

# Algoritma *Greedy*

Bahan Kuliah

IF2211 Strategi Algoritma



Oleh: Rinaldi Munir

# Pendahuluan

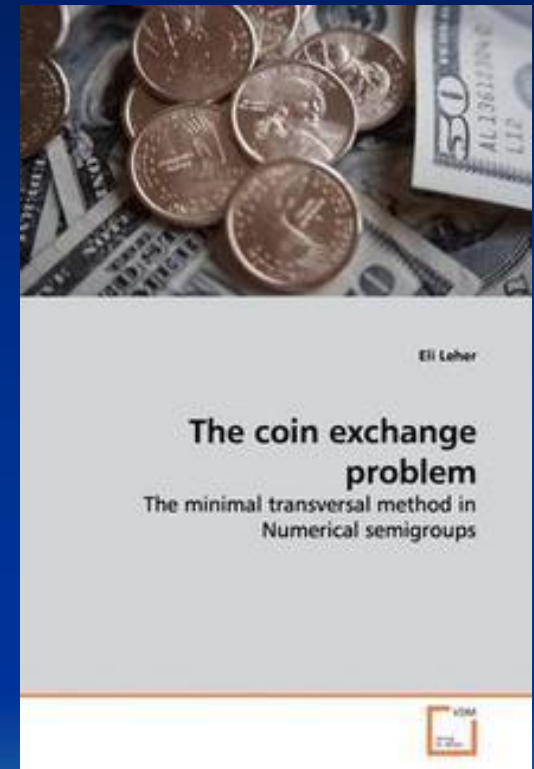
- Algoritma *greedy* merupakan metode yang paling populer untuk memecahkan persoalan optimasi.
- Persoalan optimasi (*optimization problems*):  
→ persoalan mencari solusi optimum.
- Hanya ada dua macam persoalan optimasi:
  1. Maksimasi (*maximization*)
  2. Minimasi (*minimization*)

Contoh persoalan optimasi:

( **Persoalan Penukaran Uang**):

Diberikan uang senilai  $A$ . Tukar  $A$  dengan koin-koin uang yang ada. Berapa jumlah minimum koin yang diperlukan untuk penukaran tersebut?

→ Persoalan minimasi



## Contoh 1: tersedia banyak koin 1, 5, 10, 25

- Uang senilai  $A = 32$  dapat ditukar dengan banyak cara berikut:

$$32 = 1 + 1 + \dots + 1 \quad (32 \text{ koin})$$

$$32 = 5 + 5 + 5 + 5 + 10 + 1 + 1 \quad (7 \text{ koin})$$

$$32 = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 \quad (5 \text{ koin})$$

... dst

- Minimum:  $32 = 25 + 5 + 1 + 1 \quad (4 \text{ koin})$



- *Greedy* = rakus, tamak, loba, ...
- Prinsip *greedy*: “*take what you can get now!*”.
- Algoritma *greedy* membentuk solusi langkah per langkah (*step by step*).
- Pada setiap langkah, terdapat banyak pilihan yang perlu dievaluasi.
- Oleh karena itu, pada setiap langkah harus dibuat keputusan yang terbaik dalam menentukan pilihan.



- Pada setiap langkah, kita membuat pilihan **optimum lokal** (*local optimum*)
- dengan harapan bahwa langkah sisanya mengarah ke solusi **optimum global** (*global optimum*).

- Algoritma *greedy* adalah algoritma yang memecahkan masalah langkah per langkah;

pada setiap langkah:

1. mengambil pilihan yang terbaik yang dapat diperoleh pada saat itu tanpa memperhatikan konsekuensi ke depan (prinsip “*take what you can get now!*”)
2. berharap bahwa dengan memilih optimum lokal pada setiap langkah akan berakhir dengan optimum global.

- Tinjau masalah penukaran uang:



Strategi *greedy*:

Pada setiap langkah, pilihlah koin dengan nilai terbesar dari himpunan koin yang tersisa.

- Misal:  $A = 32$ , koin yang tersedia: 1, 5, 10, dan 25  
*Langkah 1*: pilih 1 buah koin 25 (Total = 25)  
*Langkah 2*: pilih 1 buah koin 5 (Total =  $25 + 5 = 30$ )  
*Langkah 3*: pilih 2 buah koin 1 (Total =  $25 + 5 + 1 + 1 = 32$ )
- Solusi: Jumlah koin minimum = 4 (solusi optimal!)



Elemen-elemen algoritma greedy:

1. Himpunan kandidat,  $C$ .
2. Himpunan solusi,  $S$
3. Fungsi seleksi (*selection function*)
4. Fungsi kelayakan (*feasible*)
5. Fungsi obyektif

Dengan kata lain:

algoritma *greedy* melibatkan pencarian sebuah himpunan bagian,  $S$ , dari himpunan kandidat,  $C$ ; yang dalam hal ini,  $S$  harus memenuhi beberapa kriteria yang ditentukan, yaitu menyatakan suatu solusi dan  $S$  dioptimisasi oleh fungsi obyektif.

Pada masalah penukaran uang:

- *Himpunan kandidat*: himpunan koin yang merepresentasikan nilai 1, 5, 10, 25, paling sedikit mengandung satu koin untuk setiap nilai.
- *Himpunan solusi*: total nilai koin yang dipilih tepat sama jumlahnya dengan nilai uang yang ditukarkan.
- *Fungsi seleksi*: pilihlah koin yang bernilai tertinggi dari himpunan kandidat yang tersisa.
- *Fungsi layak*: memeriksa apakah nilai total dari himpunan koin yang dipilih tidak melebihi jumlah uang yang harus dibayar.
- *Fungsi obyektif*: jumlah koin yang digunakan minimum.

# Skema umum algoritma *greedy*:

```
function greedy(input C: himpunan_kandidat) → himpunan_kandidat  
{ Mengembalikan solusi dari persoalan optimasi dengan algoritma greedy  
  Masukan: himpunan kandidat C  
  Keluaran: himpunan solusi yang bertipe himpunan_kandidat  
}
```

## Deklarasi

```
x : kandidat  
S : himpunan_kandidat
```

## Algoritma:

```
S ← {} { inisialisasi S dengan kosong }  
while (not SOLUSI(S)) and (C ≠ {} ) do  
  x ← SELEKSI(C) { pilih sebuah kandidat dari C }  
  C ← C - {x} { elemen himpunan kandidat berkurang satu }  
  if LAYAK(S ∪ {x}) then  
    S ← S ∪ {x}  
  endif  
endwhile  
{ SOLUSI(S) or C = {} }  
  
if SOLUSI(S) then  
  return S  
else  
  write('tidak ada solusi')  
endif
```

- Pada akhir setiap lelaran, solusi yang terbentuk adalah optimum lokal.
- Pada akhir kalang while-do diperoleh optimum global.

- *Warning*: Optimum global belum tentu merupakan solusi optimum (terbaik), tetapi *sub-optimum* atau *pseudo-optimum*.
- Alasan:
  1. Algoritma *greedy* tidak beroperasi secara menyeluruh terhadap semua alternatif solusi yang ada (sebagaimana pada metode *exhaustive search*).
  2. Terdapat beberapa fungsi SELEKSI yang berbeda, sehingga kita harus memilih fungsi yang tepat jika kita ingin algoritma menghasilkan solusi optimal.
- Jadi, pada sebagian masalah algoritma *greedy* tidak selalu berhasil memberikan solusi yang optimal.

- **Contoh 2:** tinjau masalah penukaran uang.



(a) Koin: 5, 4, 3, dan 1

Uang yang ditukar = 7.

Solusi *greedy*:  $7 = 5 + 1 + 1$  ( 3 koin) → tidak optimal

Solusi optimal:  $7 = 4 + 3$  ( 2 koin)

(b) Koin: 10, 7, 1

Uang yang ditukar: 15

Solusi *greedy*:  $15 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (6 koin)

Solusi optimal:  $15 = 7 + 7 + 1$  (hanya 3 koin)

(c) Koin: 15, 10, dan 1

Uang yang ditukar: 20

Solusi *greedy*:  $20 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (6 koin)

Solusi optimal:  $20 = 10 + 10$  (2 koin)

- Untuk sistem mata uang dollar AS, euro Eropa, dan *crown* Swedia, algoritma *greedy* selalu memberikan solusi optimum.
- Contoh: Uang \$6,39 ditukar dengan uang kertas (*bill*) dan koin sen (*cent*), kita dapat memilih:
  - Satu buah uang kertas senilai \$5
  - Satu buah uang kertas senilai \$1
  - Satu koin 25 sen
  - Satu koin 10 sen
  - Empat koin 1 sen



$$\$5 + \$1 + 25c + 10c + 1c + 1c + 1c + 1c = \$6,39$$

- Jika jawaban terbaik mutlak tidak diperlukan, maka algoritma *greedy* sering berguna untuk menghasilkan solusi hampiran (*approximation*),
- daripada menggunakan algoritma yang lebih rumit untuk menghasilkan solusi yang eksak.
- Bila algoritma *greedy* optimum, maka keoptimalannya itu dapat dibuktikan secara matematis

# Contoh-contoh Algoritma Greedy

## 1. Masalah penukaran uang

Nilai uang yang ditukar:  $A$

Himpunan koin (*multiset*):  $\{d_1, d_2, \dots\}$ .

Himpunan solusi:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,

$x_i = 1$  jika  $d_i$  dipilih,  $x_i = 0$  jika  $d_i$  tidak dipilih.

Obyektif persoalan adalah

Minimisasi  $F = \sum_{i=1}^n x_i$  (fungsi obyektif)

dengan kendala  $\sum_{i=1}^n d_i x_i = A$



# Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Terdapat  $2^n$  kemungkinan solusi (nilai-nilai  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  )
- Untuk mengevaluasi fungsi obyektif =  $O(n)$
- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* seluruhnya =  $O(n \cdot 2^n)$ .

# Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Strategi *greedy*: Pada setiap langkah, pilih koin dengan nilai terbesar dari himpunan koin yang tersisa.

```
function CoinExchange(input C : himpunan_koin, A : integer) → himpunan_koin  
{ mengembalikan koin-koin yang total nilainya = A, tetapi jumlah koinnya minimum }
```

## Deklarasi

```
S : himpunan_koin  
x : koin
```

## Algoritma

```
S ← {}  
while ( $\sum(\text{nilai semua koin di dalam S}) \neq A$ ) and (C ≠ {} ) do  
    x ← koin yang mempunyai nilai terbesar  
    C ← C - {x}  
    if ( $\sum(\text{nilai semua koin di dalam S}) + \text{nilai koin x} \leq A$ ) then  
        S ← S ∪ {x}  
    endif  
endwhile  
  
if ( $\sum(\text{nilai semua koin di dalam S}) = A$ ) then  
    return S  
else  
    write('tidak ada solusi')  
endif
```

- Agar pemilihan koin berikutnya optimal, maka perlu mengurutkan himpunan koin dalam urutan yang menurun (*nonincreasing order*).
- Jika himpunan koin sudah terurut menurun, maka kompleksitas algoritma *greedy* =  $O(n)$ .
- Sayangnya, algoritma *greedy* untuk masalah penukaran uang ini tidak selalu menghasilkan solusi optimal (lihat contoh sebelumnya).

## 2. Minimisasi Waktu di dalam Sistem (Penjadwalan)

- **Persoalan:** Sebuah *server* (dapat berupa *processor*, pompa, kasir di bank, dll) mempunyai  $n$  pelanggan (*customer*, *client*) yang harus dilayani. Waktu pelayanan untuk setiap pelanggan  $i$  adalah  $t_i$ .

Minimumkan total waktu di dalam sistem:

$$T = \sum_{i=1}^n (\text{waktu di dalam sistem})$$

- Ekuivalen dengan meminimumkan waktu rata-rata pelanggan di dalam sistem.

**Contoh 3:** Tiga pelanggan dengan

$$t_1 = 5, \quad t_2 = 10, \quad t_3 = 3,$$

Enam urutan pelayanan yang mungkin:

---

---

| Urutan          | $T$  |
|-----------------|--|
| 1, 2, 3:        | $5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3) = 38$                                       |
| 1, 3, 2:        | $5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10) = 31$  |
| 2, 1, 3:        | $10 + (10 + 5) + (10 + 5 + 3) = 43$                                      |
| 2, 3, 1:        | $10 + (10 + 3) + (10 + 3 + 5) = 41$                                      |
| <b>3, 1, 2:</b> | <b><math>3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10) = 29 \leftarrow</math> (optimal)</b> |
| 3, 2, 1:        | $3 + (3 + 10) + (3 + 10 + 5) = 34$                                       |

---

---

# Penyelesaian dengan *Exhaustive Search*

- Urutan pelanggan yang dilayani oleh server merupakan suatu permutasi
- Jika ada  $n$  orang pelanggan, maka terdapat  $n!$  urutan pelanggan
- Untuk mengevaluasi fungsi obyektif :  $O(n)$
- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* =  $O(nn!)$

# Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Strategi *greedy*: Pada setiap langkah, pilih pelanggan yang membutuhkan waktu pelayanan terkecil di antara pelanggan lain yang belum dilayani.

```
function PenjadwalanPelanggan(input C : himpunan_pelanggan) → himpunan_pelanggan  
{ mengembalikan urutan jadwal pelayanan pelanggan yang meminimumkan waktu di dalam sistem }
```

## **Deklarasi**

```
S : himpunan_pelanggan  
i : pelanggann
```

## **Algoritma**

```
S ← {}  
while (C ≠ {}) do  
    i ← pelanggan yang mempunyai t[i] terkecil  
    C ← C - {i}  
    S ← S ∪ {i}  
endwhile  
  
return S
```

- Agar proses pemilihan pelanggan berikutnya optimal, urutkan pelanggan berdasarkan waktu pelayanan dalam urutan yang menaik.
- Jika pelanggan sudah terurut, kompleksitas algoritma *greedy* =  $O(n)$ .

```
procedure PenjadwalanPelanggan(input n:integer)
```

```
{ Mencetak informasi deretan pelanggan yang akan diproses oleh server tunggal
```

```
  Masukan: n pelanggan, setiap pelanggan dinomori 1, 2, ..., n
```

```
  Keluaran: urutan pelanggan yang dilayani
```

```
}
```

```
Deklarasi
```

```
  i : integer
```

```
Algoritma:
```

```
{pelanggan 1, 2, ..., n sudah diurut menaik berdasarkan  $t_i$ }
```

```
for i←1 to n do
```

```
  write('Pelanggan ', i, ' dilayani!')
```

```
endfor
```



- Algoritma *greedy* untuk penjadwalan pelanggan akan selalu menghasilkan solusi optimum.
- **Teorema.** Jika  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  maka pengurutan  $i_j = j, 1 \leq j \leq n$  meminimumkan

$$T = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k t_{i_j}$$

untuk semua kemungkinan permutasi  $i_j$ .

### 3. *An Activity Selection Problem*

- **Persoalan:** Misalkan kita memiliki  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  yang menyatakan  $n$  buah aktivitas yang ingin menggunakan sebuah *resource*, misalnya ruang pertemuan, yang hanya dapat digunakan satu aktivitas setiap saat.

Tiap aktivitas  $i$  memiliki waktu mulai  $s_i$  dan waktu selesai  $f_i$ , dimana  $s_i \leq f_i$ . Dua aktivitas  $i$  dan  $j$  dikatakan **kompatibel** jika interval  $[s_i, f_i]$  dan  $[s_j, f_j]$  tidak bentrok.

Masalah *Activity selection problem* ialah memilih sebanyak mungkin aktivitas yang bisa dilayani.

## Contoh Instansiasi Persoalan:

| $i$ | $s_i$ | $f_i$ |
|-----|-------|-------|
| 1   | 1     | 4     |
| 2   | 3     | 5     |
| 3   | 4     | 6     |
| 4   | 5     | 7     |
| 5   | 3     | 8     |
| 6   | 7     | 9     |
| 7   | 10    | 11    |
| 8   | 8     | 12    |
| 9   | 8     | 13    |
| 10  | 2     | 14    |
| 11  | 13    | 15    |

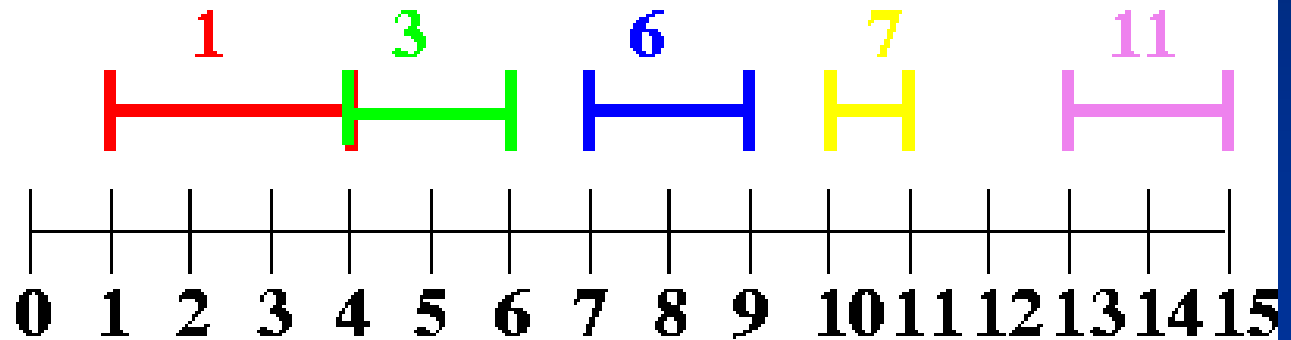
# Penyelesaian dengan *Exhaustive Search*

- Tentukan semua himpunan bagian dari himpunan dengan  $n$  aktivitas.
- Evaluasi setiap himpunan bagian apakah semua aktivitas di dalamnya kompatibel.
- Jika kompatibel, maka himpunan bagian tersebut adalah solusinya
- Kompleksitas waktu algoritmanya  $O(2^n)$

- Apa strategi *greedy-nya*?
  1. Urutkan semua aktivitas berdasarkan waktu selesai dari kecil ke besar
  2. Pada setiap step, pilih aktivitas yang waktu mulainya lebih besar atau sama dengan waktu selesai aktivitas yang dipilih sebelumnya

| $i$ | $s_i$ | $f_i$ |
|-----|-------|-------|
| 1   | 1     | 4     |
| 2   | 3     | 5     |
| 3   | 4     | 6     |
| 4   | 5     | 7     |
| 5   | 3     | 8     |
| 6   | 7     | 9     |
| 7   | 10    | 11    |
| 8   | 8     | 12    |
| 9   | 8     | 13    |
| 10  | 2     | 14    |
| 11  | 13    | 15    |

- $A = \{1\}, f_j = 4$
- $A = \{1,3\}, f_j = 6$
- $A = \{1,3,6\}, f_j = 9$
- $A = \{1,3,6,7\}, f_j = 11$
- $A = \{1,3,6,7,11\}, f_j = 15$



**Solusi:** aktivitas yang dipilih adalah 1, 3, 6, 7, dan 11 (5 aktivitas)

- Usulan strategi *greedy* yang lain: pilih aktivitas yang durasinya paling kecil lebih dahulu dan waktu mulainya tidak lebih besar dari waktu selesai aktivitas lain yang telah terpilih

→ lebih rumit

| $i$       | $s_i$ | $f_i$ | durasi   |
|-----------|-------|-------|----------|
| 1         | 1     | 4     | 3        |
| <b>2</b>  | 3     | 5     | <b>2</b> |
| 3         | 4     | 6     | 2        |
| <b>4</b>  | 5     | 7     | <b>2</b> |
| 5         | 3     | 8     | 5        |
| <b>6</b>  | 7     | 9     | <b>2</b> |
| <b>7</b>  | 10    | 11    | <b>1</b> |
| 8         | 8     | 12    | 4        |
| 9         | 8     | 13    | 5        |
| 10        | 2     | 14    | 12       |
| <b>11</b> | 13    | 15    | <b>2</b> |

Solusi: aktivitas 7, 2, 4, 6, dan 11 (5 aktivitas)



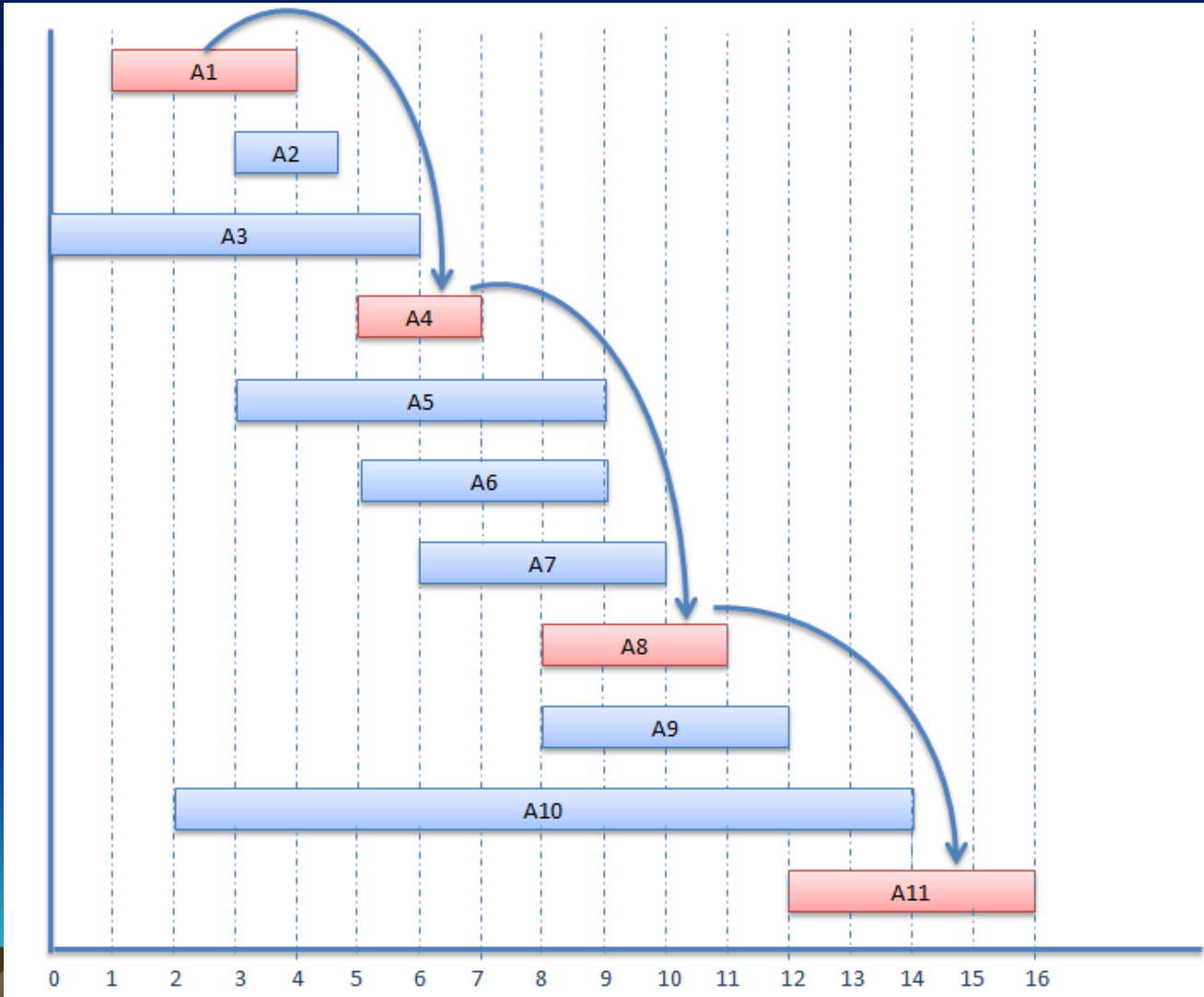
# Contoh lain:

## Example

| Start time (si) | finish time (fi) | Activity name |
|-----------------|------------------|---------------|
| 1               | 4                | A1            |
| 3               | 5                | A2            |
| 0               | 6                | A3            |
| 5               | 7                | A4            |
| 3               | 9                | A5            |
| 5               | 9                | A6            |
| 6               | 10               | A7            |
| 8               | 11               | A8            |
| 8               | 12               | A9            |
| 2               | 14               | A10           |
| 12              | 16               | A11           |

Sumber: [http://scanfree.com/Data\\_Structure/activity-selection-problem](http://scanfree.com/Data_Structure/activity-selection-problem)

- Solusi dengan Algoritma *Greedy*:



# Algoritma

**function** Greedy-Activity-Selector(*s*, *f*)  
{ *Asumsi: aktivitas sudah diurut terlebih dahulu*  
*Berdasarkan waktu selesai:  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$*  }

Algoritma

```
n ← length(s)
A ← {1}
j ← 1
for i ← 2 to n do
    if  $s_i \geq f_j$  then
        A ← A ∪ {i}
        j ← i
    end
end
```

Kompleksitas algoritma:  $O(n)$  {jika waktu pengurutan tidak diperhitungkan}

Bukti:

**The greedy-choice property:**

*There exists an optimal solution  $A$  such that the greedy choice "1" is in  $A$ .*

The proof goes as follows:

- ▶ let's order the activities in  $A$  by finish time such that the first activity in  $A$  is " $k_1$ ".
- ▶ If  $k_1 = 1$ , then  $A$  begins with a greedy choice
- ▶ If  $k_1 \neq 1$ , then let  $A' = (A - \{k_1\}) \cup \{1\}$ .  
Then
  1. the sets  $A - \{k_1\}$  and  $\{1\}$  are disjoint
  2. the activities in  $A'$  are compatible
  3.  $A'$  is also optimal, since  $|A'| = |A|$
- ▶ Therefore, we conclude that there always exists an optimal solution that begins with a greedy choice.

Sumber: <http://web.cs.ucdavis.edu/~bai/ECS122A/ActivitySelect.pdf>

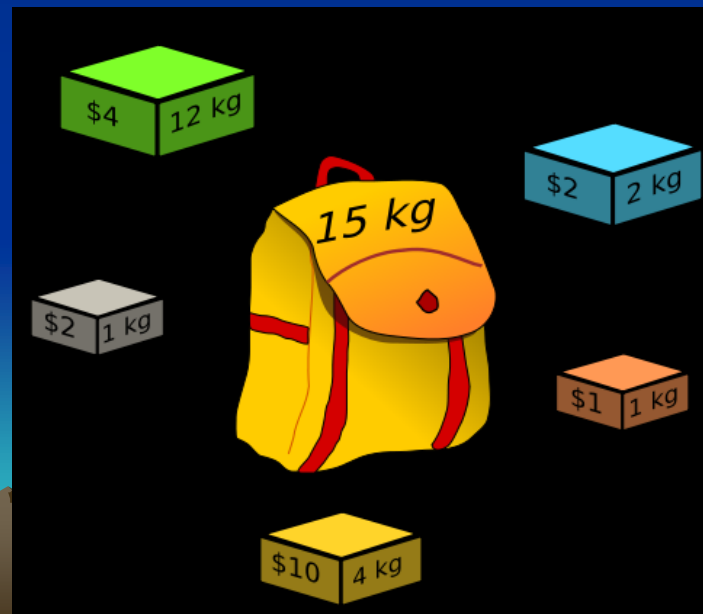
## 4. Integer Knapsack

Maksimasi  $F = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini,  $x_i = 0$  atau  $1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$



# Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Sudah dijelaskan pada pembahasan *exhaustive search*.
- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* untuk persoalan ini =  $O(n \cdot 2^n)$ .



# Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Masukkan objek satu per satu ke dalam *knapsack*. Sekali objek dimasukkan ke dalam *knapsack*, objek tersebut tidak bisa dikeluarkan lagi.
- Terdapat beberapa strategi *greedy* yang heuristik yang dapat digunakan untuk memilih objek yang akan dimasukkan ke dalam *knapsack*:



## 1. *Greedy by profit.*

- Pada setiap langkah, pilih objek yang mempunyai keuntungan terbesar.
- Mencoba memaksimalkan keuntungan dengan memilih objek yang paling menguntungkan terlebih dahulu.



## 2. *Greedy by weight.*

- Pada setiap langkah, pilih objek yang mempunyai berat teringan.
- Mencoba memaksimalkan keuntungan dengan dengan memasukkan sebanyak mungkin objek ke dalam *knapsack*.



### 3. *Greedy by density.*

- Pada setiap langkah, *knapsack* diisi dengan objek yang mempunyai  $p_i/w_i$  terbesar.
  - Mencoba memaksimalkan keuntungan dengan memilih objek yang mempunyai keuntungan per unit berat terbesar.
- Pemilihan objek berdasarkan salah satu dari ketiga strategi di atas tidak menjamin akan memberikan solusi optimal.



## Contoh 4.

$$w_1 = 6; \quad p_1 = 12; \quad w_2 = 5; \quad p_2 = 15;$$

$$w_3 = 10; \quad p_3 = 50; \quad w_4 = 5; \quad p_4 = 10$$

Kapasitas *knapsack*  $K = 16$



| Properti objek   |       |       |           | <i>Greedy by</i> |               |                | Solusi  |
|------------------|-------|-------|-----------|------------------|---------------|----------------|---------|
| $i$              | $w_i$ | $p_i$ | $p_i/w_i$ | <i>profit</i>    | <i>weight</i> | <i>density</i> | Optimal |
| 1                | 6     | 12    | 2         | 0                | 1             | 0              | 0       |
| 2                | 5     | 15    | 3         | 1                | 1             | 1              | 1       |
| 3                | 10    | 50    | 5         | 1                | 0             | 1              | 1       |
| 4                | 5     | 10    | 2         | 0                | 1             | 0              | 0       |
| Total bobot      |       |       |           | 15               | 16            | 15             | 15      |
| Total keuntungan |       |       |           | 65               | 37            | 65             | 65      |

- Solusi optimal:  $X = (0, 1, 1, 0)$
- *Greedy by profit* dan *greedy by density* memberikan solusi optimal<sub>42</sub>

## Contoh 5.

$w_1 = 100$ ;  $p_1 = 40$ ;  $w_2 = 50$ ;  $p_2 = 35$ ;  $w_3 = 45$ ;  $p_3 = 18$ ;

$w_4 = 20$ ;  $p_4 = 4$ ;  $w_5 = 10$ ;  $p_5 = 10$ ;  $w_6 = 5$ ;  $p_6 = 2$

Kapasitas *knapsack*  $K = 100$

| Properti objek   |       |       |           | <i>Greedy by</i> |               |                | Solusi  |
|------------------|-------|-------|-----------|------------------|---------------|----------------|---------|
| $i$              | $w_i$ | $p_i$ | $p_i/w_i$ | <i>profit</i>    | <i>weight</i> | <i>density</i> | Optimal |
| 1                | 100   | 40    | 0,4       | 1                | 0             | 0              | 0       |
| 2                | 50    | 35    | 0,7       | 0                | 0             | 1              | 1       |
| 3                | 45    | 18    | 0,4       | 0                | 1             | 0              | 1       |
| 4                | 20    | 4     | 0,2       | 0                | 1             | 1              | 0       |
| 5                | 10    | 10    | 1,0       | 0                | 1             | 1              | 0       |
| 6                | 5     | 2     | 0,4       | 0                | 1             | 1              | 0       |
| Total bobot      |       |       |           | 100              | 80            | 85             | 100     |
| Total keuntungan |       |       |           | 40               | 34            | 51             | 55      |

Ketiga strategi gagal memberikan solusi optimal!

**Kesimpulan:** Algoritma *greedy* tidak selalu berhasil menemukan solusi optimal untuk masalah 0/1 *Knapsack*.



## 4. Fractional Knapsack



Maksimasi  $F = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini,  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

# Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Oleh karena  $0 \leq x_i \leq 1$ , maka terdapat tidak berhingga nilai-nilai  $x_i$ .
- Persoalan *Fractional Knapsack* menjadi malar (*continuous*) sehingga tidak mungkin dipecahkan dengan algoritma *exhaustive search*.



# Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Ketiga strategi *greedy* yang telah disebutkan di atas dapat digunakan untuk memilih objek yang akan dimasukkan ke dalam *knapsack*.



- Mari kita bahas satu per satu

## Contoh 6.

$w_1 = 18$ ;  $p_1 = 25$ ;  $w_2 = 15$ ;  $p_2 = 24$

$w_3 = 10$ ;  $p_3 = 15$  Kapasitas *knapsack*  $K = 20$

| Properti objek   |       |       |           | <i>Greedy by</i> |               |                |
|------------------|-------|-------|-----------|------------------|---------------|----------------|
| $i$              | $w_i$ | $p_i$ | $p_i/w_i$ | <i>profit</i>    | <i>weight</i> | <i>density</i> |
| 1                | 18    | 25    | 1,4       | 1                | 0             | 0              |
| 2                | 15    | 24    | 1,6       | 2/15             | 2/3           | 1              |
| 3                | 10    | 15    | 1,5       | 0                | 1             | 1/2            |
| Total bobot      |       |       |           | 20               | 20            | 20             |
| Total keuntungan |       |       |           | 28,2             | 31,0          | 31,5           |

- Solusi optimal:  $X = (0, 1, 1/2)$
- yang memberikan keuntungan maksimum = 31,5.



- Strategi pemilihan objek ke dalam *knapsack* berdasarkan densitas  $p_i/w_i$  terbesar pasti memberikan solusi optimal.
- Agar proses pemilihan objek berikutnya optimal, maka kita urutkan objek berdasarkan  $p_i/w_i$  yang menurun, sehingga objek berikutnya yang dipilih adalah objek sesuai dalam urutan itu.

**Teorema 3.2.** Jika  $p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \dots \geq p_n/w_n$  maka algoritma *greedy* dengan strategi pemilihan objek berdasarkan  $p_i/w_i$  terbesar menghasilkan solusi yang optimum.

- Algoritma persoalan *fractional knapsack*:
  1. Hitung harga  $p_i/w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
  2. Urutkan seluruh objek berdasarkan nilai  $p_i/w_i$  dari besar ke kecil
  3. Panggil `FractinonalKnapsack`

```
function FractionalKnapsack(input C : himpunan_objek, K : real) → himpunan_solusi
```

```
{ Menghasilkan solusi persoalan fractional knapsack dengan algoritma greedy yang menggunakan strategi pemilihan objek berdasarkan density ( $p_i/w_i$ ). Solusi dinyatakan sebagai vektor  $X = x[1], x[2], \dots, x[n]$ .
```

```
Asumsi: Seluruh objek sudah terurut berdasarkan nilai  $p_i/w_i$  yang menurun  
}
```

#### Deklarasi

```
i, TotalBobot : integer  
MasihMuatUtuh : boolean  
x : himpunan_solusi
```

#### Algoritma:

```
for i ← 1 to n do  
  x[i] ← 0 { inisialisasi setiap fraksi objek i dengan 0 }  
endfor
```

```
i ← 0
```

```
TotalBobot ← 0
```

```
MasihMuatUtuh ← true
```

```
while (i ≤ n) and (MasihMuatUtuh) do  
  { tinjau objek ke-i }
```

```
  i ← i + 1
```

```
  if TotalBobot + C.w[i] ≤ K then  
    { masukkan objek i ke dalam knapsack }
```

```
    x[i] ← 1
```

```
    TotalBobot ← TotalBobot + C.w[i]
```

```
  else
```

```
    MasihMuatUtuh ← false
```

```
    x[i] ← (K - TotalBobot)/C.w[i]
```

```
  endif
```

```
endwhile
```

```
{ i > n or not MasihMuatUtuh }
```

```
return x
```

## 5. Penjadwalan *Job* dengan Tenggat Waktu (*Job Scheduling with Deadlines*)

### Persoalan:

- Ada  $n$  buah *job* yang akan dikerjakan oleh sebuah mesin;
- tiap *job* diproses oleh mesin selama 1 satuan waktu dan tenggat waktu (*deadline*) setiap *job*  $i$  adalah  $d_i \geq 0$ ;
- *job*  $i$  akan memberikan keuntungan sebesar  $p_i$  jika dan hanya jika *job* tersebut diselesaikan tidak melebihi tenggat waktunya;

- Bagaimana memilih *job-job* yang akan dikerjakan oleh mesin sehingga keuntungan yang diperoleh dari pengerjaan itu maksimum?

- Fungsi obyektif persoalan ini:

$$\text{Maksimasi } F = \sum_{i \in J} p_i$$

- Solusi layak: himpunan  $J$  yang berisi urutan *job* yang sedemikian sehingga setiap *job* di dalam  $J$  selesai dikerjakan sebelum tenggat waktunya.
- Solusi optimum ialah solusi layak yang memaksimumkan  $F$ .

**Contoh 7.** Misalkan A berisi 4 *job* ( $n = 4$ ):

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (50, 10, 15, 30)$$

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 1, 2, 1)$$

Mesin mulai bekerja jam 6.00 pagi.

| <i>Job</i> | Tenggat<br>( $d_i$ ) | Harus selesai<br>sebelum pukul |
|------------|----------------------|--------------------------------|
| 1          | 2 jam                | 8.00                           |
| 2          | 1 jam                | 7.00                           |
| 3          | 2 jam                | 8.00                           |
| 4          | 1 jam                | 7.00                           |

## Pemecahan Masalah dengan *Exhaustive Search*

Cari himpunan bagian (*subset*) *job* yang layak dan memberikan total keuntungan terbesar.

| <u>Barisan <i>job</i></u> | <u>Total keuntungan (<i>F</i>)</u> | <u>keterangan</u>       |
|---------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| {}                        | 0                                  | layak                   |
| {1}                       | 50                                 | layak                   |
| {2}                       | 10                                 | layak                   |
| {3}                       | 15                                 | layak                   |
| {4}                       | 30                                 | layak                   |
| {1, 2}                    | -                                  | tidak layak             |
| {1, 3}                    | 65                                 | layak                   |
| {1, 4}                    | -                                  | tidak layak             |
| {2, 1}                    | 60                                 | layak                   |
| {2, 3}                    | 25                                 | layak                   |
| {2, 4}                    | -                                  | tidak layak             |
| {3, 1}                    | 65                                 | layak                   |
| {3, 2}                    | -                                  | tidak layak             |
| {3, 4}                    | -                                  | tidak layak             |
| <b>{4, 1}</b>             | <b>80</b>                          | <b>layak (Optimum!)</b> |
| {4, 2}                    | -                                  | tidak layak             |
| {4, 3}                    | 45                                 | layak                   |



## Pemecahan Masalah dengan Algoritma Greedy

- Strategi *greedy* untuk memilih *job*:

Pada setiap langkah, pilih *job*  $i$  dengan  $p_i$  yang terbesar untuk menaikkan nilai fungsi obyektif  $F$ .

Contoh:  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (50, 10, 15, 30)$   
 $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 1, 2, 1)$

| Langkah | $J$       | $F = \sum p_i$ | Keterangan  |
|---------|-----------|----------------|-------------|
| 0       | {}        | 0              | -           |
| 1       | {1}       | 50             | layak       |
| 2       | {4,1}     | $50 + 30 = 80$ | layak       |
| 3       | {4, 1, 3} | -              | tidak layak |
| 4       | {4, 1, 2} | -              | tidak layak |

Solusi optimal:  $J = \{4, 1\}$  dengan  $F = 80$ .

```
function JobSchedulling1(input C : himpunan_job) → himpunan_job  
{ Menghasilkan barisan job yang akan diproses oleh mesin }
```

### Deklarasi

```
i : integer  
J : himpunan_job { solusi }
```

### Algoritma

```
J ← {}  
while C ≠ {} do  
    i ← job yang mempunyai p[i] terbesar  
    C ← C - {i}  
    if (semua job di dalam J ∪ {i} layak) then  
        J ← J ∪ {i}  
    endif  
endwhile  
{ C = {} }  
return J
```

Kompleksitas algoritma *greedy* :  $O(n^2)$ .

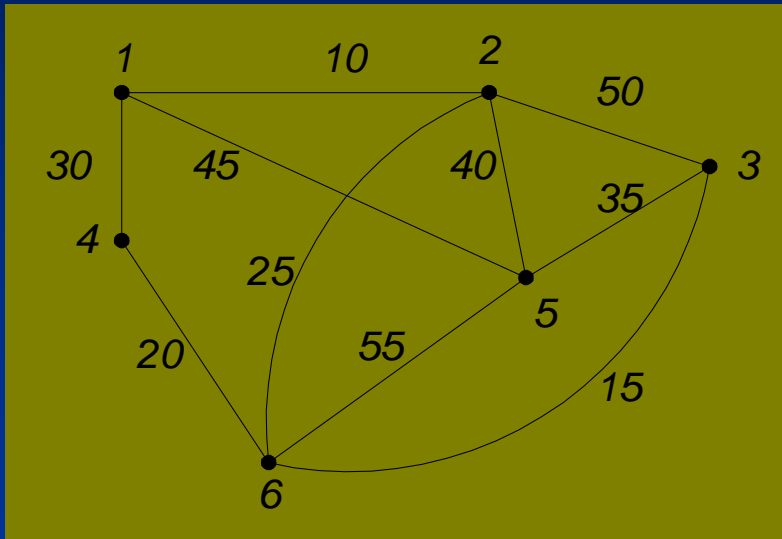
**Theorem 4.4** The greedy method described above always obtains an optimal solution to the job sequencing problem.

**Proof:** Let  $(p_i, d_i), 1 \leq i \leq n$ , define any instance of the job sequencing problem. Let  $I$  be the set of jobs selected by the greedy method. Let  $J$  be the set of jobs in an optimal solution. We now show that both  $I$  and  $J$  have the same profit values and so  $I$  is also optimal. We can assume  $I \neq J$  as otherwise we have nothing to prove. Note that if  $J \subset I$ , then  $J$  cannot be optimal. Also, the case  $I \subset J$  is ruled out by the greedy method. So, there exist jobs  $a$  and  $b$  such that  $a \in I, a \notin J, b \in J, \text{ and } b \notin I$ . Let  $a$  be a highest-profit job such that  $a \in I$  and  $a \notin J$ . It follows from the greedy method that  $p_a \geq p_b$  for all jobs  $b$  that are in  $J$  but not in  $I$ . To see this, note that if  $p_b > p_a$ , then the greedy method would consider job  $b$  before job  $a$  and include it into  $I$ .

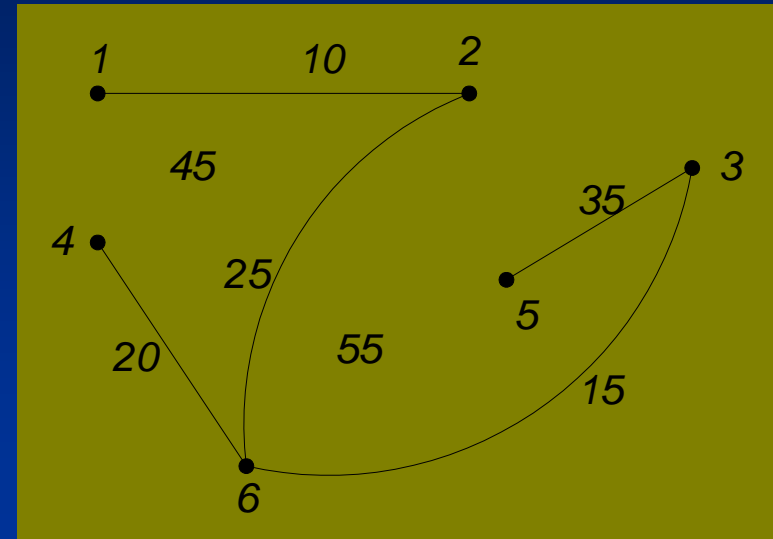
Now, consider feasible schedules  $S_I$  and  $S_J$  for  $I$  and  $J$  respectively. Let  $i$  be a job such that  $i \in I$  and  $i \in J$ . Let  $i$  be scheduled from  $t$  to  $t + 1$  in  $S_I$  and  $t'$  to  $t' + 1$  in  $S_J$ . If  $t < t'$ , then we can interchange the job (if any) scheduled in  $[t', t' + 1]$  in  $S_I$  with  $i$ . If no job is scheduled in  $[t', t' + 1]$  in  $I$ , then  $i$  is moved to  $[t', t' + 1]$ . The resulting schedule is also feasible. If  $t' < t$ , then a similar transformation can be made in  $S_J$ . In this way, we can obtain schedules  $S'_I$  and  $S'_J$  with the property that all jobs common to  $I$  and  $J$  are scheduled at the same time. Consider the interval  $[t_a, t_a + 1]$  in  $S'_I$  in which the job  $a$  (defined above) is scheduled. Let  $b$  be the job (if any) scheduled in  $S'_J$  in this interval. From the choice of  $a, p_a \geq p_b$ . Scheduling  $a$  from  $t_a$  to  $t_a + 1$  in  $S'_J$  and discarding job  $b$  gives us a feasible schedule for job set  $J' = J - \{b\} \cup \{a\}$ . Clearly,  $J'$  has a profit value no less than that of  $J$  and differs from  $I$  in one less job than  $J$  does.

By repeatedly using the transformation just described,  $J$  can be transformed into  $I$  with no decrease in profit value. So  $I$  must be optimal.  $\square$

# 6. Pohon Merentang Minimum



(a) Graf  $G = (V, E)$



(b) Pohon merentang minimum

## *(a) Algoritma Prim*

- Strategi *greedy* yang digunakan:  
Pada setiap langkah, pilih sisi  $e$  dari graf  $G(V, E)$  yang mempunyai bobot terkecil dan bersisian dengan simpul-simpul di  $T$  tetapi  $e$  tidak membentuk sirkuit di  $T$ .

## Algoritma Prim

Langkah 1: ambil sisi dari graf  $G$  yang berbobot minimum, masukkan ke dalam  $T$ .

Langkah 2: pilih sisi  $(u, v)$  yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di  $T$ , tetapi  $(u, v)$  tidak membentuk sirkuit di  $T$ . Masukkan  $(u, v)$  ke dalam  $T$ .

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak  $n - 2$  kali.

```

procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung-
berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung  $G = (V, E)$ , dengan  $|V| = n$ 
Keluaran: pohon rentang minimum  $T = (V, E')$ 
}

```

### Deklarasi

$i, p, q, u, v$  : integer

### Algoritma

Cari sisi  $(p, q)$  dari  $E$  yang berbobot terkecil

$T \leftarrow \{(p, q)\}$

for  $i \leftarrow 1$  to  $n-2$  do

    Pilih sisi  $(u, v)$  dari  $E$  yang bobotnya terkecil namun  
    bersisian dengan simpul di  $T$

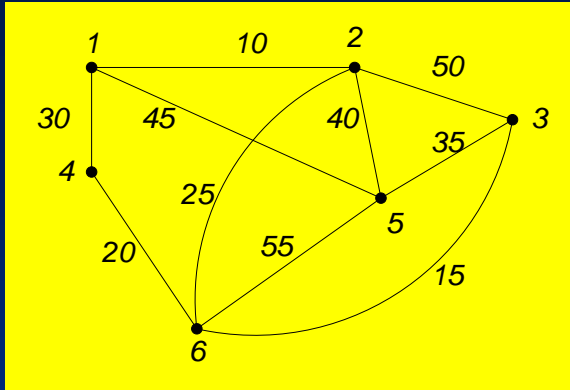
$T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$

endfor

Kompleksitas algoritma:  $O(n^2)$



# Contoh:



| Langkah | Sisi   | Bobot | Pohon rentang |
|---------|--------|-------|---------------|
| 1       | (1, 2) | 10    |               |
| 2       | (2, 6) | 25    |               |
| 3       | (3, 6) | 15    |               |
| 4       | (4, 6) | 20    |               |
| 5       | (3, 5) | 35    |               |

## ***(a) Algoritma Kruskal***

- Strategi *greedy* yang digunakan:

Pada setiap langkah, pilih sisi  $e$  dari graf  $G$  yang mempunyai bobot minimum tetapi  $e$  tidak membentuk sirkuit di  $T$ .

## Algoritma Kruskal

( Langkah 0: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya – dari bobot kecil ke bobot besar)

Langkah 1:  $T$  masih kosong

Langkah 2: pilih sisi  $(u, v)$  dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$ . Tambahkan  $(u, v)$  ke dalam  $T$ .

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak  $n - 1$  kali.

```

procedure Kruskal(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung -
berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung  $G = (V, E)$ , dengan  $|V| = n$ 
Keluaran: pohon rentang minimum  $T = (V, E')$ 
}

```

### Deklarasi

$i, p, q, u, v$  : integer

### Algoritma

( Asumsi: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya - dari bobot kecil ke bobot besar)

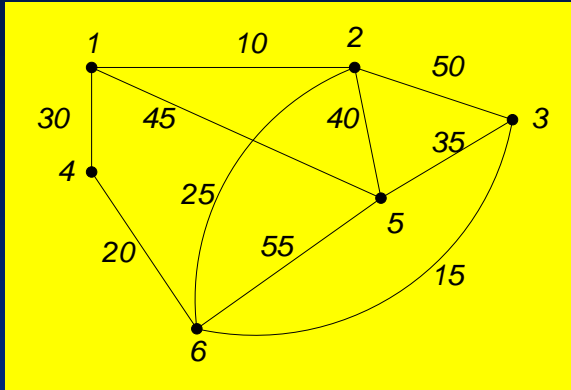
```

T ← {}
while jumlah sisi T < n-1 do
  Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil
  if (u,v) tidak membentuk siklus di T then
    T ← T ∪ {(u,v)}
  endif
endfor

```

Kompleksitas algoritma:  $O(|E| \log |E|)$

# Contoh:



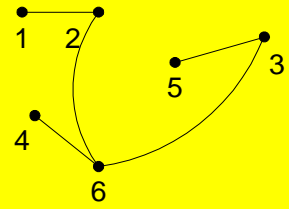
Sisi-sisi diurut menaik:

| Sisi  | (1,2) | (3,6) | (4,6) | (2,6) | (1,4) | (3,5) | (2,5) | (1,5) | (2,3) | (5,6) |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Bobot | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    | 35    | 40    | 45    | 50    | 55    |

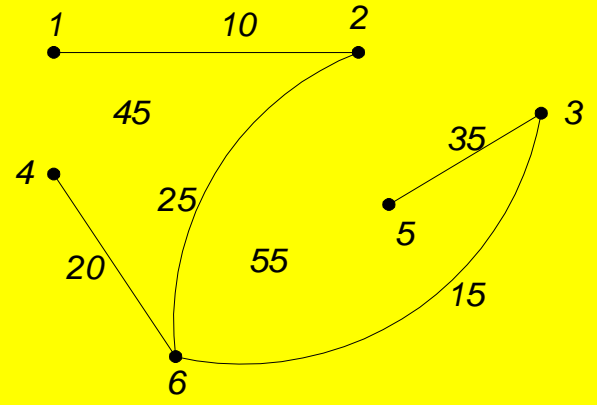
| Langkah | Sisi   | Bobot | Hutan merentang |
|---------|--------|-------|-----------------|
| 0       |        |       |                 |
| 1       | (1, 2) | 10    |                 |
| 2       | (3, 6) | 15    |                 |
| 3       | (4, 6) | 20    |                 |
| 4       | (2, 6) | 25    |                 |

5 (1, 4) 30 ditolak

6 (3, 5) 35



Pohon merentang minimum yang dihasilkan:



$$\text{Bobot} = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

**Theorem 4.6** Kruskal's algorithm generates a minimum-cost spanning tree for every connected undirected graph  $G$ .

**Proof:** Let  $G$  be any undirected connected graph. Let  $t$  be the spanning tree for  $G$  generated by Kruskal's algorithm. Let  $t'$  be a minimum-cost spanning tree for  $G$ . We show that both  $t$  and  $t'$  have the same cost.

Let  $E(t)$  and  $E(t')$  respectively be the edges in  $t$  and  $t'$ . If  $n$  is the number of vertices in  $G$ , then both  $t$  and  $t'$  have  $n - 1$  edges. If  $E(t) = E(t')$ , then  $t$  is clearly of minimum cost. If  $E(t) \neq E(t')$ , then let  $q$  be a minimum-cost edge such that  $q \in E(t)$  and  $q \notin E(t')$ . Clearly, such a  $q$  must exist. The inclusion of  $q$  into  $t'$  creates a unique cycle (Exercise 5). Let  $q, e_1, e_2, \dots, e_k$  be this unique cycle. At least one of the  $e_i$ 's,  $1 \leq i \leq k$ , is not in  $E(t)$  as otherwise  $t$  would also contain the cycle  $q, e_1, e_2, \dots, e_k$ . Let  $e_j$  be an edge on this cycle such that  $e_j \notin E(t)$ . If  $e_j$  is of lower cost than  $q$ , then Kruskal's algorithm will consider  $e_j$  before  $q$  and include  $e_j$  into  $t$ . To see this, note that all edges in  $E(t)$  of cost less than the cost of  $q$  are also in  $E(t')$  and do not form a cycle with  $e_j$ . So  $\text{cost}(e_j) \geq \text{cost}(q)$ .

Now, reconsider the graph with edge set  $E(t') \cup \{q\}$ . Removal of any edge on the cycle  $q, e_1, e_2, \dots, e_k$  will leave behind a tree  $t''$  (Exercise 5). In particular, if we delete the edge  $e_j$ , then the resulting tree  $t''$  will have a cost no more than the cost of  $t'$  (as  $\text{cost}(e_j) \geq \text{cost}(q)$ ). Hence,  $t''$  is also a minimum-cost tree.

By repeatedly using the transformation described above, tree  $t'$  can be transformed into the spanning tree  $t$  without any increase in cost. Hence,  $t$  is a minimum-cost spanning tree.  $\square$

## 7. Lintasan Terpendek (*Shortest Path*)

Beberapa macam persoalan lintasan terpendek:

- a) Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu (*a pair shortest path*).
- b) Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul (*all pairs shortest path*).
- c) Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain (*single-source shortest path*).
- d) Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu (*intermediate shortest path*).

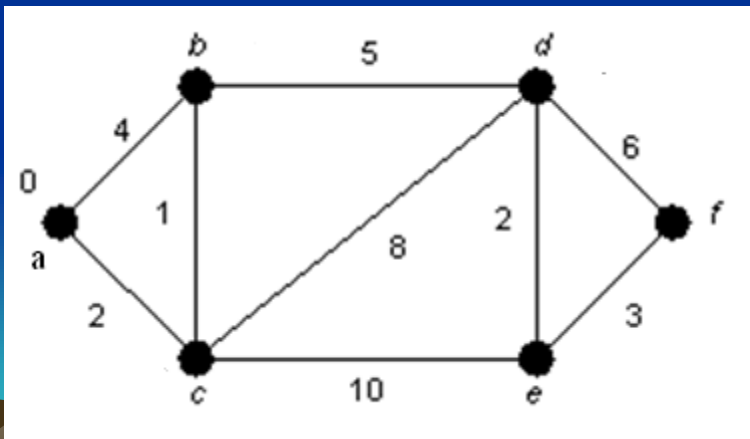
→ Yang akan dibahas adalah persoalan c)



## Persoalan:

Diberikan graf berbobot  $G = (V, E)$ . Tentukan lintasan terpendek dari sebuah simpul asal  $a$  ke setiap simpul lainnya di  $G$ .

Asumsi yang kita buat adalah bahwa semua sisi berbobot positif.



Berapa jarak terpendek berikut lintasannya dari:

a ke b?

a ke c?

a ke d?

a ke e?

a ke f?

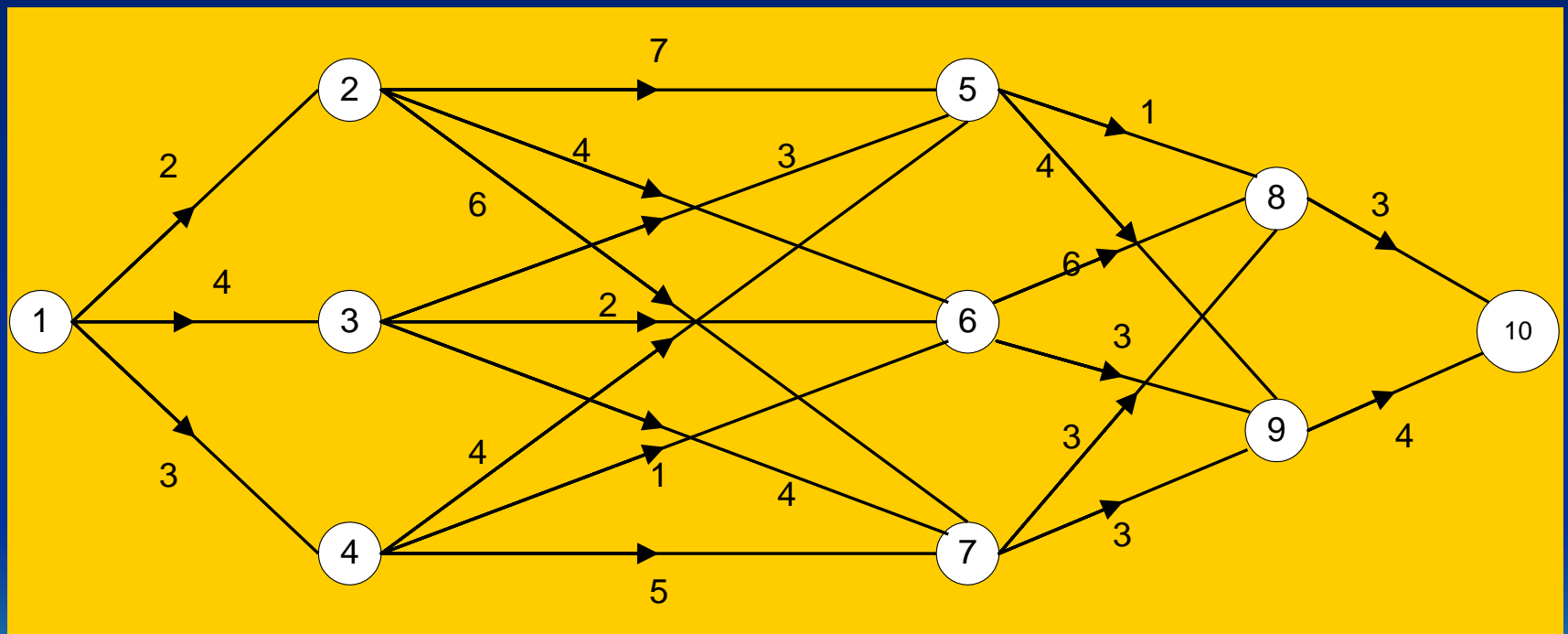
# Penyelesaian dengan Algoritma *Brute Force*

- Misalkan ingin menentukan jarak terpendek dari a ke b
- Enumerasi semua lintasan yang mungkin dibentuk dari a ke b, hitung panjangnya
- Lintasan yang memiliki panjang terkecil adalah lintasan terpendek dari a ke b
- Ulangi cara yang sama untuk jarak terpendek dari a ke c, dari a ke d, dan seterusnya.

# Penyelesaian dengan Algoritma Greedy

- Misalkan ingin menentukan jarak terpendek dari  $a$  ke  $b$
- Strategi greedy: pada setiap langkah, pilih sisi  $(u, v)$  dengan bobot terkecil
- Ulangi cara yang sama untuk jarak terpendek dari  $a$  ke  $c$ , dari  $a$  ke  $d$ , dan seterusnya.

- Strategi greedy di atas tidak selalu menjamin solusi optimal
- Contoh: Lintasan terpendek dari 1 ke 10 !



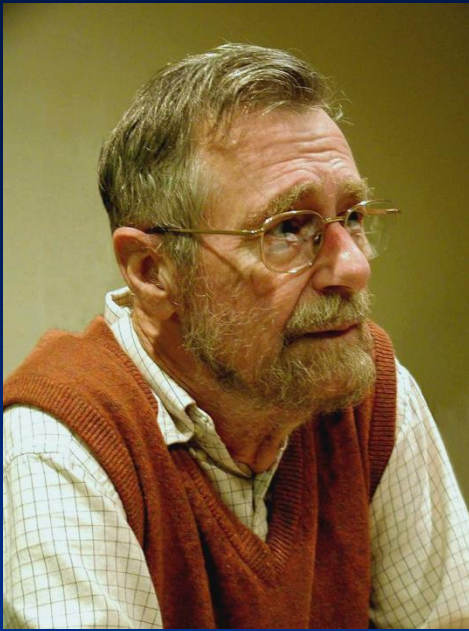
*Greedy:* 1 – 2 – 6 – 9 – 10 dengan  $cost = 2 + 4 + 3 + 4 = 13 \rightarrow$  Tidak optimal

*Solusi optimal:* 1 – 3 – 5 – 8 – 10 dengan  $cost = 4 + 3 + 1 + 2 = 11$

# Algoritma Dijkstra

- Merupakan algoritma yang optimal untuk menentukan lintasan terpendek.
- **Strategi *greedy*:**  
Pada setiap langkah, ambil sisi yang berbobot minimum yang menghubungkan sebuah simpul yang sudah terpilih dengan sebuah simpul lain yang belum terpilih.

Lintasan dari simpul asal ke simpul yang baru haruslah merupakan lintasan yang terpendek diantara semua lintasannya ke simpul-simpul yang belum terpilih.



# Edsger W. Dijkstra (1930–2002)

- Edsger Wybe Dijkstra was one of the most influential members of computing science's founding generation. Among the domains in which his scientific contributions are fundamental are
- algorithm design
- programming languages
- program design
- operating systems
- distributed processing

In addition, Dijkstra was intensely interested in teaching, and in the relationships between academic computing science and the software industry. During his forty-plus years as a computing scientist, which included positions in both academia and industry, Dijkstra's contributions brought him many prizes and awards, including computing science's highest honor, the ACM Turing Award.

Sumber: <http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/>

**procedure** Dijkstra (**input** G: weighted\_graph, **input** a: intial\_vertex)

Deklarasi:

S : himpunan simpul solusi

L : array[1..n] of real { *L(z) berisi panjang lintasan terpendek dari a ke z* }

Algoritma

**for**  $i \leftarrow 1$  **to** n

$L(v_i) \leftarrow \infty$

**end for**

$L(a) \leftarrow 0$ ; S  $\leftarrow \{ \}$

**while**  $z \notin S$  **do**

$u \leftarrow$  simpul yang bukan di dalam S dan memiliki  $L(u)$  minimum

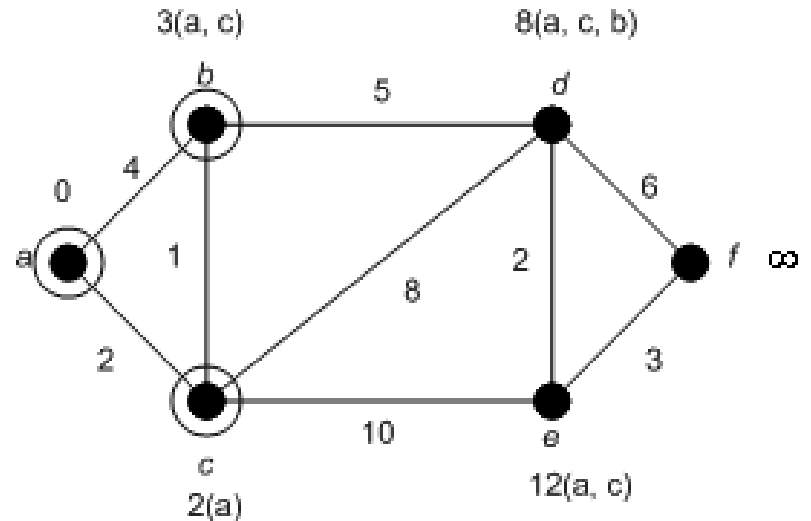
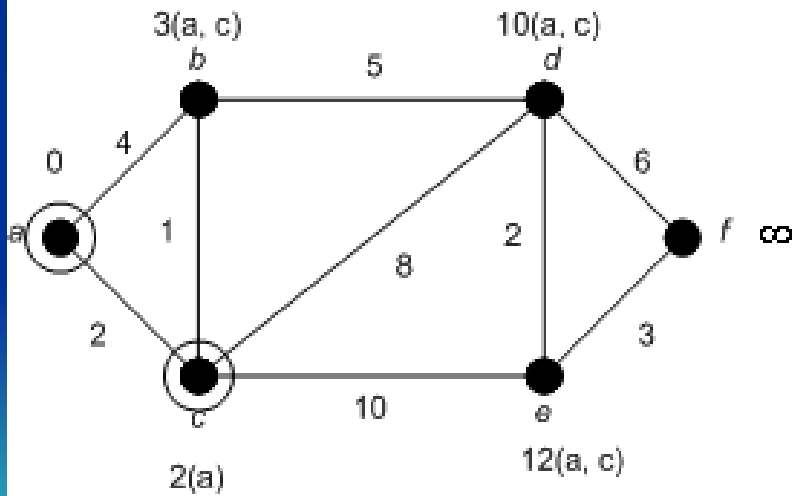
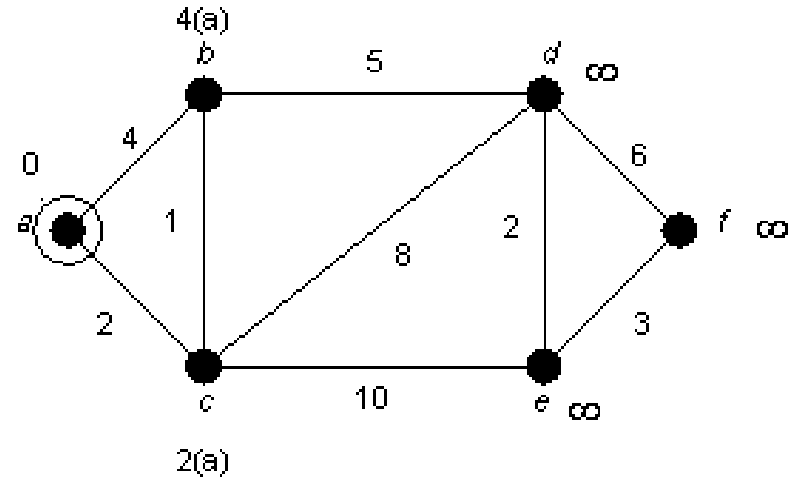
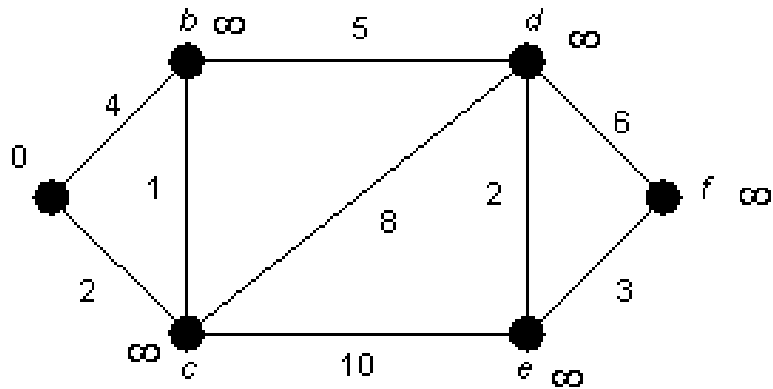
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

**for** semua simpul v yang tidak terdapat di dalam S

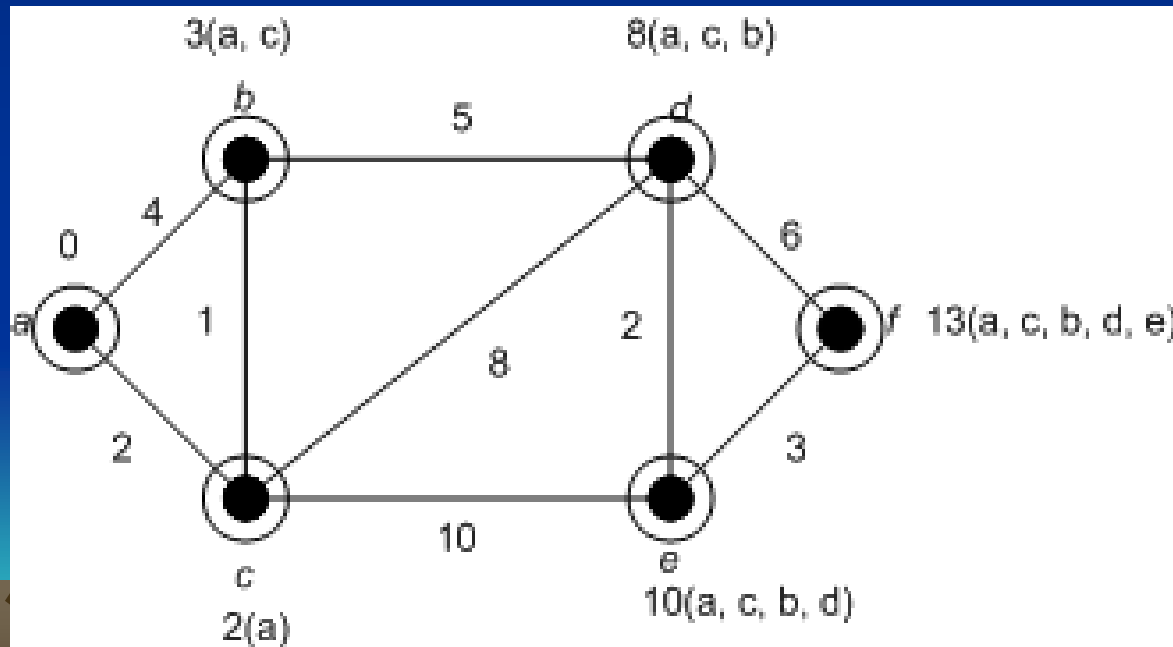
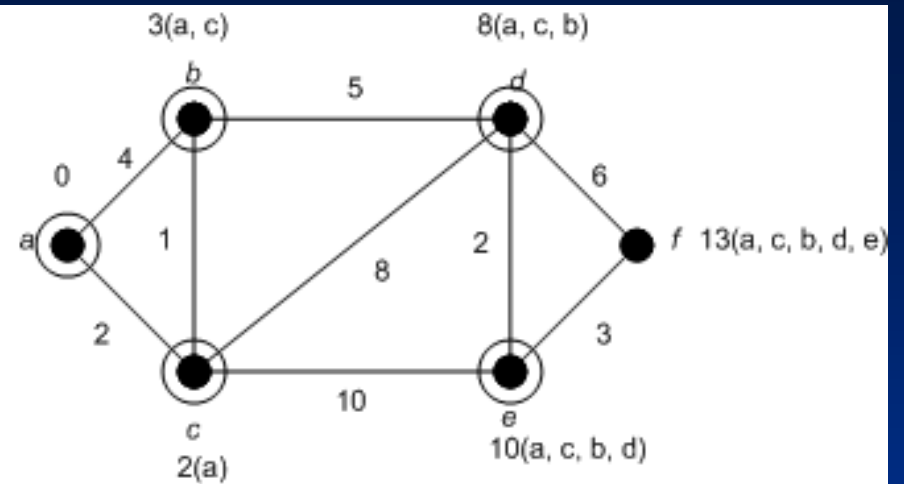
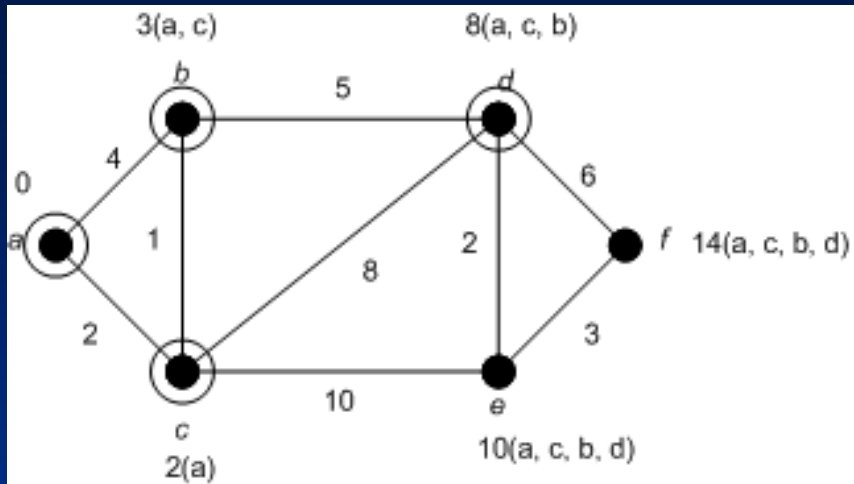
if  $L(u) + G(u,v) < L(v)$  then  $L(v) \leftarrow L(u) + G(u,v)$

**end for**

**end while**







```

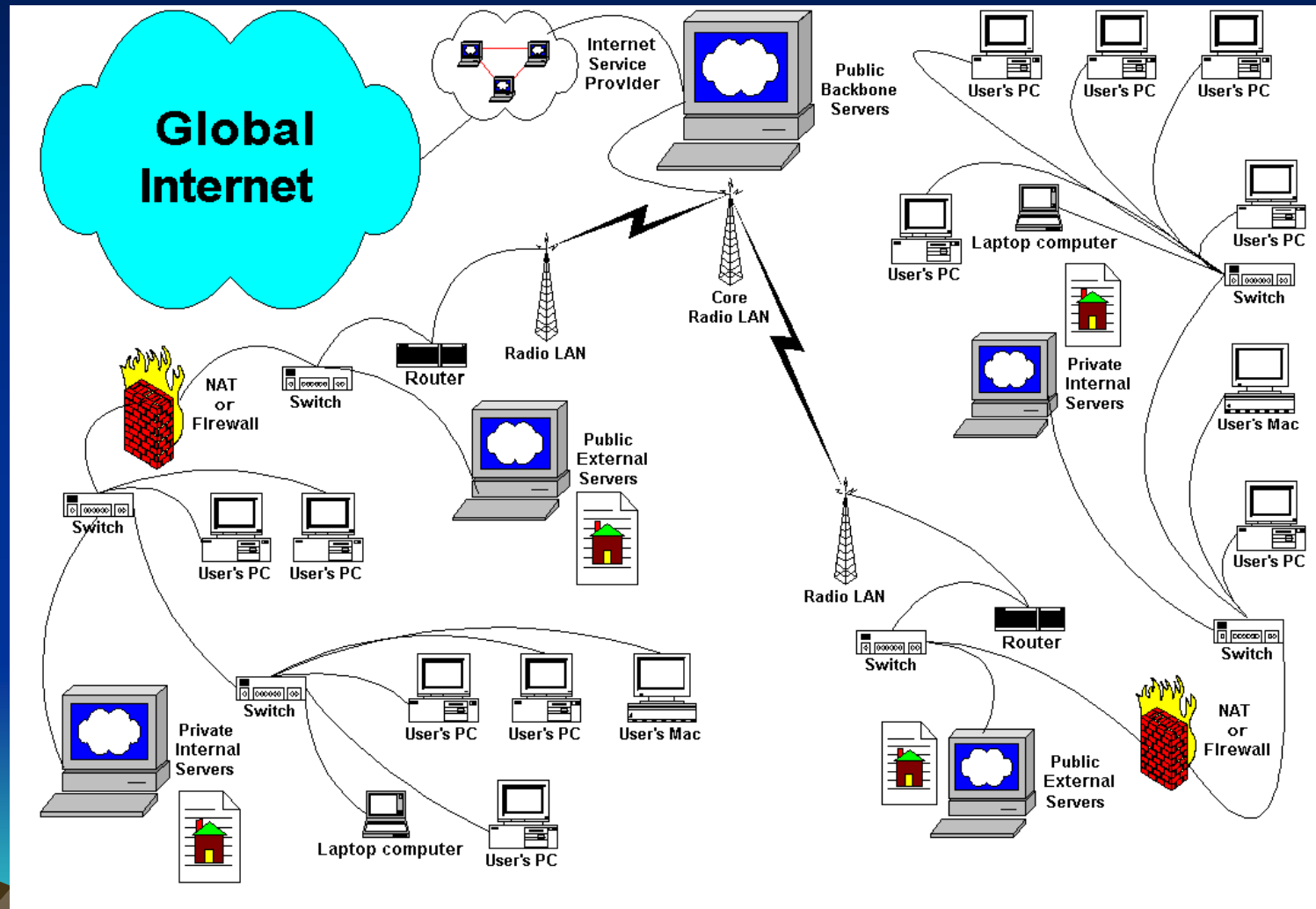
1  Algorithm ShortestPaths(v, cost, dist, n)
2  // dist[j],  $1 \leq j \leq n$ , is set to the length of the shortest
3  // path from vertex v to vertex j in a digraph G with n
4  // vertices. dist[v] is set to zero. G is represented by its
5  // cost adjacency matrix cost[1 : n, 1 : n].
6  {
7      for i := 1 to n do
8      { // Initialize S.
9          S[i] := false; dist[i] := cost[v, i];
10     }
11     S[v] := true; dist[v] := 0.0; // Put v in S.
12     for num := 2 to n - 1 do
13     {
14         // Determine n - 1 paths from v.
15         Choose u from among those vertices not
16         in S such that dist[u] is minimum;
17         S[u] := true; // Put u in S.
18         for (each w adjacent to u with S[w] = false) do
19             // Update distances.
20             if (dist[w] > dist[u] + cost[u, w]) then
21                 dist[w] := dist[u] + cost[u, w];
22     }
23 }

```

Kompleksitas algoritma Dijkstra:  $O((n + |E|) \log n)$ .

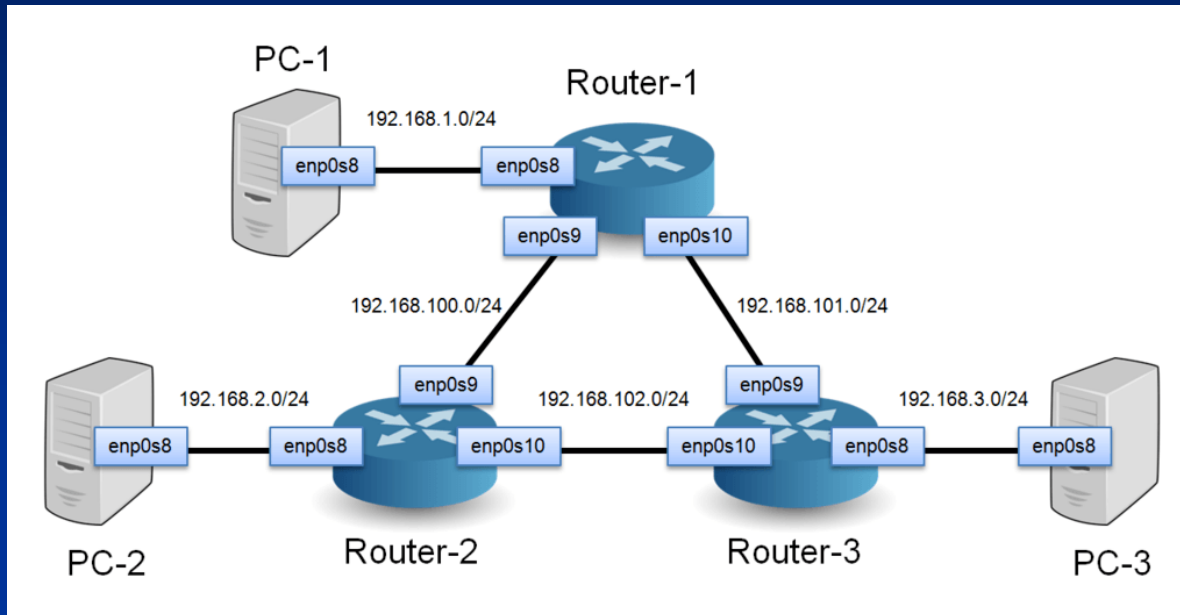
# Aplikasi algoritma Dijkstra:

→ *Routing* pada jaringan komputer



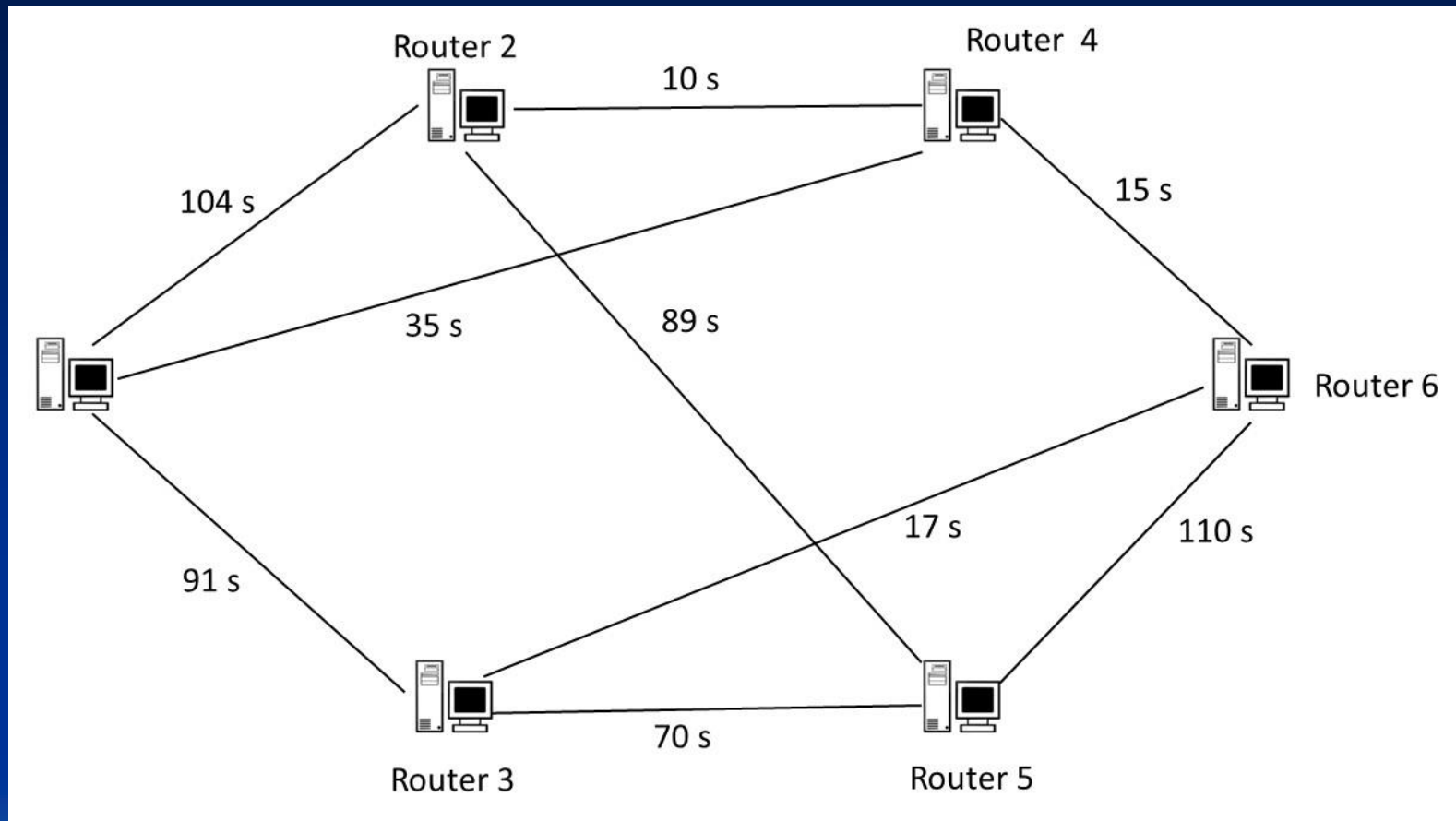
- Pesan yang dikirim dari satu komputer ke komputer lainnya umumnya dipecah menjadi sejumlah paket (*packet*) data yang berukuran lebih kecil.
- Untuk menyampaikan paket data dari dari satu komputer ke komputer lainnya, sistem jaringan komputer harus dapat melakukan pemilihan rute yang tepat agar paket dapat sampai ke komputer tujuan dalam waktu yang cepat.
- Yang dimaksud dengan **perutean** (*routing*) adalah menentukan lintasan yang dilalui oleh paket dari komputer pengirim (asal) ke komputer penerima (tujuan).

- *Router* adalah komputer yang didedikasikan untuk mengarahkan pesan dari suatu simpul ke simpul lainnya.



- Setiap *router* memelihara sebuah tabel yang disebut tabel rute (*routing table*). Tabel rute berisi alamat komputer asal, alamat komputer tujuan, dan simpul antara (*via*) yang dilalui.

# Contoh sebuah jaringan router:



Mencari lintasan terpendek dari *router* asal ke *router* tujuan dapat diartikan sebagai menentukan lintasan terpendek dari simpul asal ke simpul tujuan di dalam jaringan komputer.

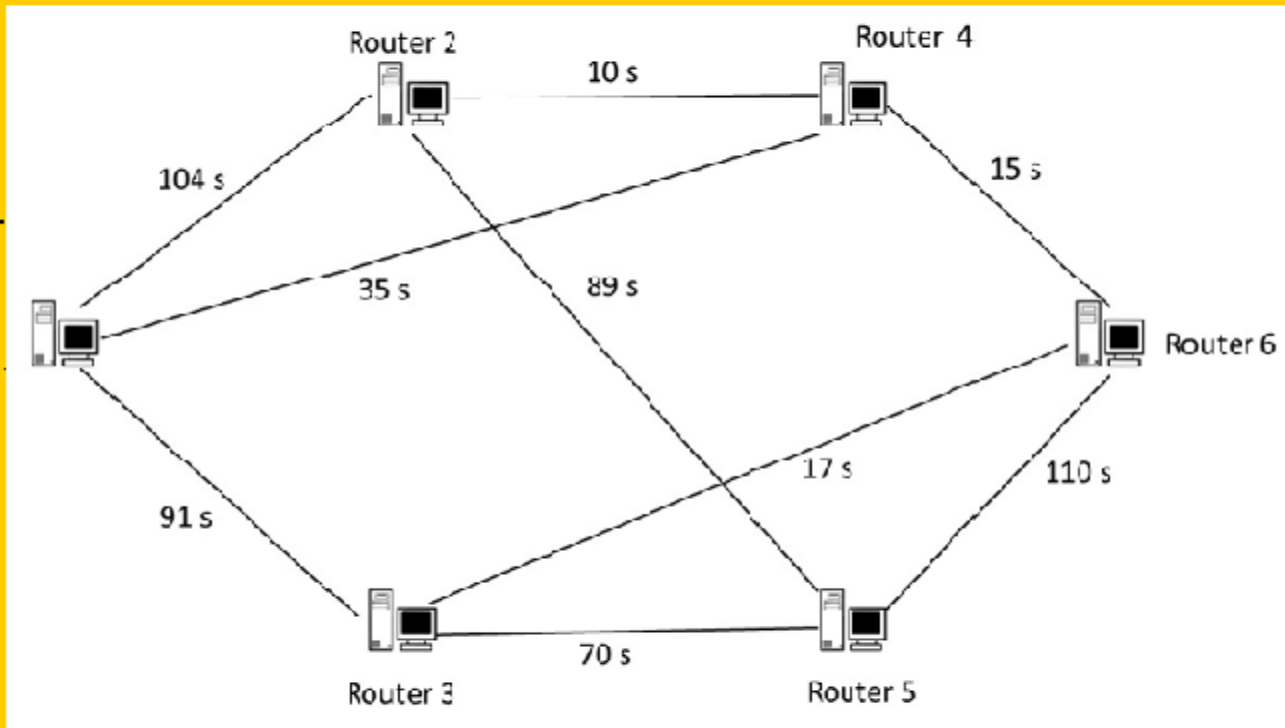
# Lintasan terpendek (berdasarkan *delay time*):

| <i>Router Asal</i> | <i>Router Tujuan</i> | Lintasan Terpendek |
|--------------------|----------------------|--------------------|
| 1                  | 1                    | -                  |
|                    | 2                    | 1, 4, 2            |
|                    | 3                    | 1, 4, 6, 3         |
|                    | 4                    | 1, 4               |
|                    | 5                    | 1, 4, 2, 5         |
|                    | 6                    | 1, 4, 6            |
| 2                  | 1                    | 2, 4, 1            |
|                    | 2                    | -                  |
|                    | 3                    | 2, 4, 6, 3         |
|                    | 4                    | 2, 4               |
|                    | 5                    | 2, 5               |
|                    | 6                    | 2, 4, 6            |
| 3                  | 1                    | 3, 6, 4, 1         |
|                    | 2                    | 3, 6, 4, 2         |
|                    | 3                    | -                  |
|                    | 4                    | 3, 6, 4            |
|                    | 5                    | 3, 5               |
|                    | 6                    | 3, 6               |
| 4                  | 1                    | 4, 1               |
|                    | 2                    | 4, 2               |
|                    | 3                    | 4, 6, 2            |
|                    | 4                    | 4, 6, 3            |
|                    | 5                    | 4, 2, 5            |
|                    | 6                    | 4, 6               |

| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 2    | 1      | 4   |
| 2    | 2      | -   |
| 2    | 3      | 4   |
| 2    | 4      | 2   |
| 2    | 5      | 2   |
| 2    | 6      | 4   |

| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 4    | 1      | 4   |
| 4    | 2      | 4   |
| 4    | 3      | 6   |
| 4    | 4      | -   |
| 4    | 5      | 2   |
| 4    | 6      | 4   |

| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 1    | 1      | -   |
| 1    | 2      | 4   |
| 1    | 3      | 4   |
| 1    | 4      | 4   |
| 1    | 5      | 4   |
| 1    | 6      | 4   |



| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 6    | 1      | 4   |
| 6    | 2      | 4   |
| 6    | 3      | 6   |
| 6    | 4      | 6   |
| 6    | 5      | 3   |
| 6    | 6      | -   |

| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 3    | 1      | 6   |
| 3    | 2      | 6   |
| 3    | 3      | -   |
| 3    | 4      | 6   |
| 3    | 5      | 3   |
| 3    | 6      | 3   |

| Asal | Tujuan | Via |
|------|--------|-----|
| 5    | 1      | 2   |
| 5    | 2      | 5   |
| 5    | 3      | 5   |
| 5    | 4      | 2   |
| 5    | 5      | -   |
| 5    | 6      | 3   |



## 8. Pemampatan Data dengan Algoritma Huffman

Prinsip kode Huffman:

- karakter yang paling sering muncul di dalam data dengan kode yang lebih pendek;
- sedangkan karakter yang relatif jarang muncul dikodekan dengan kode yang lebih panjang.

## *Fixed-length code*

| Karakter  | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -----     |          |          |          |          |          |          |
| Frekuensi | 45%      | 13%      | 12%      | 16%      | 9%       | 5%       |
| Kode      | 000      | 001      | 010      | 011      | 100      | 111      |

‘bad’ dikodekan sebagai ‘001000011’

Pengkodean 100.000 karakter  
membutuhkan 300.000 bit.

## Variable-length code (Huffman code)

| Karakter  | a   | b   | c   | d   | e    | f    |
|-----------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Frekuensi | 45% | 13% | 12% | 16% | 9%   | 5%   |
| Kode      | 0   | 101 | 100 | 111 | 1101 | 1100 |

'bad' dikodekan sebagai '1010111'

Pengkodean 100.000 karakter membutuhkan  
 $(0,45 \times 1 + 0,13 \times 3 + 0,12 \times 3 + 0,16 \times 3 + 0,09 \times 4 + 0,05 \times 4) \times 100.000 = 224.000$  bit

Nisbah pemampatan:

$$(300.000 - 224.000) / 300.000 \times 100\% = 25,3\%$$

## Algoritma Greedy untuk Membentuk Kode Huffman:

1. Baca semua karakter di dalam data untuk menghitung frekuensi kemunculan setiap karakter. Setiap karakter penyusun data dinyatakan sebagai pohon bersimpul tunggal. Setiap simpul di-assign dengan frekuensi kemunculan karakter tersebut.
2. Terapkan strategi *greedy* sebagai berikut: pada setiap langkah gabungkan dua buah pohon yang mempunyai frekuensi **terkecil** pada sebuah akar. Akar mempunyai frekuensi yang merupakan jumlah dari frekuensi dua buah pohon penyusunnya.
3. Ulangi langkah 2 sampai hanya tersisa satu buah pohon Huffman.

Kompleksitas algoritma Huffman:  $O(n \log n)$

- **Contoh 9.**

|          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Karakter | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|



|           |    |    |    |    |   |   |
|-----------|----|----|----|----|---|---|
| Frekuensi | 45 | 13 | 12 | 16 | 9 | 5 |
|-----------|----|----|----|----|---|---|

1.

$f:5$

$e:9$

$c:12$

$b:13$

$d:16$

$a:45$

2.

$c:12$

$b:13$

$fe:14$

$d:16$

$a:45$

$f:5$

$e:9$

3.

$fe:14$

$d:16$

$cb:25$

$a:45$

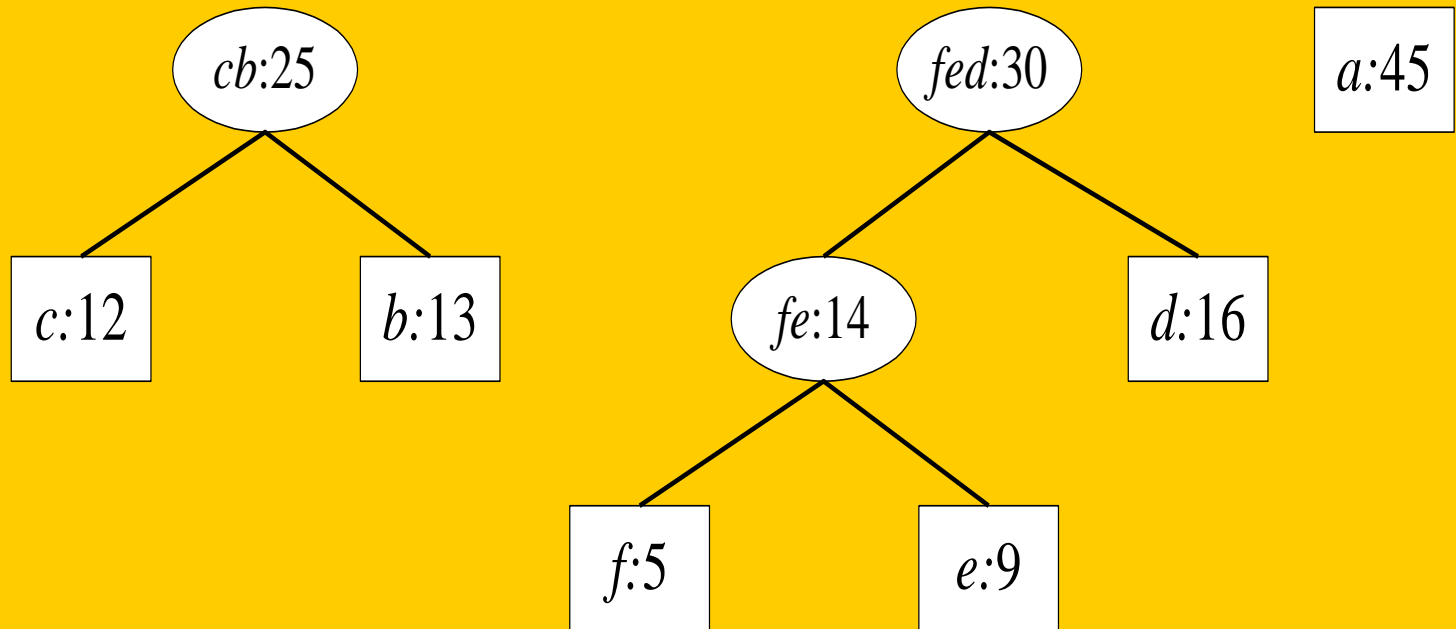
$f:5$

$e:9$

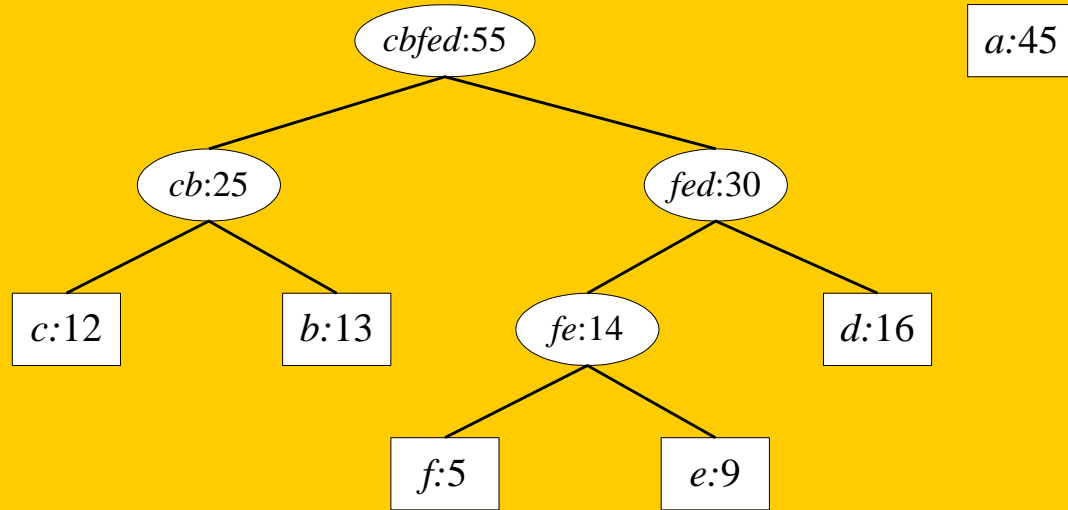
$c:12$

$b:13$

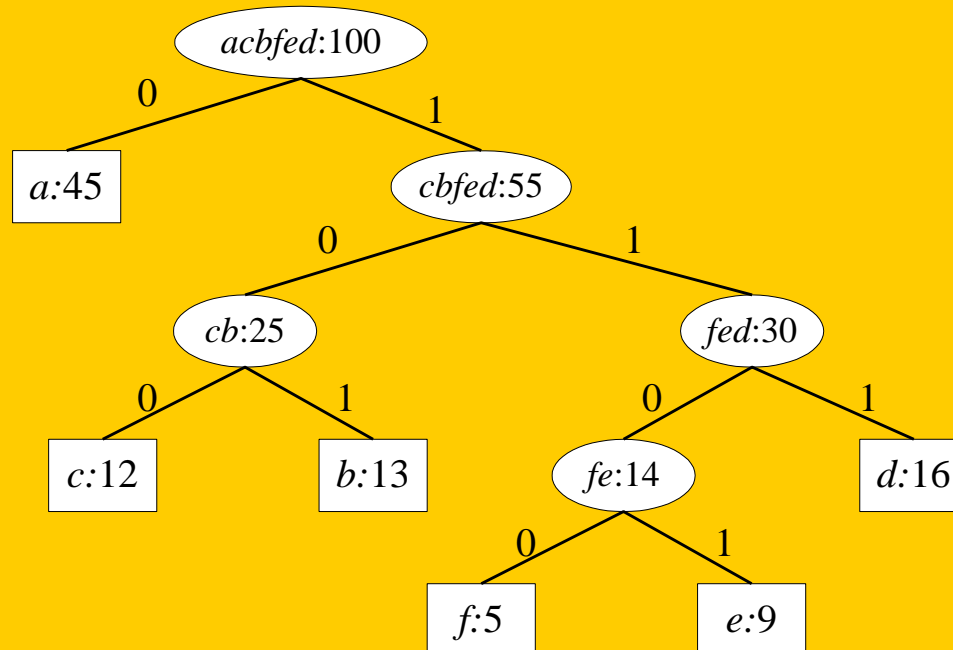
4.



5.



6





# 9. Pecahan Mesir (*Egyptian Fraction*)

**Persoalan:** Diberikan pecahan  $p/q$ . Dekomposisi pecahan menjadi jumlah dari sejumlah pecahan yang berbeda:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

yang dalam hal ini,  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ .

Contoh:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$$

$$\frac{87}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}$$

- Pecahan yang diberikan mungkin mempunyai lebih dari satu representasi Mesir

Contoh:  $8/15 = 1/3 + 1/5$

$$8/15 = 1/2 + 1/30$$

- Kita ingin mendekomposisinya dengan jumlah unit pecahan sesedikit mungkin

Strategi *greedy*: pada setiap langkah, tambahkan unit pecahan terbesar ke representasi yang baru terbentuk yang jumlahnya tidak melebihi nilai pecahan yang diberikan

Algoritma:

Input:  $p/q$

1. Mulai dengan  $i = 1$
2. Jika  $p = 1$ , maka  $k_i = q$ . STOP
3.  $1/k_i =$  pecahan terbesar yang lebih kecil dari  $p/q$
4.  $p/q = p/q - 1/k_i$
5. Ulangi langkah 2.

- Contoh keluaran:  
$$8/15 = 1/2 + 1/30$$

tetapi, dengan algoritma greedy:

$$26/133 = 1/6 + 1/35 + 1/3990 \quad (\text{tidak optimal})$$

seharusnya (dengan *brute force*)

$$26/133 = 1/7 + 1/19 \quad (\text{optimal})$$

- Kesimpulan: algoritma *greedy* untuk masalah pecahan Mesir tidak selalu optimal

# 10. Connecting wires

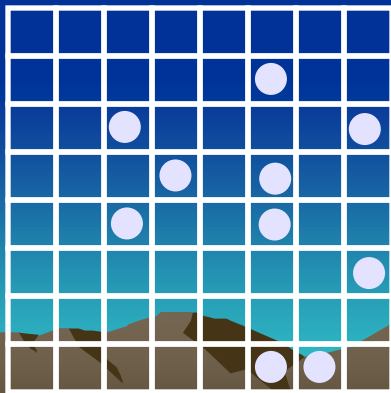
- There are  $n$  white dots and  $n$  black dots, equally spaced, in a line
- You want to connect each white dot with some one black dot, with a minimum total length of “wire”
- Example:



- Total wire length above is  $1 + 1 + 1 + 5 = 8$
- Do you see a greedy algorithm for doing this?
- Does the algorithm guarantee an optimal solution?
  - Can you prove it?
  - Can you find a counterexample?

# 11. Collecting coins

- A checkerboard has a certain number of coins on it
- A robot starts in the upper-left corner, and walks to the bottom left-hand corner
  - The robot can only move in two directions: right and down
  - The robot collects coins as it goes
- You want to collect *all* the coins using the *minimum* number of robots
- Example:



- Do you see a greedy algorithm for doing this?
- Does the algorithm guarantee an optimal solution?
  - Can you prove it?
  - Can you find a counterexample?

Sumber: Unknown, *Greedy Algorithm*)

# Aplikasi Algoritma *Greedy* pada Permainan Othello (Riversi)

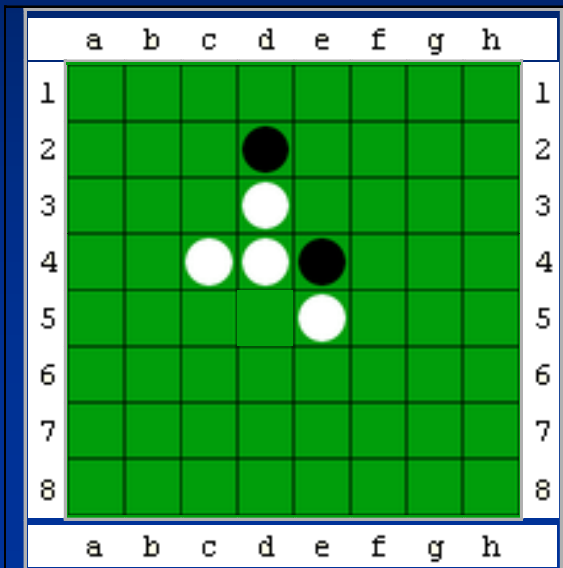
# Othello

- *Othello* atau *Reversi* adalah permainan yang menggunakan papan (*board game*) dan sejumlah koin yang berwarna gelap (misalnya hitam) dan terang (misalnya putih).
- Ukuran papan biasanya 8 x 8 kotak (grid) dan jumlah koin gelap dan koin terang masing-masing sebanyak 64 buah. Sisi setiap koin memiliki warna yang berbeda (sisi pertama gelap dan sisi kedua terang).
- Pada permainan ini kita asumsikan warna hitam dan putih. Jumlah pemain 2 orang.

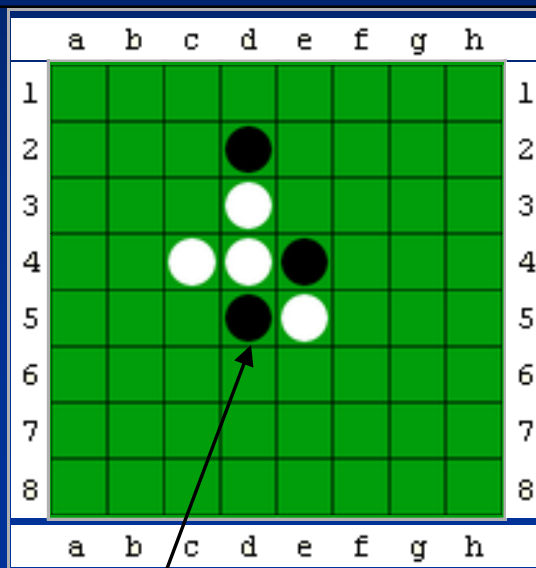




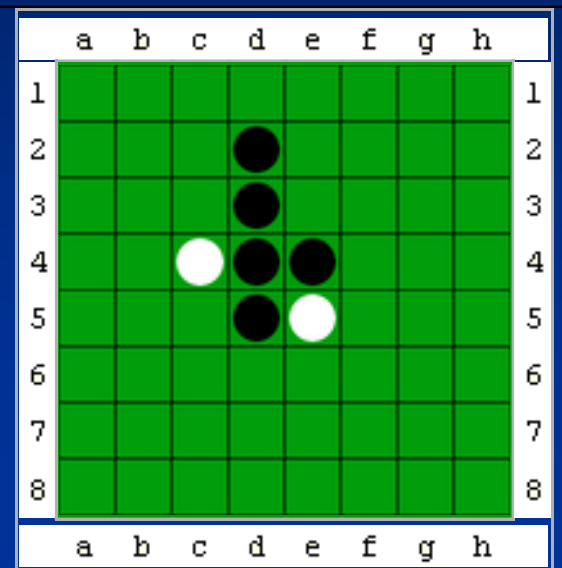
- Dalam permainan ini setiap pemain berusaha mengganti warna koin lawan dengan warna koin miliknya (misalnya dengan membalikkan koin lawan) dengan cara “menjepit” atau memblok koin lawan secara vertikal, horizontal, atau diagonal.
- Barisan koin lawan yang terletak dalam satu garis lurus yang diapit oleh sepasang koin pemain yang *current* diubah (*reverse*) warnanya menjadi warna pemain yang *current*.



Keadaan awal



Koin hitam ditaruh di sini



Keadaan akhir

- Setiap pemain bergantian meletakkan koinnya. Jika seorang pemain tidak dapat meletakkan koin karena tidak ada posisi yang dibolehkan, permainan kembali ke pemain lainnya.
- Jika kedua pemain tidak bisa lagi meletakkan koin, maka permainan berakhir. Hal ini terjadi jika seluruh kotak telah terisi, atau ketika seorang pemain tidak memiliki koin lagi, atau ketika kedua pemain tidak dapat melakukan penempatan koin lagi.
- Pemenangnya adalah pemain yang memiliki koin paling banyak di atas papan.

- Algoritma Greedy dapat diaplikasikan untuk memenangkan permainan.
- Algoritma *greedy* berisi sejumlah langkah untuk melakukan penempatan koin yang menghasilkan jumlah koin maksimal pada akhir permainan.
- Algoritma *Greedy* dipakai oleh komputer pada tipe permainan komputer vs manusia.

## Dua strategi greedy heuristik:

### 1. *Greedy by* jumlah koin

Pada setiap langkah, koin pemain menuju koordinat yang menghasilkan sebanyak mungkin koin lawan. Strategi ini berusaha memaksimalkan jumlah koin pada akhir permainan dengan menghasilkan sebanyak-banyaknya koin lawan pada setiap langkah.

### 2. *Greedy by* jarak ke tepi

Pada setiap langkah, koin pemain menuju ke koordinat yang semakin dekat dengan tepi arena permainan. Strategi ini berusaha memaksimumkan jumlah koin pada akhir permainan dengan menguasai daerah tepi yang sulit untuk dilangkahi koin lawan. Bahkan untuk pojok area yang sulit dilangkahi lawan.

# *Greedy by* Jumlah Koin

## 1. Himpunan kandidat

Langkah-langkah yang menghasilkan jumlah koin yang diadipit.

## 2. Himpunan solusi

Langkah-langkah dari Himpunan kandidat yang memiliki jumlah koin diadipit paling besar.

## 3. Fungsi seleksi

Pilih langkah yang memiliki jumlah koin diadipit paling besar

## 4. Fungsi kelayakan

Semua langkah adalah layak

## 5. Fungsi obyektif

Maksimumkan jumlah koin lawan

|  |  |   |   |   |   |   |  |
|--|--|---|---|---|---|---|--|
|  |  |   |   |   |   |   |  |
|  |  |   |   |   |   |   |  |
|  |  |   | B |   | A |   |  |
|  |  |   | ○ | ○ | ○ |   |  |
|  |  | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |  |
|  |  | ○ | ○ |   | ○ |   |  |
|  |  |   |   |   |   |   |  |
|  |  |   |   |   |   |   |  |