$U(x) = A_0(x)B_0(x)$$

$$Z(x) = A_1(x)B_1(x)$$

- Maka

$$Y(x) - U(x) - Z(x) = A_0(x) B_1(x) + A_1(x)B_0(x)$$

sehingga

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x)) x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_1(x) B_1(x) x^{2\lfloor n/2 \rfloor} \\ &= U(x) + \{ Y(x) - U(x) - Z(x)\} x^{\lfloor n/2 \rfloor} + Z(x) x^{2\lfloor n/2 \rfloor} \end{aligned}$$

Sekarang hanya terdapat tiga operasi perkalian polinom, yaitu U(x), Y(x), dan Z(x)

$$A(x)B(x) = U(x) + \{ Y(x) - U(x) - Z(x)\}\, x^{\lfloor n/2 \rfloor} + Z(x)\, x^{2\lfloor n/2 \rfloor}$$

function *KaliPolinom2*(A, B : *Polinom*, n : **integer**) $\rightarrow$ *Polinom*
{ Memberikan hasil perkalian polinom A(x) dan B(x), masing-masing berderajat n dengan algoritma divide and conquer. }

Deklarasi
 A0, A1, B0, B1, U, Y, Z : *Polinom*
 s : **integer**

Algoritma:
 if $n = 0$ then
  return $A * B$ *{ perkalian skalar biasa }*
 else
  $s \leftarrow n$ **div** 2 *{ bagidua suku-suku polinom pada posisi s }*
  $A0 \leftarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{s-1}x^{s-1}$
  $A1 \leftarrow a_s + a_{s+1}x + a_{s+2}x^2 + \ldots + a_nx^{n-s}$
  $B0 \leftarrow b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{s-1}x^{s-1}$
  $B1 \leftarrow b_s + b_{s+1}x + b_{s+2}x^2 + \ldots + b_nx^{n-s}$
  $Y \leftarrow KaliPolinom2(A0 + A1, B0 + B1, s)$
  $U \leftarrow KaliPolinom2(A0, B0, s)$
  $Z \leftarrow KaliPolinom2(A1, B1, s)$
  return $U + (Y - U - Z) * x^s + Z * x^{2s}$
 endif

Kompleksitas algoritmanya:

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 0 \\ 3T(n/2) + cn & , n > 0 \end{cases}$$

- Dengan menggunakan Teorema Master, $a = 3$, $b = 2$, $d = 1$, dan memenuhi $a > b^d$ (yaitu $3 > 2^1$) maka relasi rekurens $T(n) = 3T(n/2) + cn$ memenuhi *case* 3, sehingga

$$T(n) = O(n^{{}^2\log 3}) = O(n^{1.59})$$

- Hasil ini lebih baik dibandingkan dengan algoritma *divide and conquer* sebelumnya

BERSAMBUNG