

Latihan Soal

Algoritma Divide and Conquer

Oleh: Rinaldi Munir

Soal 1

Diberikan sebuah larik (array) integer a_1, a_2, \dots, a_n . Anda diminta menemukan *sub-sequence* yang kontigu (berderetan) dari larik tersebut yang memiliki nilai maksimum. Sebagai contoh:

$[-2, 11, -4, 13, -5, 2, -1, 3]$

memiliki nilai maksimum *sub-sequence* kontigu = 20, yaitu $[11, -4, 13]$.

Jika diselesaikan dengan algoritma (a) *brute force*, dan (b) *divide and conquer* bagaimana caranya (langkah-langkahnya, bukan pseudo-code)? Jelaskan jawaban anda dengan mengambil contoh larik di atas. Berapa kompleksitas waktu asimptotiknya?

(Petunjuk: gunakan gagasan seperti pada masalah mencari sepasang jarak titik terdekat/ *The Closest Point Pair Problem*).

Penyelesaian (a) *brute force*:

- Algoritma *brute force*:
 - Tuliskan semua *sub-sequence* dengan 1 elemen (ada n buah), *sub-sequence* dengan 2 elemen (ada $n - 1$ buah), dan seterusnya hingga *sub-sequence* dengan n elemen (1 buah). Seluruhnya ada
$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = n(n + 1)/2$$
sub-sequence.
 - Hitung jumlah nilai pada setiap *sub-sequence*
 - Pilih *sub-sequence* yang jumlahnya maksimum

Menghitung jumlah nilai di dalam *sub-sequence* adalah $O(n)$, maka kompleksitas algoritmanya adalah $O(n \cdot n(n + 1)/2) = O(n^3)$.

Penyelesaian (b) *divide and conquer*:

Algoritma *divide and conquer*:

if $n = 1$, maka

 nilai maksimum = elemen tersebut

else

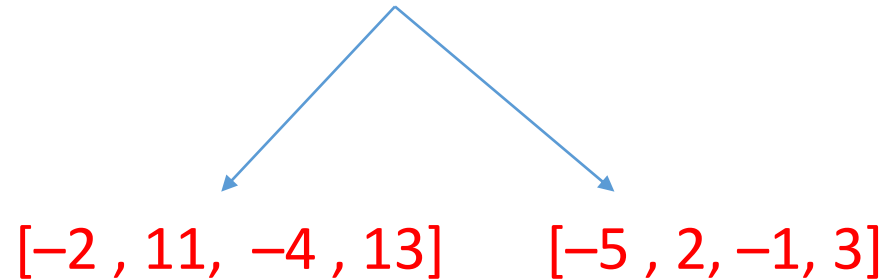
- bagi menjadi dua upa-larik.
- Nilai maksimum *sub-sequence* yang kontigu dapat terjadi pada salah satu dari tiga kasus berikut:
 - a) Case 1: semua elemen *sub-sequence* yang berjumlah maksimum terdapat pada upa-larik kiri.
 - b) Case 2: semua elemen *sub-sequence* yang berjumlah maksimum terdapat pada upa-larik kanan
 - c) Case 3: elemen *sub-sequence* yang berjumlah maksimum dimulai pada upalarik kiri dan berakhir pada upa-larik kanan

Ambil nilai terbesar dari langkah (a), (b), dan (c)

Detail setiap kasus:

- Case 1: Hitung secara rekursif nilai maksimum *sub-sequence* yang seluruhnya terdapat pada upa-larik kiri.
- Case 2: Hitung secara rekursif nilai maksimum *sub-sequence* yang seluruhnya terdapat pada upa-larik kanan
- Case 3: Hitung nilai maksimum *sub-sequence* yang berawal pada upa-larik kiri dan berakhir pada upa-larik kanan. Caranya adalah:
 - Cari jumlah maksimum upalarik mulai dari elemen tengah ke kiri
 - Cari jumlah maksimum upalarik mulai dari elemen tengah+1 ke kanan
 - Kombinasikan keduanya dan jumlahkan hasilnya

Contoh: $[-2, 11, -4, 13, -5, 2, -1, 3]$



Kasus 1: sub-array kontigu di bagian kiri: $[11, -4, 13] \rightarrow 11 - 4 + 13 = 20$

Kasus 2: sub-array kontigu di bagian kanan: $[2, -1, 3] \rightarrow 2 - 1 + 3 = 4$

Kasus 3: sub-array kontigu di antara dua bagian: $[11, -4, 13, -5, 2, -1, 3] \rightarrow 19$

$\text{Max}(20, 4, 10) = 20 \rightarrow [11, -4, 13]$

Rincian:

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

m=-2 m =11 m =-4 m = 13 m =-5 m = 2 m = -1 m = 3

} divide sekaligus conquer

Ket: m = nilai max sub-array kontigu

Combine:

-2 11

m1 = -2 → [-2]
m2 = 11 → [11]
m3 = 9 → [-2, 11]
max = 11 → [11]

-4 13

m1 = -4 → [-4]
m2 = 13 → [13]
m3 = 9 → [-4, 13]
max = 13 → [13]

-5 2

m1 = -5 → [-5]
m2 = 2 → [2]
m3 = -3 → [-5, 2]
max = 2 → [2]

-1 3

m1 = -1 → [-1]
m2 = 3 → [3]
m3 = 2 → [-1, 3]
max = 3 → [3]

-2 11 -4 13

m1 = 11, m2 = 13, m3 = 20 → [11, -4, 13]
max = 20 → [11, -4, 13]

-5 2 -1 3

m1 = 2, m2 = 3, m3 = 4 → [2, -1, 3]
max = 4 → [2, -1, 3]

-2 11 -4 13 -5 2 -1 3

m1 = 20 → [11, -4, 13]
m2 = 4 → [2, -1, 3]
m3 = 19 → [11, -4, 13, -5, 2, -1, 3]
max = 20 → [11, -4, 13]

Kompleksitas waktu algoritma:

$T(n)$ adalah jumlah operasi penjumlahan

Pada setiap level terdapat dua pemanggilan rekursif, masing-masing untuk $n/2$ elemen *array*.

Operasi penjumlahan untuk sub-array sepanjang maks n elemen = cn

Untuk $n = 1$, operasi penjumlahan = 0, secara umum = a .

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(n/2) + cn, & n > 1 \end{cases}$$

Menurut Teorema Master, $T(n) = O(n \log n)$