

Algoritma Decrease and Conquer

(Bagian 1)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir



Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
2021

Definisi *Decrease and Conquer*

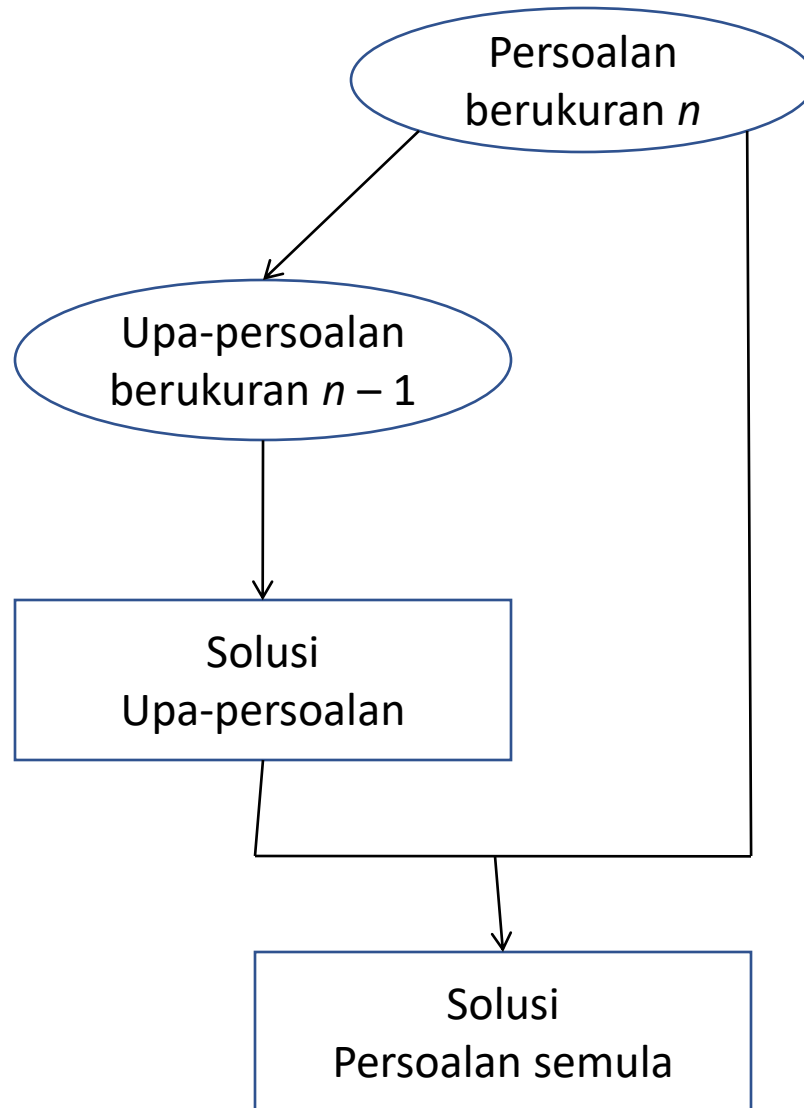
- *Decrease and conquer*: metode perancangan algoritma dengan mereduksi persoalan menjadi dua upa-persoalan (*sub-problem*) yang lebih kecil, tetapi selanjutnya hanya memproses satu sub-persoalan saja.
- Berbeda dengan *divide and conquer* yang memproses *semua* upa-persoalan dan menggabung semua solusi setiap sub-persoalan.
- Di dalam literatur lama, semua algoritma yang membagi persoalan menjadi dua upa-persoalan yang lebih kecil dimasukkan ke kategori *divide and conquer*.
- Meskipun demikian, tidak kedua upa-persoalan hasil pembagian diselesaikan. Jika hanya satu upa-persoalan yang diselesaikan, maka tidak tepat dimasukkan sebagai algoritma *divide and conquer*. Mereka dikategorikan sebagai *decrease and conquer*

- Algoritma *decrease and conquer* terdiri dari dua tahapan:
 1. **Decrease**: mereduksi persoalan menjadi beberapa persoalan yang lebih kecil (biasanya dua upa-persoalan).
 2. **Conquer**: memproses satu upa-persoalan secara rekursif.
- Tidak ada tahap *combine* dalam *decrease and conquer*, karena hanya satu upa-persoalan yang diselesaikan.

Tiga varian *decrease and conquer*:

1. ***Decrease by a constant***: ukuran instans persoalan direduksi sebesar konstanta yang sama setiap iterasi algoritma. Biasanya konstanta = 1.
2. ***Decrease by a constant factor***: ukuran instans persoalan direduksi sebesar faktor konstanta yang sama setiap iterasi algoritma. Biasanya faktor konstanta = 2.
3. ***Decrease by a variable size***: ukuran instans persoalan direduksi bervariasi pada setiap iterasi algoritma.

Decrease by a Constant



- Contoh persoalan:
1. Perpangkatan a^n
 2. Selection sort
 3. Insertion sort

1. Persoalan perpangkatan a^n

Dengan metode *decrease and conquer*:

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & , n > 0 \end{cases}$$

Kompleksitas waktu (berdasarkan jumlah operasi kali):

$$T(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ T(n-1) + 1 & , n > 0 \end{cases}$$

Bila diselesaikan:

$$T(n) = T(n-1) + 1 = \dots = O(n)$$

sama seperti algoritma *brute-force*.

function $exp(a : \text{real}; n : \text{integer}) \rightarrow \text{real}$
{ memberikan hasil perpangkatan a^n }

Deklarasi

$k : \text{integer}$

Algoritma:

if $n = 0$ **then**

return 1

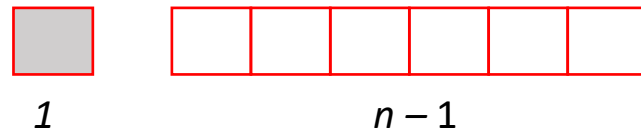
else

return $exp(a, n - 1) * a$

endif

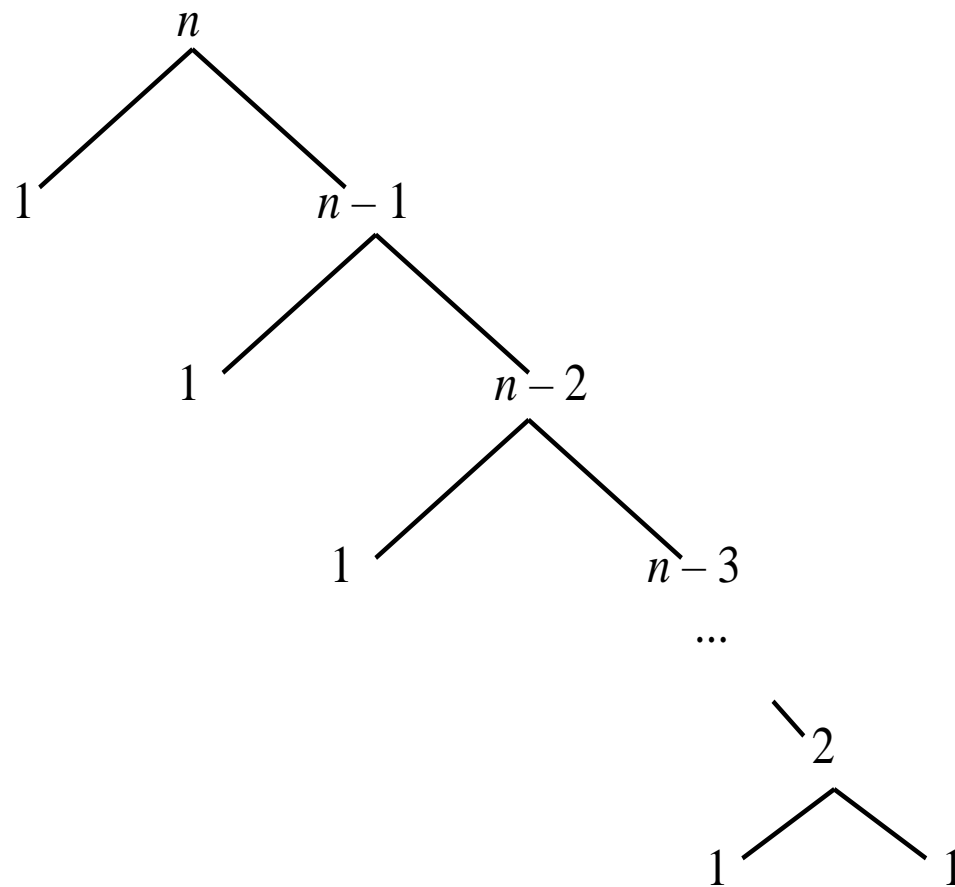
2. Selection sort.

- Algoritma ini sudah dijelaskan di dalam materi *divide and conquer* sebelumnya. Algoritma ini sebenarnya kategori *decrease and conquer*.
- *Selection Sort* adalah pengurutan *hard split/easy join* dengan cara mempartisi larik menjadi dua buah upalarik, upalarik pertama hanya satu elemen, sedangkan upalarik kedua berukuran $n - 1$ elemen.

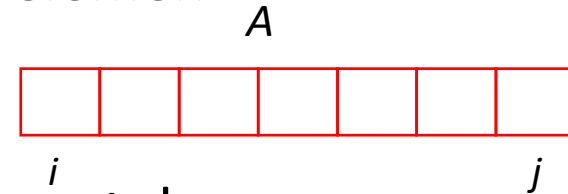


- **Catatan:** materi ini dapat dilewati karena sudah dipelajari di dalam materi *divide and conquer*.

Pohon pembagian larik:



- Proses partisi di dalam *Selection Sort* dilakukan dengan mencari elemen bernilai minimum (atau bernilai maksimum) di dalam larik $A[i..j]$



- lalu elemen minimum ditempatkan pada posisi $A[i]$ dengan cara pertukaran.

```
procedure SelectionSort(input/output A : LarikInteger, input i, j : integer)
```

```
{ Mengurutkan larik A[i..j] dengan algoritma Selection Sort
```

```
  Masukan: Larik A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
```

```
  Luaran: Larik A[i..j] yang terurut
```

```
}
```

```
Deklarasi
```

```
  k : integer
```

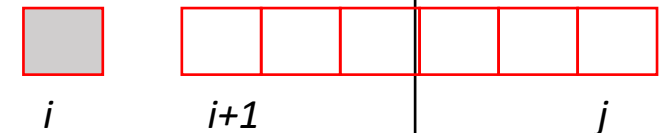
```
Algoritma:
```

```
  if i < j then                { Ukuran(A) > 1 }
```

```
    Partisi3(A, i, j)           { Partisi menjadi 1 elemen dan n - 1 elemen }
```

```
    SelectionSort(A, i+1, j)    { Urut hanya upalarik A[i+1..j] dengan Selection Sort }
```

```
  endif
```



- Algoritma di atas dapat dianggap sebagai versi rekursif algoritma *Selection Sort*

procedure *Partisi3*(input/output A : *LarikInteger*, input i, j : integer)

{ Menmpartisi larik $A[i..j]$ dengan cara mencari elemen minimum di dalam $A[i..j]$, dan menempatkan elemen terkecil sebagai elemen pertama larik.

Masukan: $A[i..j]$ sudah terdefinisi elemen-elemennya

Luaran: $A[i..j]$ dengan $A[i]$ adalah elemen minimum.

}

Deklarasi

$idxmin, k$: integer

Algoritma:

$idxmin \leftarrow i$

for $k \leftarrow i+1$ **to** j **do**

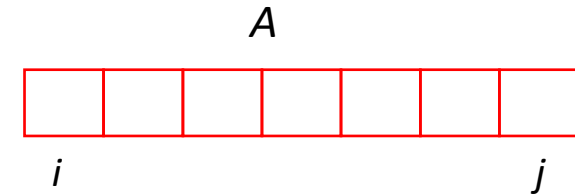
if $A[k] < A[idxmin]$ **then**

$idxmin \leftarrow k$

endif

endfor

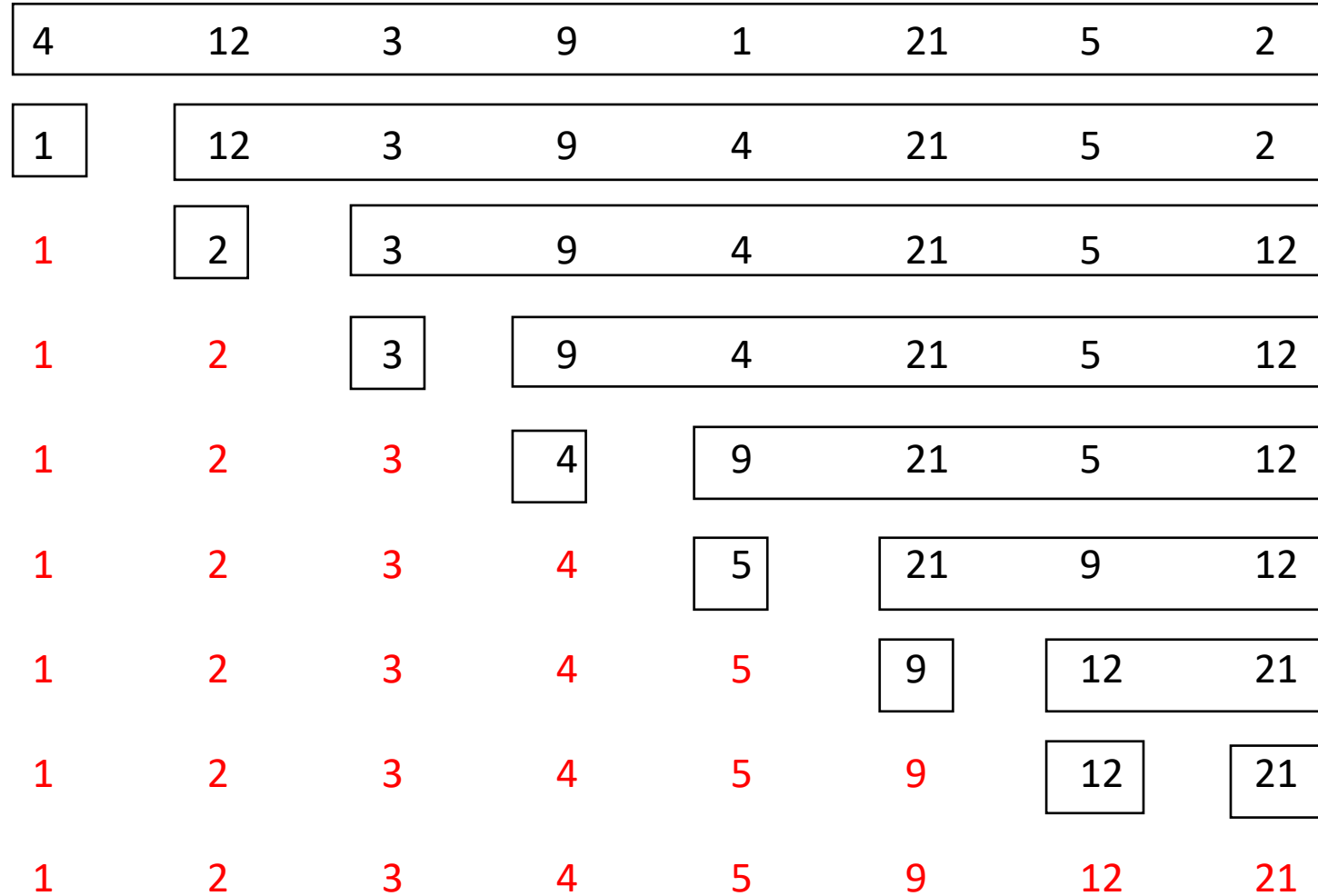
$swap(A[i], A[idxmin])$ { pertukarkan $A[i]$ dengan $A[idxmin]$ }



Contoh 1. Misalkan tabel A berisi elemen-elemen berikut:

4 12 3 9 1 21 5 2

Langkah-langkah pengurutan dengan *Selection Sort*:



→ terurut!

Kompleksitas waktu algoritma *Selection Sort*:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ T(n-1) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaiannya sama seperti pada *Insertion Sort*:

$$T(n) = O(n^2).$$

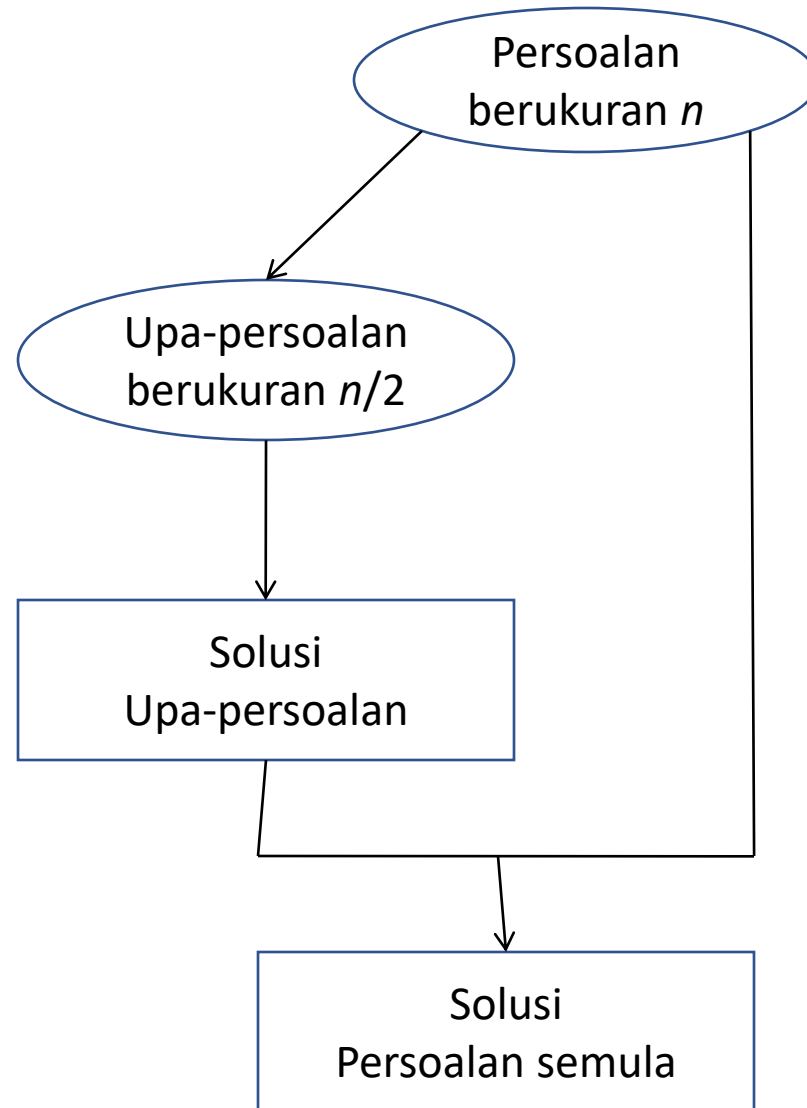
- Kompleksitas waktu algoritma *Selection Sort*:

$T(n)$ = waktu pembagian + waktu pemanggilan rekurens *Selection Sort* untuk bagian tabel kanan yang berukuran n elemen.

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ T(n-1) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Persamaan pada bagian rekurensi bila diselesaikan menghasilkan $T(n) = O(n^2)$.

Decrease by a Constant Factor

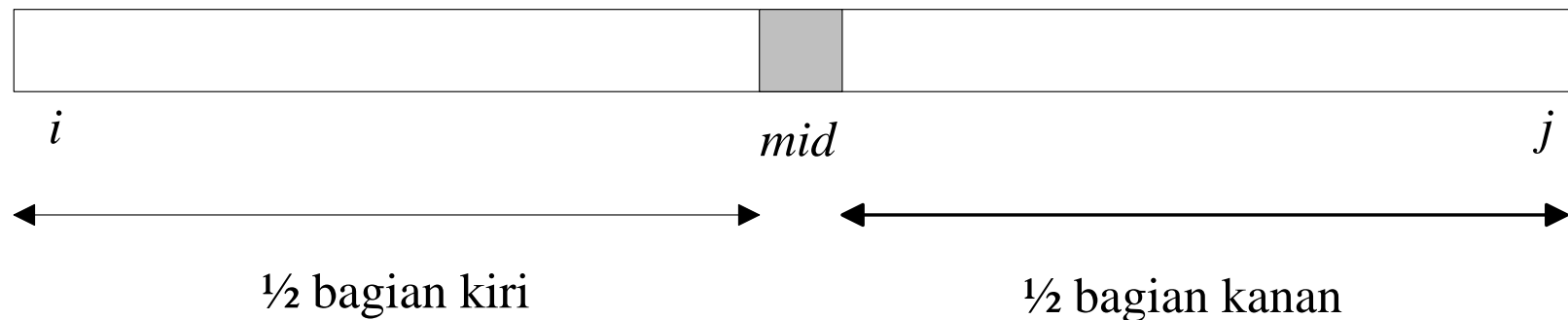


- Contoh persoalan:
1. Binary search
 2. Mencari koin palsu

3. *Binary search*

- Kondisi awal: larik A sudah terurut menaik

K adalah nilai yang dicari di dalam larik



- Jika elemen tengah (mid) $\neq k$, maka pencarian dilakukan hanya pada setengah bagian larik (kiri atau kanan)
- Ukuran persoalan selalu berkurang sebesar setengah ukuran semula. Hanya setengah bagian yang diproses, setengah bagian lagi tidak.

Algoritma *Binary Search* (Kasus 1: Larik sudah terurut menaik)

procedure *binsearch*(**input** $A : \text{LarikInteger}$, $i, j : \text{integer}$; $K : \text{integer}$; **output** $idx : \text{integer}$)

{ Mencari elemen bernilai K di dalam larik $A[i..j]$.

Masukan: larik A sudah terurut menaik, K sudah terdefinisi nilainya

Luaran: indek lariks sedemikian sehingga $A[idx] = K$

}

Deklarasi

$mid : \text{integer}$

Algoritma:

if $i > j$ **then** { ukuran larik sudah 0 }

$idx \leftarrow -1$ { K tidak ditemukan }

else

$mid \leftarrow (i + j) / 2$

if $A(mid) = K$ **then** { K ditemukan }

$idx \leftarrow mid$ { indeks elemen larik yang bernilai = K }

else

if $A(mid) > K$ **then**

$\text{binsearch}(A, i, mid - 1, K, idx)$ { cari di upalarik kiri, di dalam larik $A[i..mid]$ }

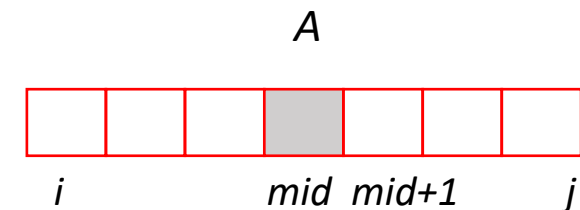
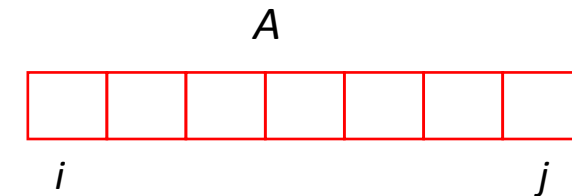
else

$\text{binsearch}(A, mid + 1, j, K, idx)$ { cari di upalarik kanan, di dalam larik $A[mid+1..j]$ }

endif

endif

endif



Algoritma *Binary Search* (Kasus 2: Larik sudah terurut menurun)

procedure *binsearch*(**input** A : *LarikInteger*, i, j : **integer**; K : **integer**; **output** idx : **integer**)

{ Mencari elemen bernilai K di dalam larik $A[i..j]$.

Masukan: larik A sudah terurut menurun, K sudah terdefinisi nilainya

Luaran: indek lariks sedemikian sehingga $A[idx] = K$

}

Deklarasi

mid : **integer**

Algoritma:

if $i > j$ **then** { ukuran larik sudah 0 }

$idx \leftarrow -1$ { K tidak ditemukan }

else

$mid \leftarrow (i + j) / 2$

if $A(mid) = K$ **then** { K ditemukan }

$idx \leftarrow mid$ { indeks elemen larik yang bernilai = K }

else

if $A(mid) < K$ **then**

$binsearch(A, i, mid - 1, K, idx)$ { cari di upalarik kiri, di dalam larik $A[i..mid]$ }

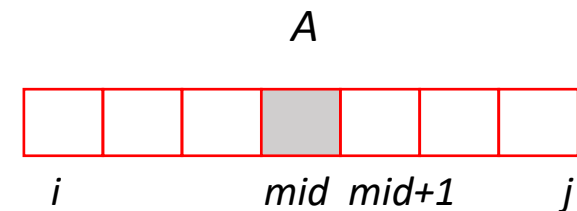
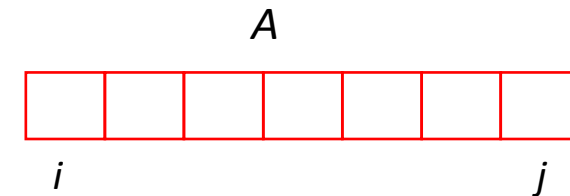
else

$binsearch(A, mid + 1, j, K, idx)$ { cari di upalarik kanan, di dalam larik $A[mid+1..j]$ }

endif

endif

endif



Contoh 3: Misalkan diberikan larik A dengan delapan buah elemen yang sudah terurut menurun seperti di bawah ini:

81	76	21	18	16	13	10	7
$i=1$	2	3	4	5	6	7	$8=j$

Nilai K yang dicari adalah $K = 16$.

Langkah-Langkah pencarian:

Langkah 1:

$i = 1$ dan $j = 8$

Indeks elemen tengah $mid = (1 + 8) \div 2 = 4$ (elemen yang diarsir)

81	76	21	18	16	13	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8

kiri

kanan

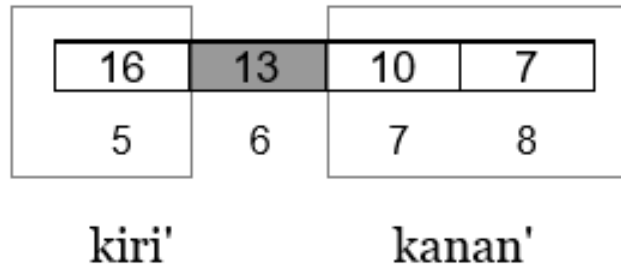
$A[4] \neq 16$

$A[4] < 16$? Tidak, cari pada upalarik kanan

Langkah 2:

$i = 5$ dan $j = 8$

Indeks elemen tengah $mid = (5 + 8) \text{ div } 2 = 6$ (elemen yang diarsir)



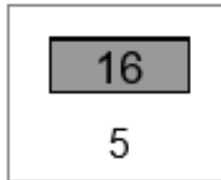
$A[6] \neq 16$

$A[4] < 16$? Ya, cari pada upalarik kiri

Langkah 3:

$i = 5$ dan $j = 5$

Indeks elemen tengah $mid = (5 + 5) \text{ div } 2 = 5$ (elemen yang diarsir)



$A[5] = 16$

Pencarian ditemukan pada $idx = 5$

- Jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 + T(n/2) & , n > 0 \end{cases}$$

- Relasi rekursens tersebut diselesaikan secara iteratif sbb (atau pakai Teorema Master):

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + T(n/2) \\ &= 1 + (1 + T(n/4)) = 2 + T(n/4) \\ &= 2 + (1 + T(n/8)) = 3 + T(n/8) \\ &= \dots \\ &= k + T(n/2^k) \end{aligned}$$

Asumsi: ukuran larik adalah perpangkatan dua, atau $n = 2^k \rightarrow k = {}^2\log n$

$$T(n) = {}^2\log n + T(1) = {}^2\log n + (1 + T(0)) = 1 + {}^2\log n = O({}^2\log n)$$

4. Mencari koin palsu

Diberikan n buah koin yang identik, satu diantaranya palsu. Asumsikan koin yang palsu mempunyai berat yang lebih ringan daripada koin asli. Untuk mencari yang palsu, disediakan sebuah timbangan yang teliti. Carilah koin yang palsu dengan cara penimbangan.



Algoritma *decrease and conquer*:

1. Bagi himpunan koin menjadi dua upa-himpunan (*subset*), masing-masing $\lfloor n/2 \rfloor$ koin. Jika n ganjil, maka satu buah koin tidak dimasukkan ke dalam kedua upa-himpunan.
2. Timbang kedua upa-himpunan dengan neraca.
3. Jika beratnya sama, berarti satu koin yang tersisa adalah palsu.
4. Jika beratnya tidak sama, maka ulangi proses untuk upa-himpunan yang beratnya lebih ringan (salah satu koin di dalamnya palsu).



- Ukuran persoalan selalu berkurang dengan faktor setengah dari ukuran semula. Hanya setengah bagian yang diproses, setengah bagian yang lain tidak diproses.
- Jumlah penimbangan yang dilakukan adalah:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & ,n = 1 \\ 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) & ,n > 1 \end{cases}$$

- Penyelesaian relasi rekurens $T(n)$ mirip seperti *binary search*, atau menggunakan Teorema Master:

$$T(n) = 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) = \dots = O(2 \log n)$$

5. Persoalan Perkalian Petani Rusia

- Mengalikan dua buah bilangan bulat positif m dan n

$$n \cdot m = \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot 2m & , n \text{ genap} \\ \frac{n-1}{2} \cdot 2m + m & , n \text{ ganjil} \end{cases}$$

- Pada setiap pemanggilan rekursif, nilai n berkurang dengan faktor $\frac{1}{2}$ menjadi $n/2$.
- Kasus trivial untk $n = 1$, maka $1 \cdot m = m$

Contoh: menghitung $50 \cdot 65$ dengan metode perkalian petani Rusia

<i>n</i>	<i>m</i>	
50	65	
25	130	
12	260	(+130)
6	520	
3	1040	
1	2080	(+1040)
	2080	+(130 + 1040) = 3250

<i>n</i>	<i>m</i>	
50	65	
25	130	130
12	260	
6	520	
3	1040	1040
1	2080	<u>2080</u>
		<u>3250</u>

(a)
(b)

FIGURE 4.11 Computing $50 \cdot 65$ by the Russian peasant method.

Note that all the extra addends shown in parentheses in Figure 4.11a are in the rows that have odd values in the first column. Therefore, we can find the product by simply adding all the elements in the *m* column that have an odd number in the *n* column (Figure 4.11b).

BERSAMBUNG