

# Algoritma Branch & Bound

(Bagian 2)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

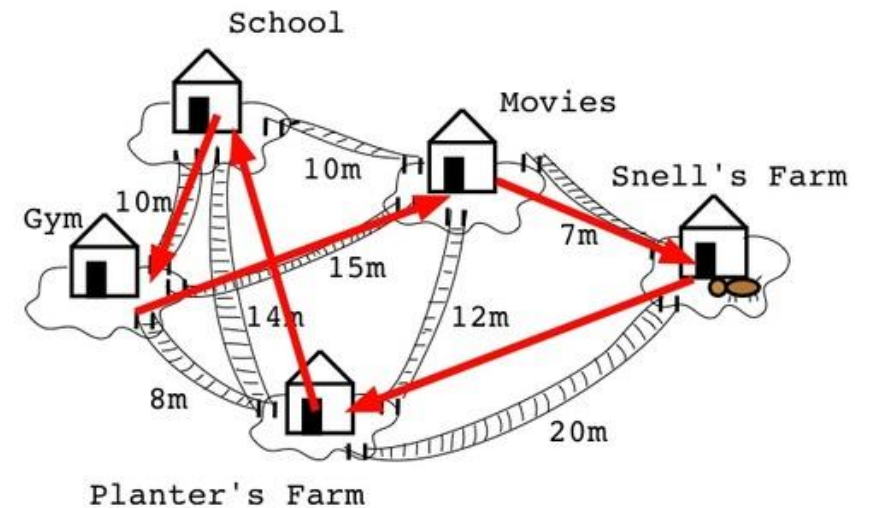
Oleh: Rinaldi Munir, Nur Ulfa Maulidevi, Masayu Leylia Khodra



Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB  
2021

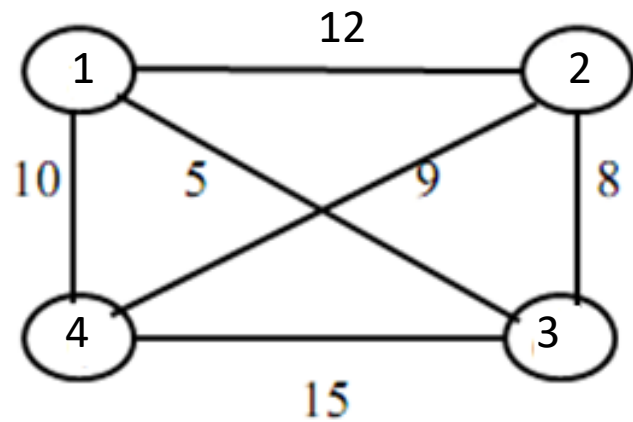
# Travelling Salesperson Problem (TSP)

**Persoalan:** Diberikan  $n$  buah kota (vertex) serta diketahui jarak (bobot) antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) dengan jarak terpendek yang dilakukan oleh seorang pedagang sehingga ia melalui setiap kota tepat hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatannya.

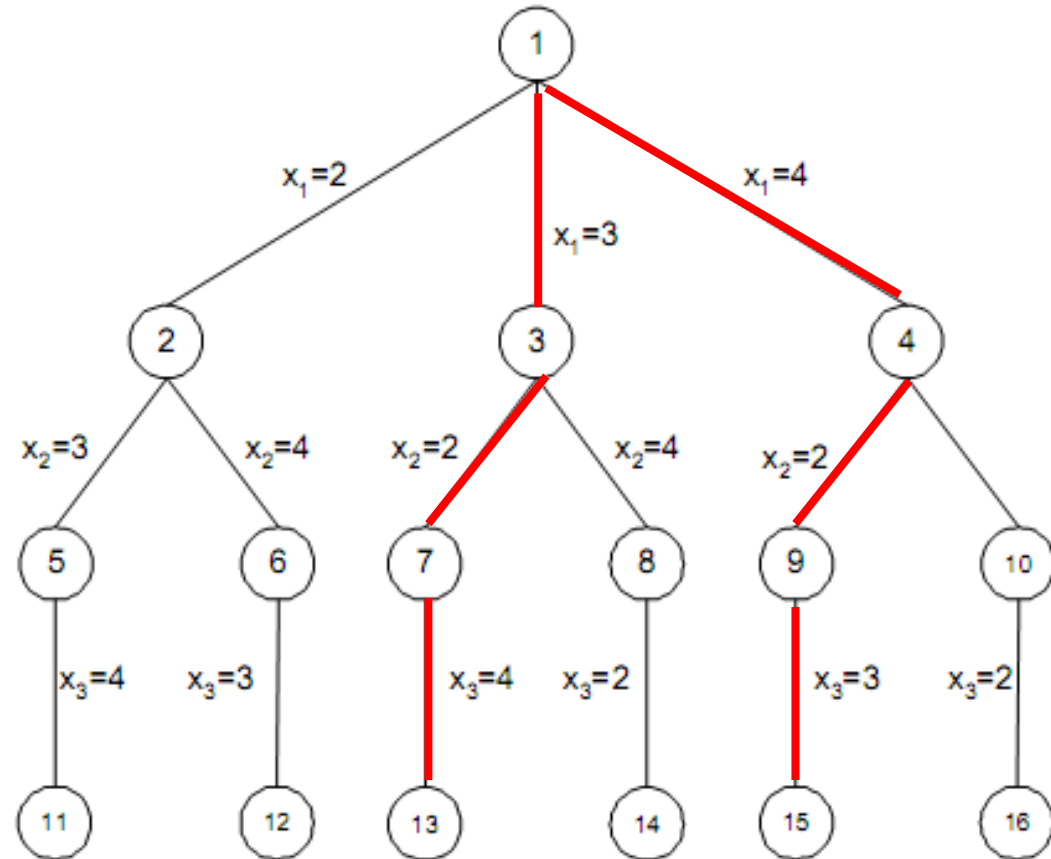


Terdapat  $(n - 1)!$  tur di dalam graf lengkap dengan  $n$  simpul

# Pohon Ruang Status TSP $n = 4$ Simpul



Simpul awal perjalanan = 1



Solusi: 1-3-2-4-1 atau 1-4-2-3-1

Bobot =  $5+8+9+10 = 32$

# Penyelesaian TSP dengan B & B

Contoh lain TSP 5 simpul (matriks bobot/cost matrix):

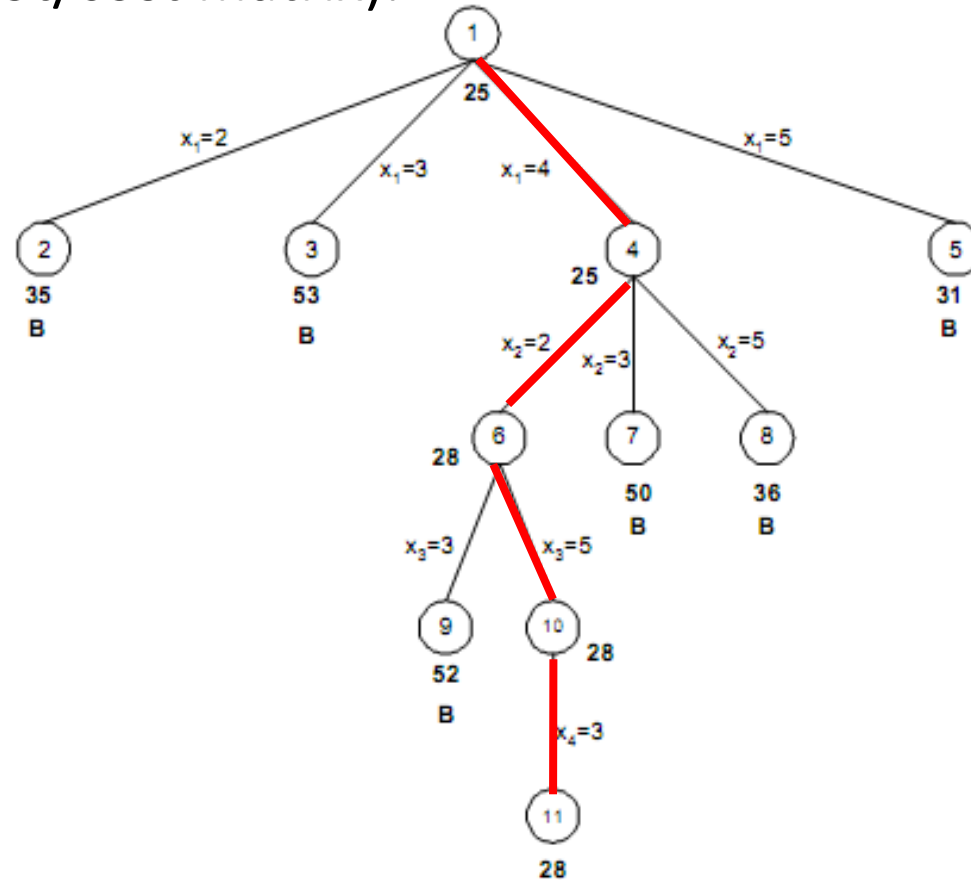
$$\begin{bmatrix}
 \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\
 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\
 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\
 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\
 16 & 4 & 7 & 16 & \infty
 \end{bmatrix}$$

*Brute Force:*

- $4! = 24$  sirkuit hamilton
- Solusi: 1-4-2-5-3-1
- Bobot:  $10 + 6 + 2 + 7 + 3 = 28$

*Greedy:*

- Solusi: 1-4-5-2-3-1
- Bobot:  $10 + 3 + 4 + 16 + 3 = 36$



B&B-TSP dgn B&B

$$x_0 = x_5 = 1$$

# Cost dari Simpul Hidup TSP

- *Cost* untuk setiap simpul di dalam pohon ruang status menyatakan nilai batas bawah (*lower bound*) ongkos mencapai simpul solusi dari simpul tersebut. .
- *Cost* setiap simpul dapat dihitung secara heuristik berdasarkan salah satu dari dua cara:
  1. Matriks ongkos-tereduksi (*reduced cost matrix*) dari graf
  2. Bobot minimum tur lengkap
- Masing-masing cara akan dijelaskan satu per satu penggunaannya pada slide berikut.

# 1. Cost berdasarkan *Reduced Cost Matrix*

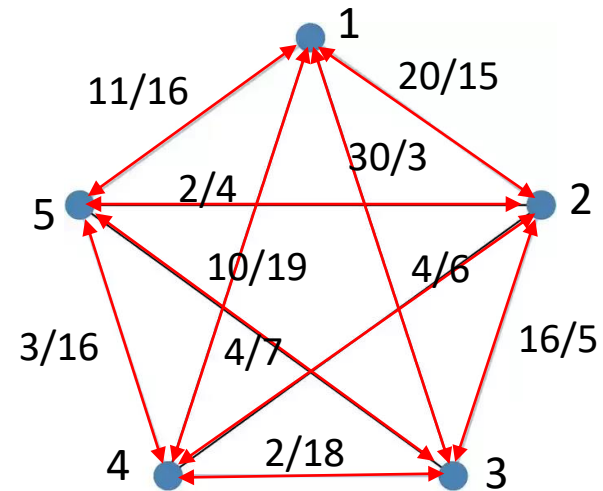
- Ongkos atau nilai batas untuk setiap simpul dihitung dengan menggunakan matriks ongkos-tereduksi (*reduced cost matrix*) dari graf  $G$ .
- Sebuah matriks dikatakan tereduksi jika setiap kolom dan setiap barisnya mengandung *paling sedikit* satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif.

Contoh:

$$\begin{array}{c} M \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 12 & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & 8 & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 11 & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & 9 & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & 8 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Reduksi baris} \\ \text{dan kolom} \end{array} \quad \begin{array}{c} M' \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & 6 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

- Tinjau sebuah TSP dengan  $n = 5$ , graf dinyatakan dalam matriks ketetanggaan:

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$



- Karena perjalanan pedagang di dalam graf melalui sisi  $(i, j)$ , dengan  $i = 1, 2, \dots, 5$  dan  $j = 1, 2, \dots, 5$ , maka mengurangi setiap elemen pada suatu baris atau pada suatu kolom dengan konstanta  $t$  akan mengurangi panjang (bobot) setiap perjalanan sebesar  $t$ .
- Jika  $t$  dipilih dari elemen minimum pada baris  $i$  (kolom  $j$ ), maka mengurangi seluruh elemen pada baris  $i$  (kolom  $j$ ) dengan  $t$  akan menghasilkan sebuah nol pada baris  $i$  (kolom  $j$ ) tersebut. Dengan mengulangi proses ini berulang kali akan menghasilkan matriks bobot tereduksi.

## Reduced Cost Matrix (2)

$$\begin{array}{cc}
 \left[ \begin{array}{ccccc} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{array} \right] & \begin{array}{l} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{array} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{array} \right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 \left[ \begin{array}{ccccc} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{array} \right] & \begin{array}{l} \\ \\ C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \\ \end{array} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{array} \right] & = A
 \end{array}$$



- Jumlah total elemen pengurang dari semua baris dan kolom menjadi batas bawah (*lower bound*) dari tur dengan total bobot minimum. Nilai ini digunakan sebagai nilai untuk simpul akar pada pohon ruang status.

- Total jumlah semua pengurang =  $(10 + 2 + 2 + 3 + 4) + (1 + 3) = 25$ . Nilai 25 ini adalah nilai batas untuk simpul akar,

$$\hat{c}(\text{root}) = 25$$

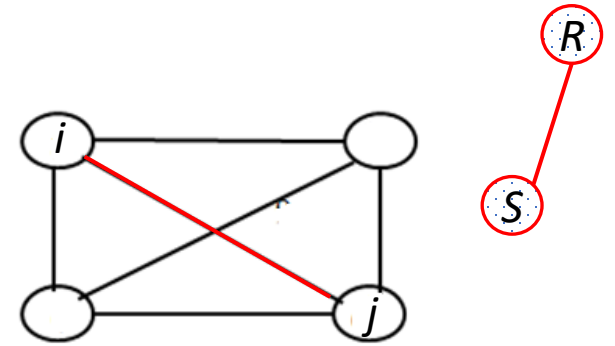
$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Pohon ruang status saat ini:



$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = A$$

# B&B-TSP dgn *Reduced Cost Matrix*



- Misalkan:
  - Tur (perjalanan) dimulai dari simpul 1
  - A: matriks tereduksi untuk simpul R.
  - S: anak dari simpul R sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.
- Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut:
  - (a) ubah semua nilai pada baris  $i$  dan kolom  $j$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul  $i$  atau masuk pada simpul  $j$ ;
  - (b) ubah  $A(j, 1)$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah penggunaan sisi  $(j, 1)$ ;
  - (c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen  $\infty$ .
- Jika  $r$  adalah total semua pengurang, maka nilai batas untuk simpul S adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

Hasil reduksi ini menghasilkan matriks B.

- Secara umum, persamaan fungsi pembatas (*bounding function*) adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

yang dalam hal ini,

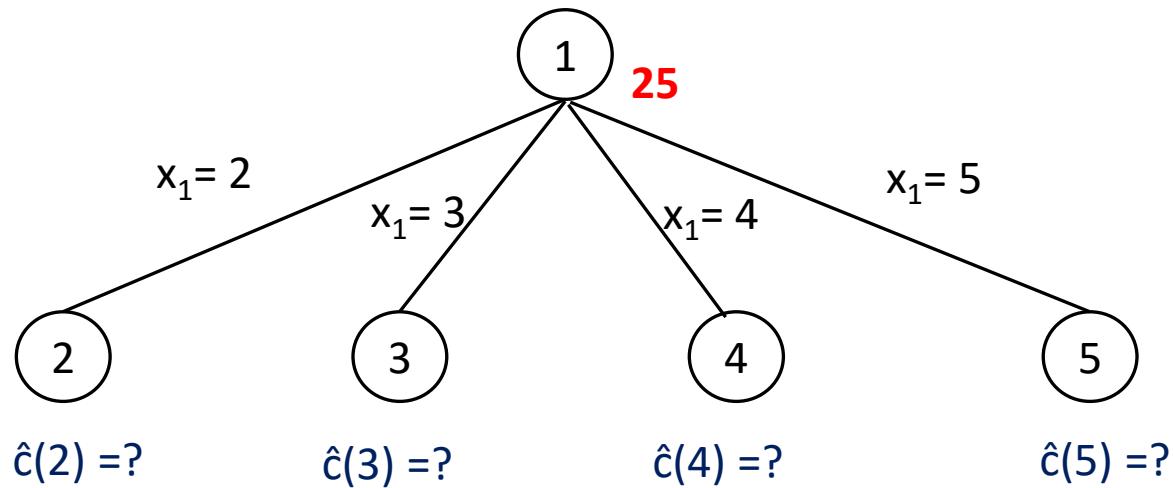
$\hat{c}(S)$  = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul  $S$  (simpul di pohon ruang status)

$\hat{c}(R)$  = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul  $R$ , yang dalam hal ini  $R$  adalah orangtua dari  $S$ .

$A(i, j)$  = bobot sisi  $(i, j)$  pada graf  $G$  yang berkoresponden dengan sisi  $(R, S)$  pada pohon ruang status.

$r$  = jumlah semua pengurang pada proses memperoleh matriks tereduksi untuk simpul  $S$ .

- Bangkitkan semua anak dari simpul 1:



- Akan dihitung *cost* atau *bound* untuk simpul 2, 3, 4, dan 5

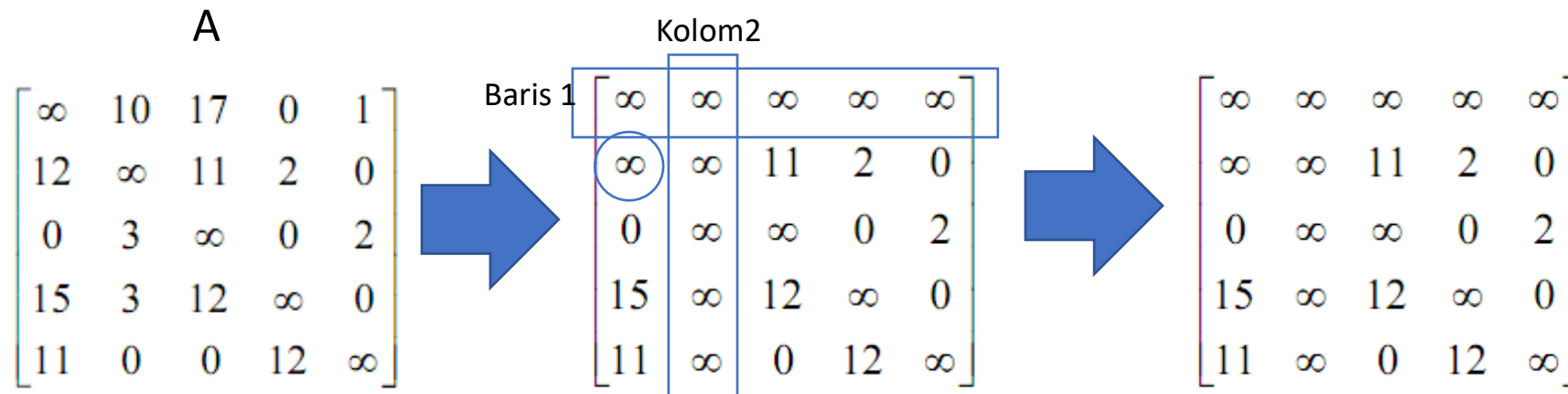
# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (2)

1. Simpul 2; Lintasan di dalam graf: 1, 2

(a) ubah semua nilai pada baris 1 dan kolom 2 menjadi  $\infty$ .

(b) ubah  $A(2, 1)$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah penggunaan sisi (2, 1)

(c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen  $\infty$ .



(a), (b)

(c): sudah berbentuk matriks tereduksi,  $r = 0$

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

## 2. Simpul 3; Lintasan di dalam graf: 1, 3

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Kolom 3

Baris 1

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 11 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 - 11} \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix} = B$$

$$\hat{c}(3) = \hat{c}(1) + A(1,3) + r = 25 + 17 + 11 = 53$$

## 3. Simpul 4; Lintasan di dalam graf: 1, 4

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Kolom 3

Baris 1

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = B$$

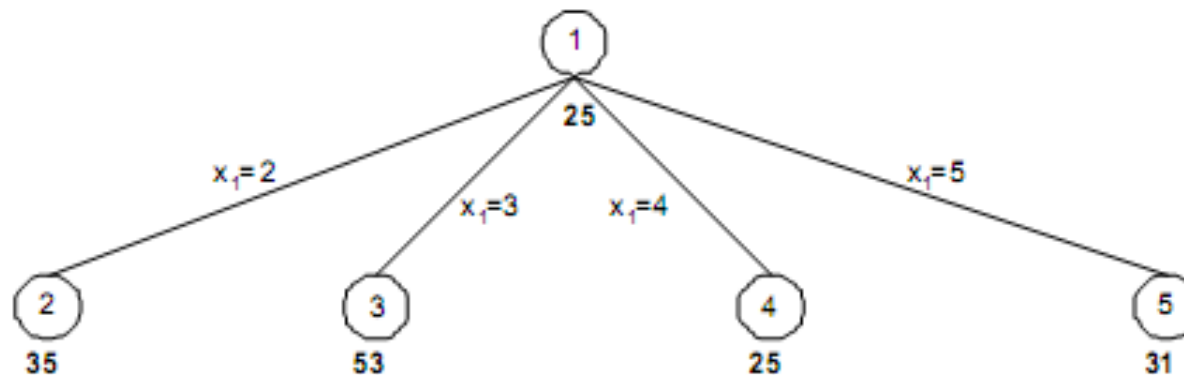
$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

#### 4. Simpul 5; Lintasan di dalam graf: 1, 5

$$\begin{array}{c}
 \text{A} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\
 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\
 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\
 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\
 11 & 0 & 0 & 12 & \infty
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Baris 1} \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Kolom 3} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 12 & \infty & 11 & 2 & \infty \\
 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\
 15 & 3 & 12 & \infty & \infty \\
 \infty & 0 & 0 & 12 & \infty
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 R_2 - 2 \\
 R_4 - 3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 = B \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\
 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\
 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\
 \infty & 0 & 0 & 12 & \infty
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

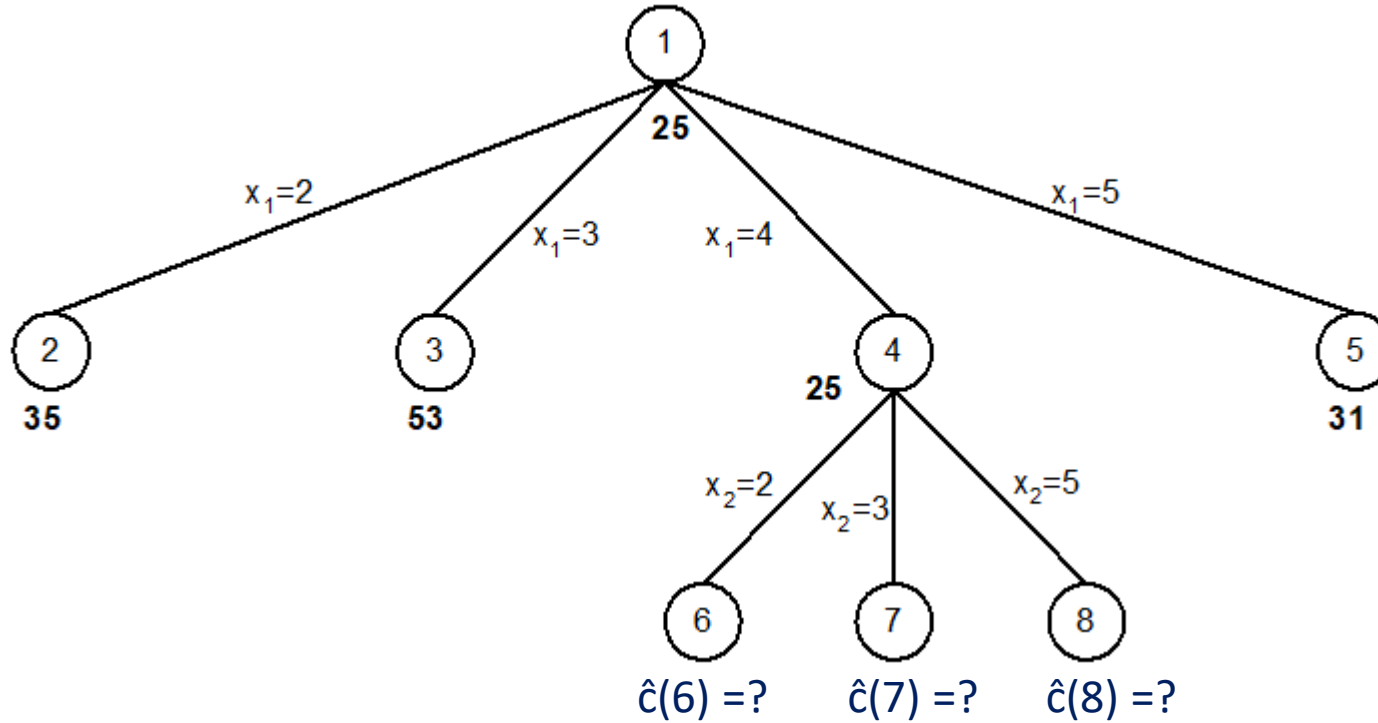
$$\hat{c}(5) = \hat{c}(1) + A(1,5) + r = 25 + 1 + 5 = 31$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:



Simpul yang memiliki *cost* terkecil adalah simpul 4, maka simpul 4 menjadi simpul-E

- Simpul-simpul berikutnya yang dibangkitkan adalah simpul 6, 7, dan 8:



- Akan dihitung nilai *cost* untuk simpul 6, 7, dan 8



5. Simpul 6; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 2

$$B = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

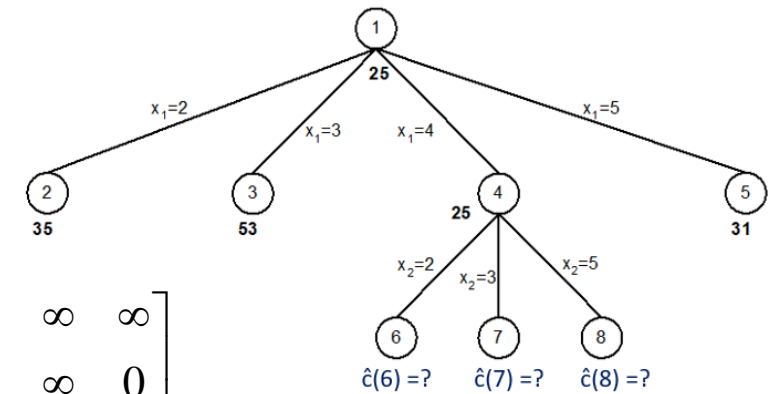
Kolom 2

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Baris 4

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{c}(6) = \hat{c}(4) + B(4,2) + r = 25 + 3 + 0 = 28$$



6. Simpul 7; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 3

$$B = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Kolom 3

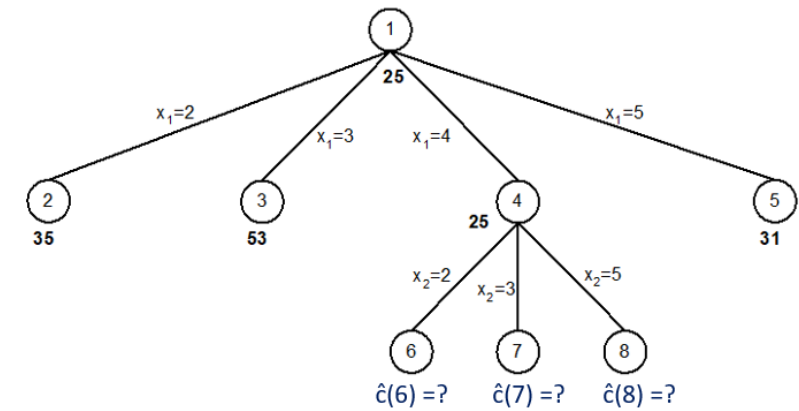
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} R_3 - 2$$

Baris 4

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} C_1 - 11 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{c}(7) = \hat{c}(4) + B(4,3) + r = 25 + 12 + 13 = 508$$

7. Simpul 8; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 5



$$B = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

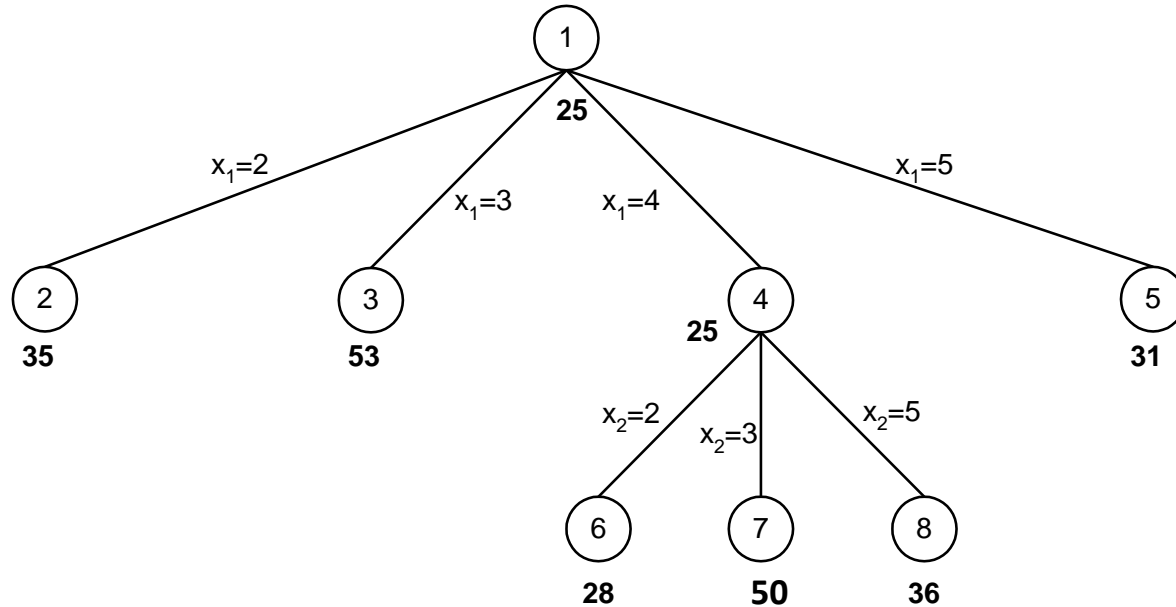
Baris 4

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} R_2 - 11$$

$$= C = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(8) = \hat{c}(4) + B(4,5) + r = 25 + 0 + 11 = 36$$

- Pohon ruang status yang terbentuk hingga saat ini:



- Simpul hidup saat ini adalah 2, 3, 5, 6, 7, dan 8. Simpul hidup yang memiliki nilai *cost* terkecil adalah simpul 6.
- Simpul 6 menjadi simpul-E dan akan diekspansi sebagai berikut di bawah ini.

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

$$C = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

8. Simpul 9; Lintasan: 1, 4, 2, 3

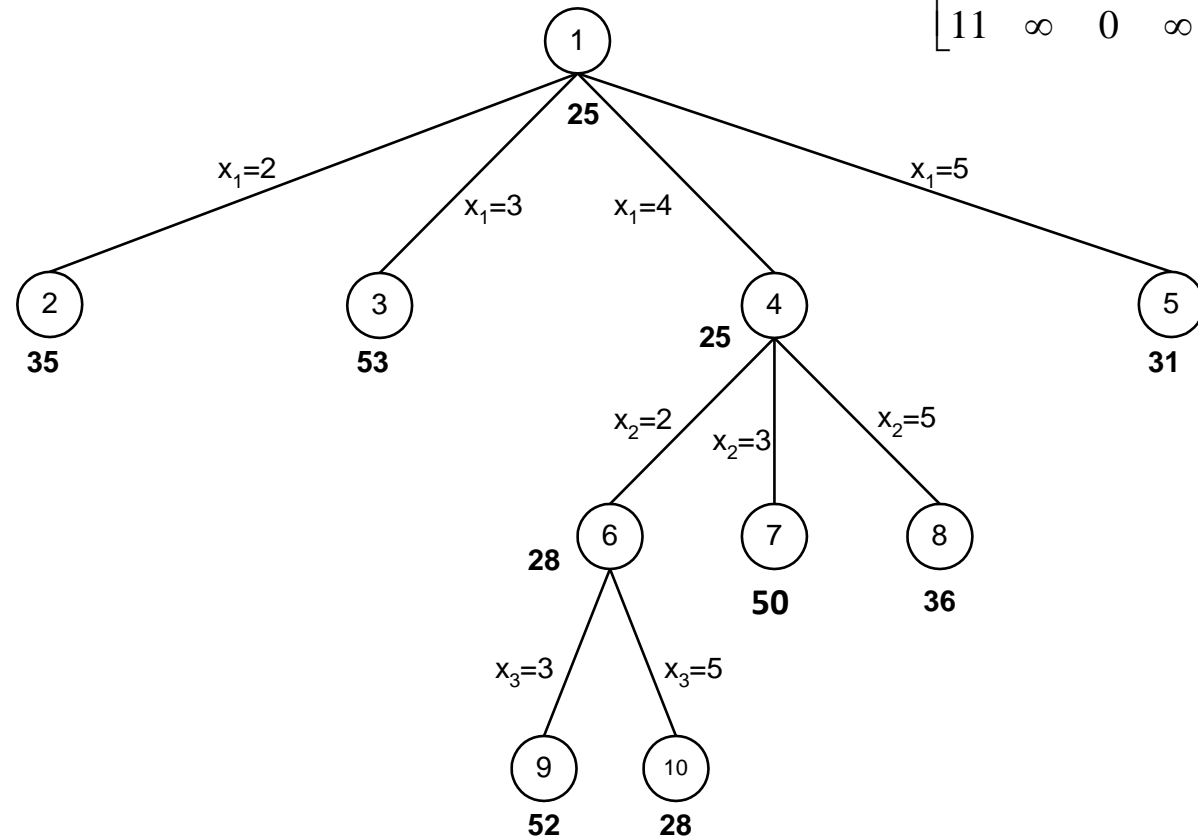
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 2 \\ R_5 - 11 \\ \end{matrix} = D \quad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,3) + r = 28 + 11 + 13 = 52$$

9. Simpul 10; Lintasan: 1, 4, 2, 5

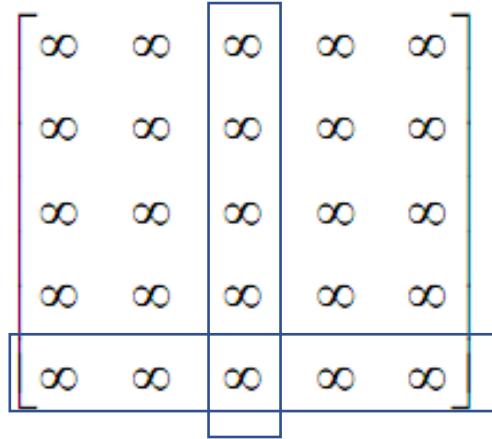
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

$$\hat{c}(10) = \hat{c}(6) + C(2,5) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$



Simpul-simpul hidup: 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10  
 Simpul dengan cost terkecil: simpul 10  
 Simpul 10 menjadi simpul-E

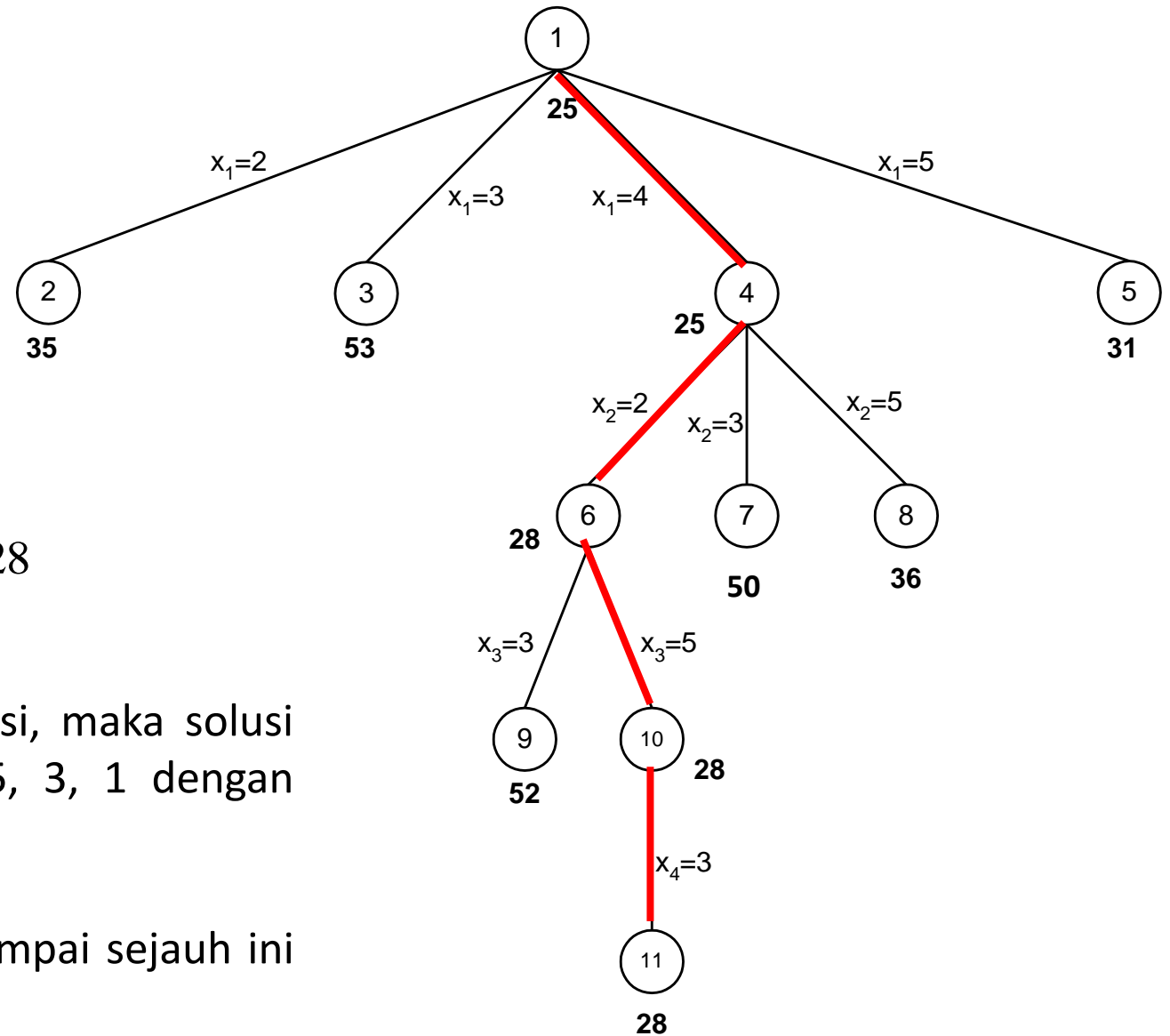
## 10. Simpul 11; Lintasan: 1, 4, 2, 5, 3



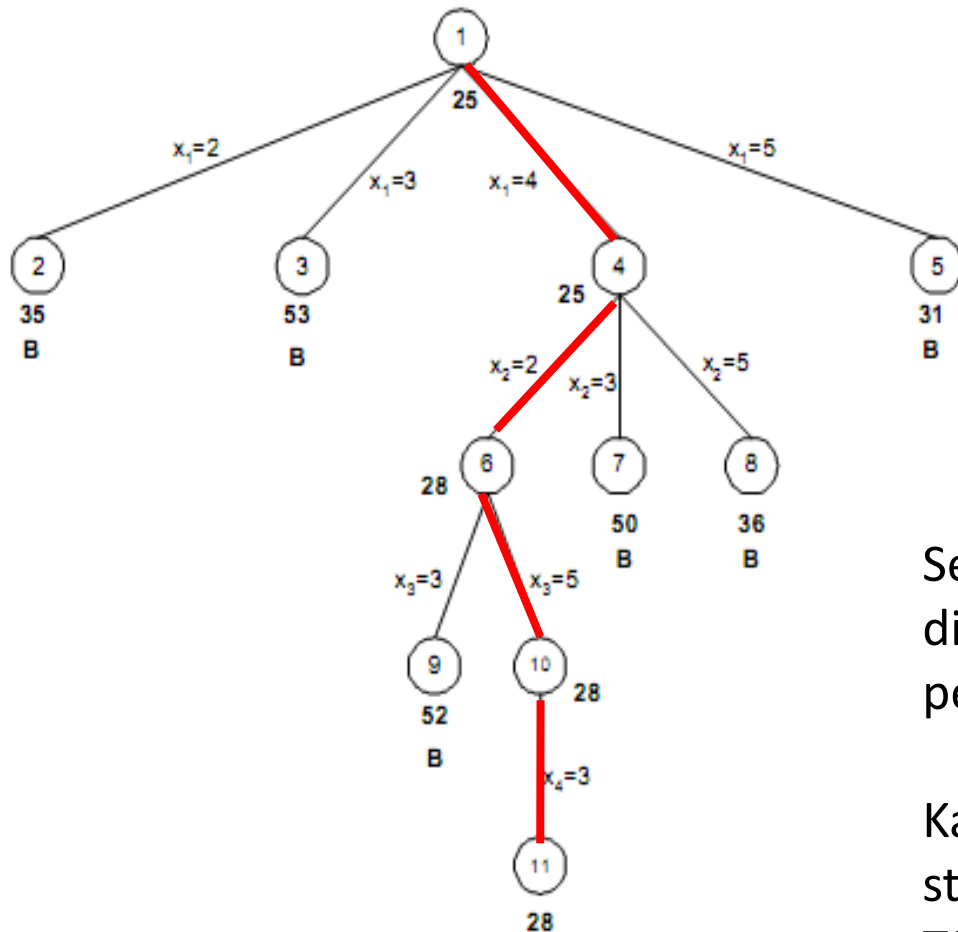
21

$$\hat{c}(11) = \hat{c}(10) + D(5,3) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$

- Karena simpul 11 adalah simpul solusi, maka solusi pertama ditemukan, yaitu 1, 4, 2, 5, 3, 1 dengan panjang 28.
- Solusi ini merupakan solusi terbaik sampai sejauh ini (*the best solution so far*).



# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



Simpul-E	Simpul Hidup
1	4,5,2,3
4	6,5,2,8,7,3
6	10,5,2,8,7,9,3
10	11,5,2,8,7,9,3
11	daun

Semua simpul hidup yang nilainya lebih besar dari 28 dibunuh (B) karena tidak mungkin lagi menghasilkan perjalanan dengan bobot  $< 28$ .

Karena tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka  $X = (1, 4, 2, 5, 3, 1)$  menjadi solusi persoalan TSP di atas dengan bobot 28.

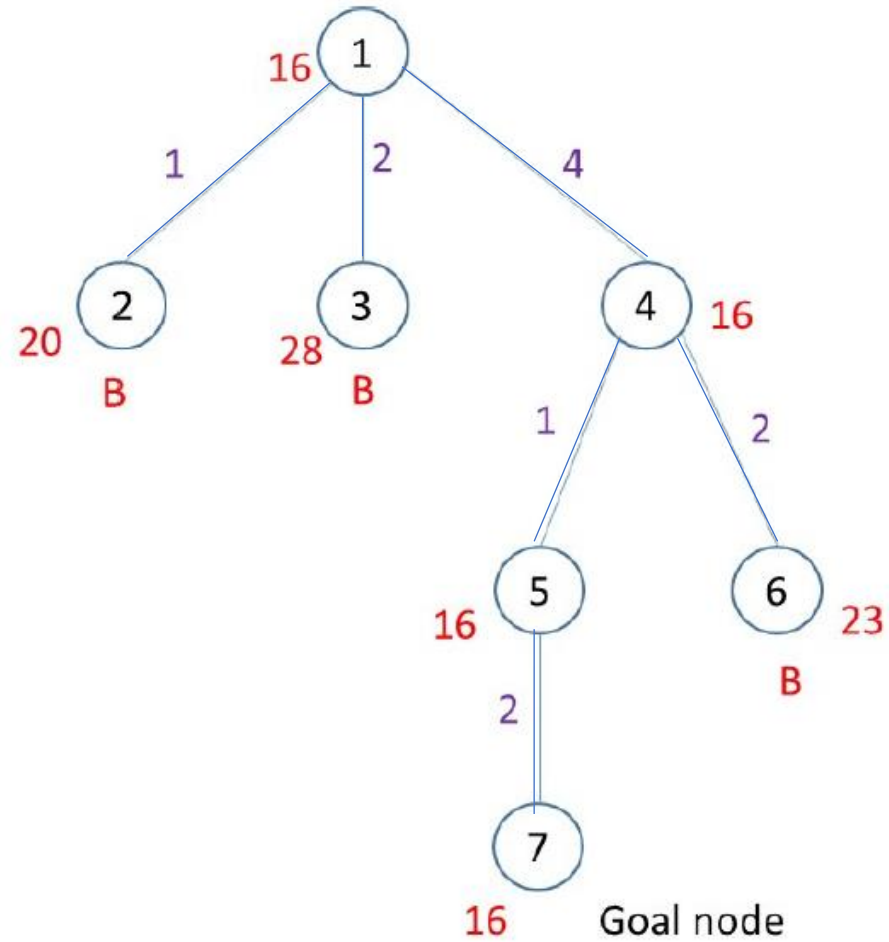
# Latihan

- (TSP) Diberikan sebuah graf lengkap dengan 4 simpul yang dinyatakan dengan matriks berbobot sebagai berikut:
- Simpul diberi nomor 1, 2, 3, dan 4. Jika tur dimulai dari simpul 3, tentukan tur TSP dengan bobot minimum (dari 3 kembali ke 3 melalui simpul yang lain tepat sekali). Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. *Bound* atau cost dihitung dengan matriks ongkos tereduksi (*reduced cost matrices*). Tuliskan jawaban anda dengan menggambarkan pohon ruang status beserta nilai *bound* untuk setiap simpul, solusi dalam bentuk vektor  $X$  dan total bobot.

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{bmatrix}$$

# Penyelesaian:

Pohon ruang status yang terbentuk:



Solusi:  $X = (3, 4, 1, 2, 3)$ , cost = 16



Proses perhitungan *bound* untuk setiap simpul adalah sbb:

1. Menghitung bound untuk simpul 1:

$$\begin{bmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{l} R1 - 2 \\ R2 - 3 \\ R3 - 4 \\ R4 - 6 \end{array} \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 3 & \infty & 0 & 4 \\ 1 & 4 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} C1 - 1 \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} = A$$

Jumlah semua pengurang =  $2 + 3 + 4 + 6 + 1 = 16 \rightarrow c(1) = 16$

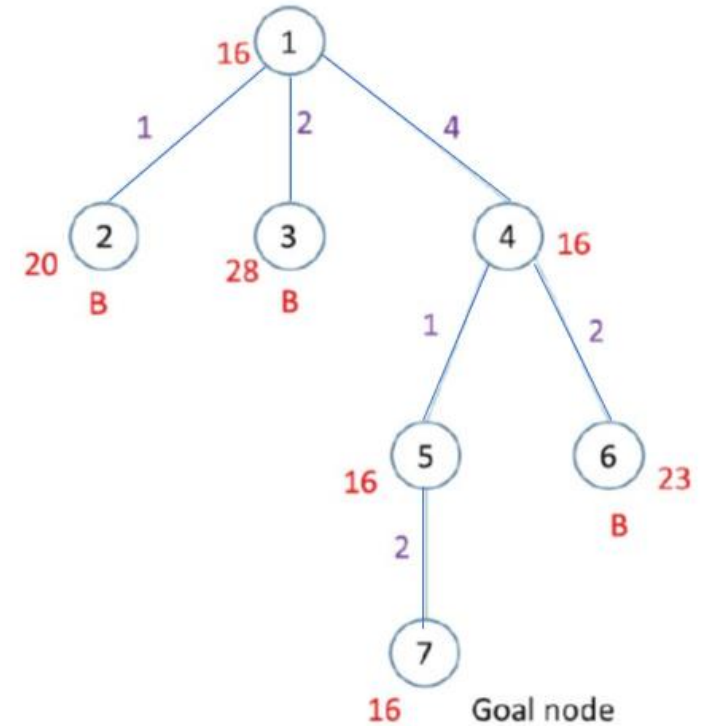
2. Menghitung bound untuk simpul 2 (bersesuaia ndengan sisi (3,1) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-1 menjadi  $\infty$ , lalu ubah nilai  $A(1, 3)$  menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{C4-4} \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 4$

Nilai bound untuk simpul 2  $\rightarrow c(2) = c(1) + A(3,1) + r = 16 + 0 + 4 = 20$



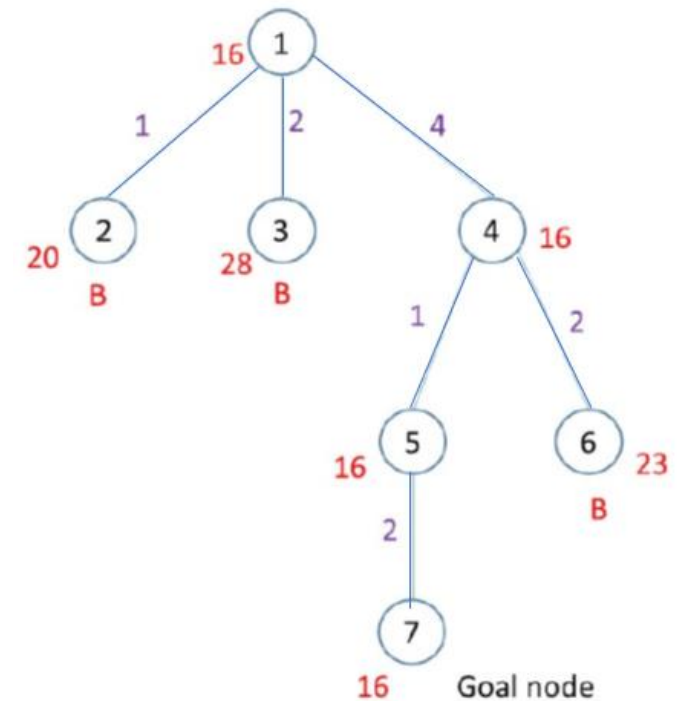
3. Menghitung bound untuk simpul 3 (bersesuaian dengan sisi (3,2) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-2 menjadi  $\infty$ , lalu ubah nilai  $A(2, 3)$  menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1-5 \\ R2-2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 1 \\ 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} C4-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 5+2 +1 = 8$

Nilai bound untuk simpul 3  $\rightarrow c(3) = c(1) + A(3,2) + r = 16 + 4 + 8 = 28$



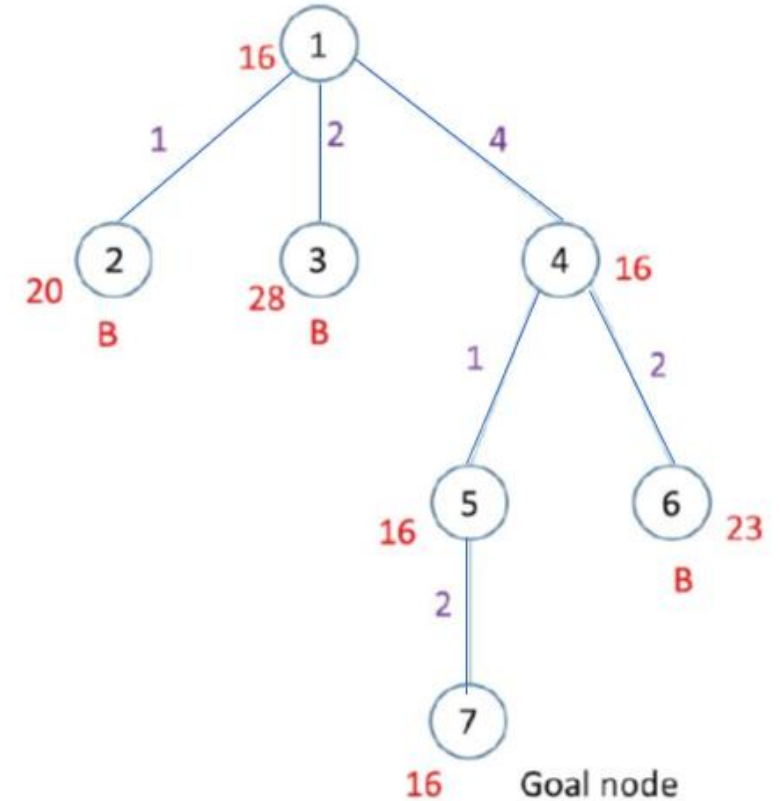
4. Menghitung bound untuk simpul 4 (bersesuaian dengan sisi (3,4) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-4 menjadi  $\infty$ , lalu ubah nilai  $A(4, 3)$  menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = B$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 4  $\rightarrow c(4) = c(1) + A(3,4) + r = 16 + 0 + 0 = 16$



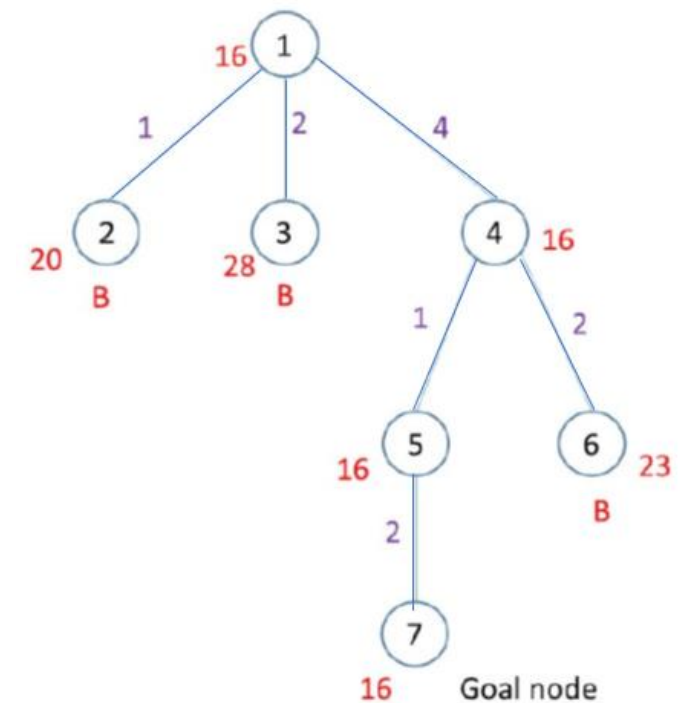
5. Menghitung bound untuk simpul 5 (bersesuaian dengan sisi (4,1) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-1 menjadi  $\infty$ , lalu ubah nilai B(1, 3) menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = C$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 5  $\rightarrow c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 0 = 16$



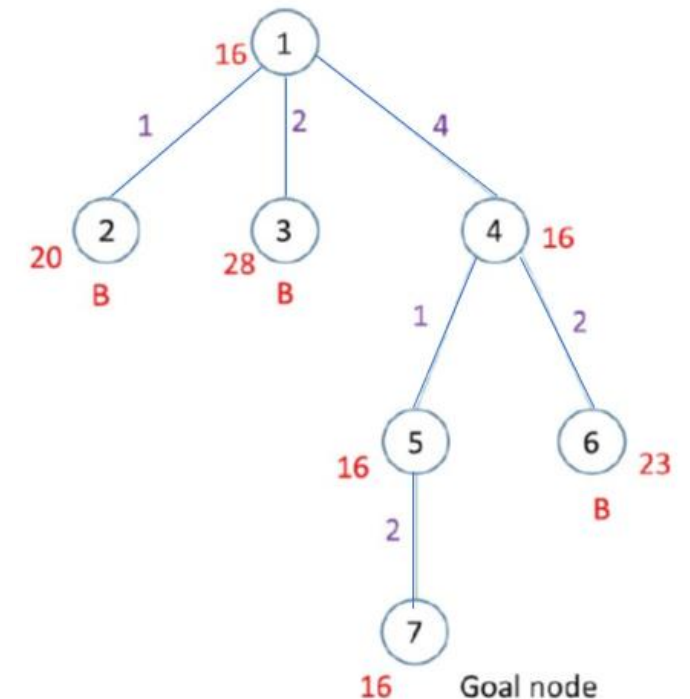
6. Menghitung bound untuk simpul 6 (bersesuaian dengan sisi (4,2) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-2 menjadi  $\infty$ , lalu ubah nilai B(2, 3) menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1 - 5 \\ R2 - 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 2 + 5 = 7$

Nilai bound untuk simpul 5  $\rightarrow c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 7 = 23$



7. Menghitung bound untuk simpul 7 (bersesuaian dengan sisi (1,2) pada graf):

Dari matriks D, ubah nilai pada baris ke-1 dan kolom ke-2 menjadi  $\infty$ , lalu reduksi lagi matriksnya

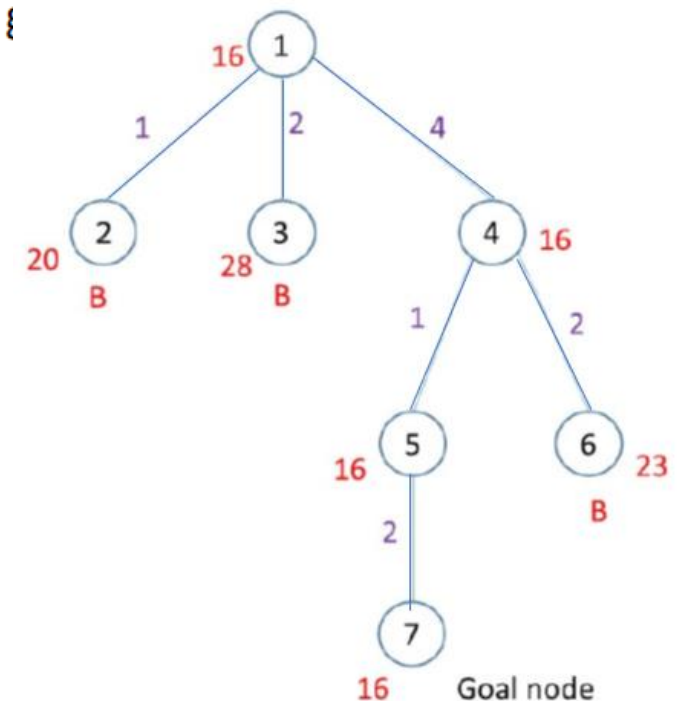
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi}$$

Jumlah semua pengurang =  $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 5  $\rightarrow c(7) = c(5) + D(1,2) + r = 16 + 0 + 0 = 16 \rightarrow \{$

Bunuh semua simpul dengan bound  $> 16$ . Habis.

Solusi  $X = (3, 4, 1, 2, 3)$  dengan total bobot = 16



# BERSAMBUNG