

Algoritma Branch & Bound (Bagian 2)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Program Studi Informatika – STEI ITB

TSP (lanjutan)

- Pada pembahasan TSP sebelumnya, *cost* setiap simpul i dihitung sebagai penjumlahan ongkos dari simpul akar ke simpul i , dan ongkos dari simpul i ke simpul tujuan (*goal*).

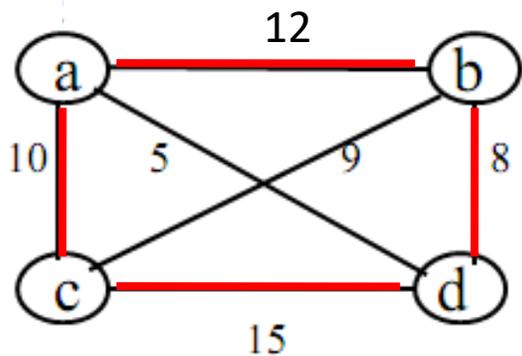
$$c(S) = c(R) + \{A(i,j) + r\}$$

$c(R)$ = cost simpul orangtua dari simpul S

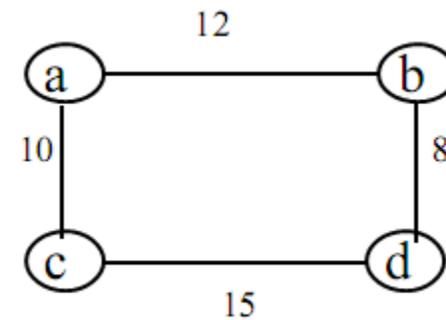
$$g(i) = A(i, j) + r$$

- Terdapat pendekatan heuristik lain dalam menghitung nilai *cost* untuk setiap simpul berdasarkan bobot tur lengkap.

Bobot Tur Lengkap (tur dimulai dari a)



Solusi: (a, i_2, i_3, i_4, a)



$$\begin{aligned}
 10 + 15 + 8 + 12 &= 45 \\
 &= 1/2 [(10 + 12) + (10 + 15) + (15 + 8) + (12 + 8)] \\
 &= 1/2 \times 90 \\
 &= 45
 \end{aligned}$$

$$\text{bobot tur lengkap} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{bobot sisi } i_1 + \text{bobot sisi } i_2$$

sisi i_1 dan sisi i_2 adalah dua sisi yang bersisian dengan simpul i di dalam tur lengkap.

B&B-TSP dengan Bobot Tur Lengkap

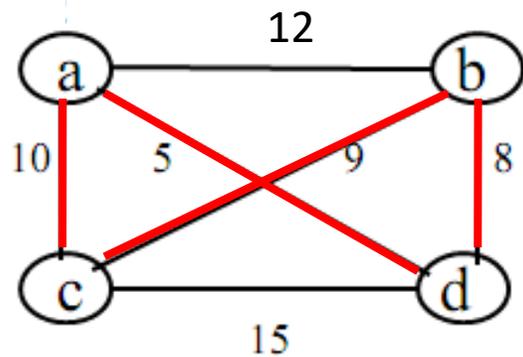
Hasil pengamatan:

$$\begin{aligned} M \equiv \text{cost} &= \text{bobot minimum tur lengkap} \\ &\geq 1/2 \sum \text{bobot sisi } i_1 + \text{bobot sisi } i_2 \end{aligned}$$

Yang dalam hal ini, sisi i_1 dan sisi i_2 adalah sisi yang bersisian dengan simpul i dengan bobot minimum.

M dapat digunakan sebagai fungsi pembatas (*bound*) untuk menghitung cost setiap simpul di dalam pohon

Cost Simpul Akar



Cost untuk simpul akar (simpul 1)

$$\begin{aligned} \text{cost} &\geq 1/2 [(5+10) + (9+8) + (9+10) + (8+5)] \\ &\geq 32 \end{aligned}$$

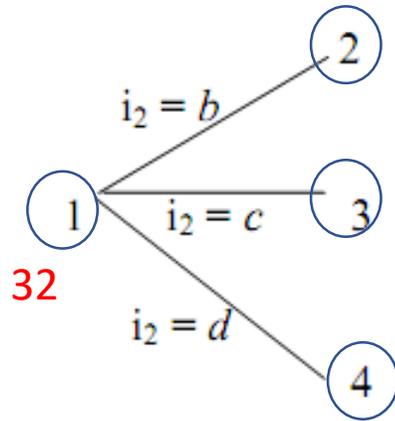
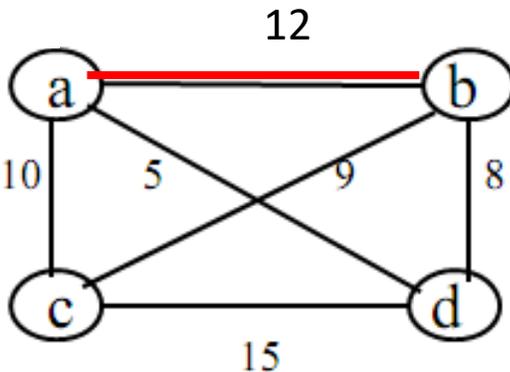
Pohon ruang status yang terbentuk:

①

32

B&B-TSP dengan Bobot Tur Lengkap

Contoh untuk menghitung cost simpul 2:
 Untuk $i_2=b$, sisi (a, b) wajib diambil.

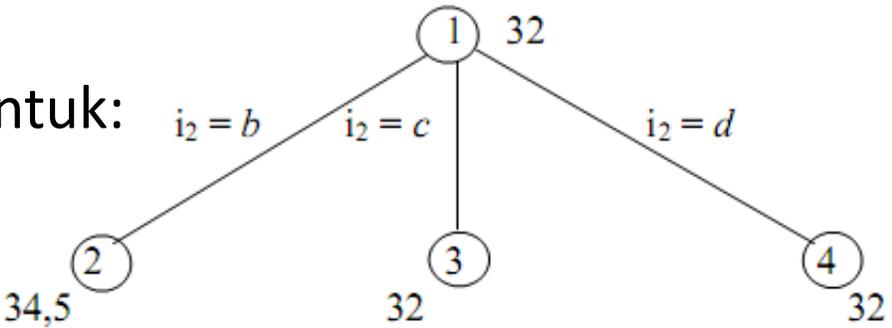


$$cost \geq 1/2 [\overset{a}{(12+5)} + \overset{b}{(12+8)} + \overset{c}{(9+10)} + \overset{d}{(8+5)}] \geq 34,5$$

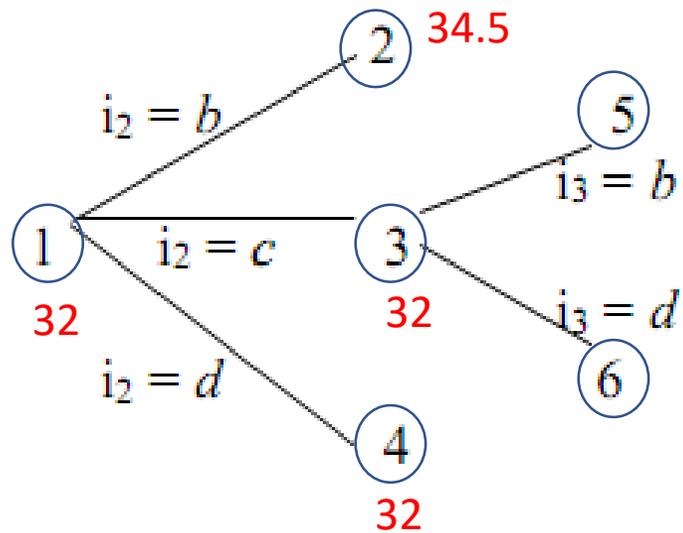
$$cost \geq 1/2 [\overset{a}{(10+5)} + \overset{b}{(9+8)} + \overset{c}{(10+9)} + \overset{d}{(8+5)}] \geq 32$$

$$cost \geq 1/2 [\overset{a}{(5+10)} + \overset{b}{(9+8)} + \overset{c}{(10+9)} + \overset{d}{(8+5)}] \geq 32$$

Pohon ruang status yang terbentuk:



Simpul hidup berikutnya yang akan diekspansi: simpul 3 atau 4

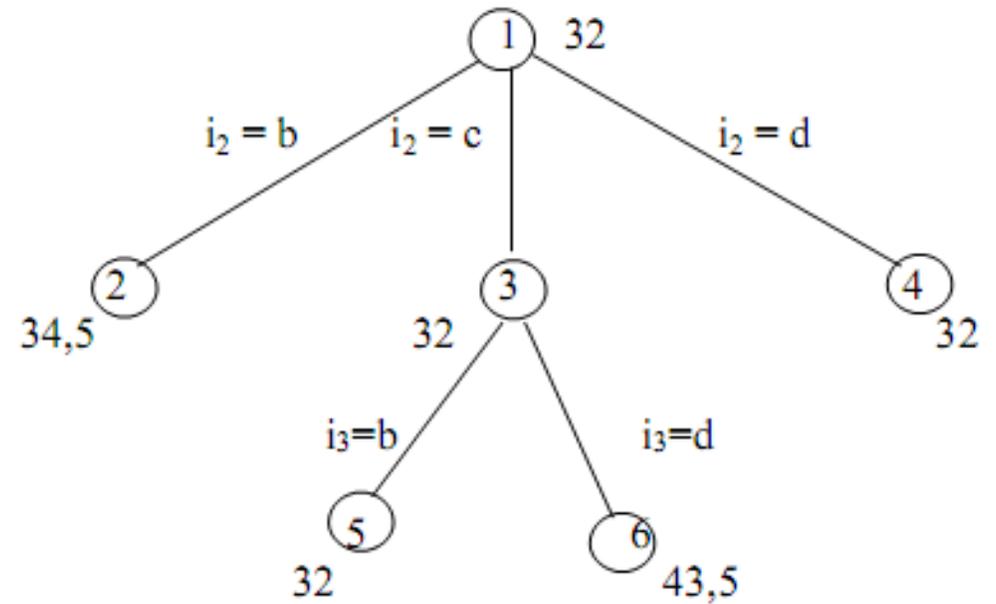
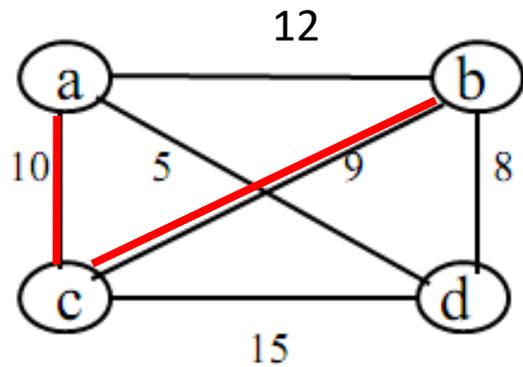


$$cost \geq \frac{1}{2} [\overset{a}{(10+5)} + \overset{b}{(9+8)} + \overset{c}{(10+9)} + \overset{d}{(5+8)}] = 32$$

$$cost \geq \frac{1}{2} [\overset{a}{(10+5)} + \overset{b}{(9+8)} + \overset{c}{(10+15)} + \overset{d}{(15+5)}] = 43,5$$

Contoh menghitung cost simpul 5:

Untuk $i_3=b$, sisi (a, c) dan sisi (c, b) wajib diambil.

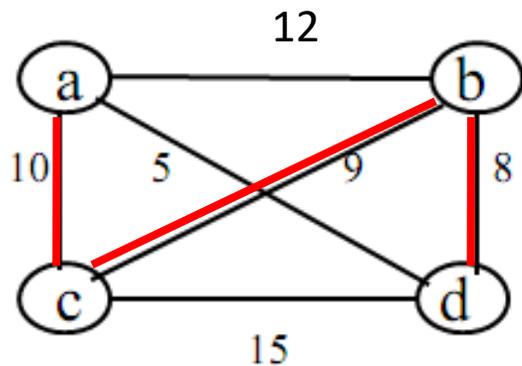


Simpul hidup berikutnya yang akan diekspansi: simpul 5 atau 4

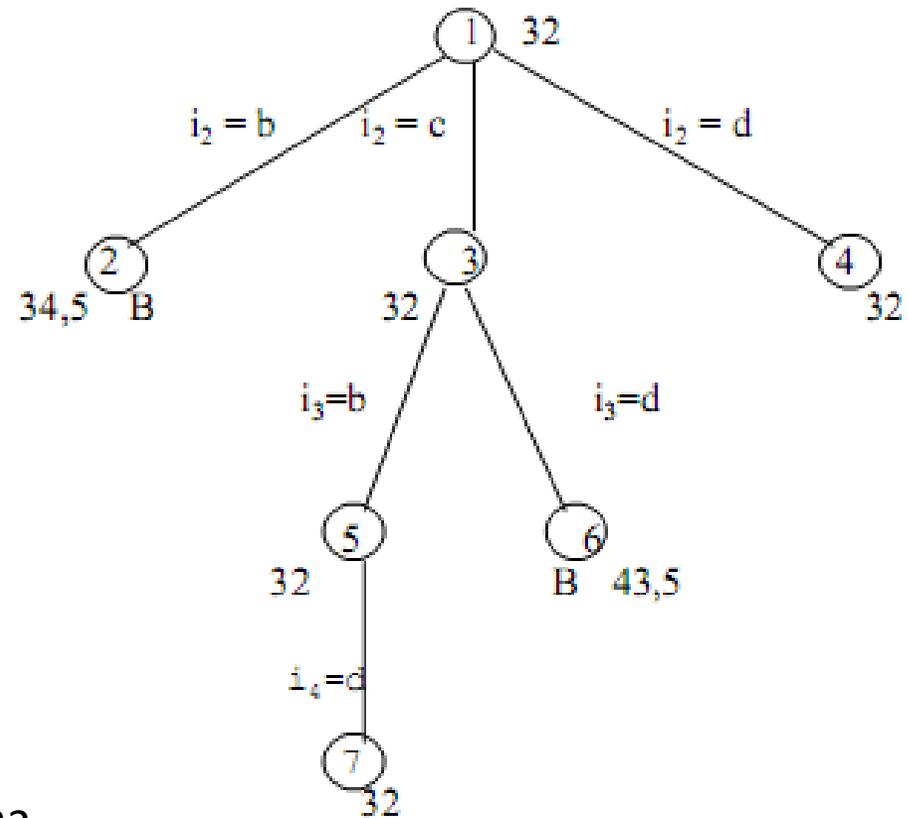
Pohon ruang status yang terbentuk:

Contoh menghitung cost simpul 7:

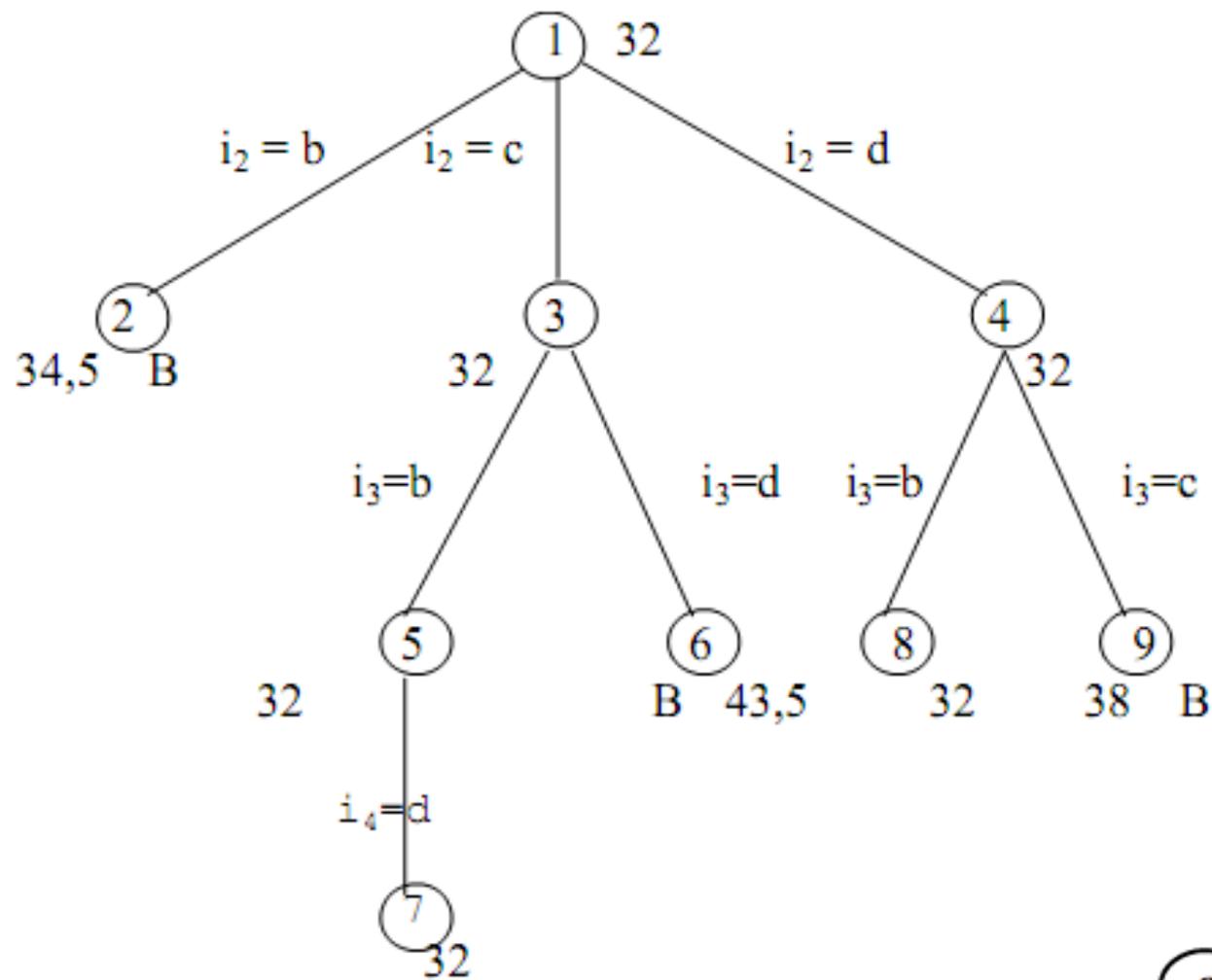
Sisi (a, c), (c, b), dan (b, d) wajib diambil.



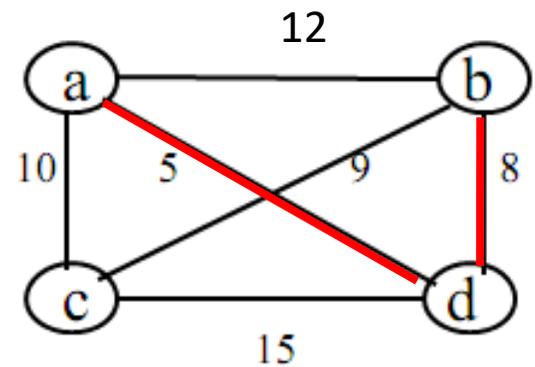
$$\text{Cost} \geq 1/2 [(10 + 5) + (8 + 9) + (10 + 9) + (5 + 8)] = 32$$

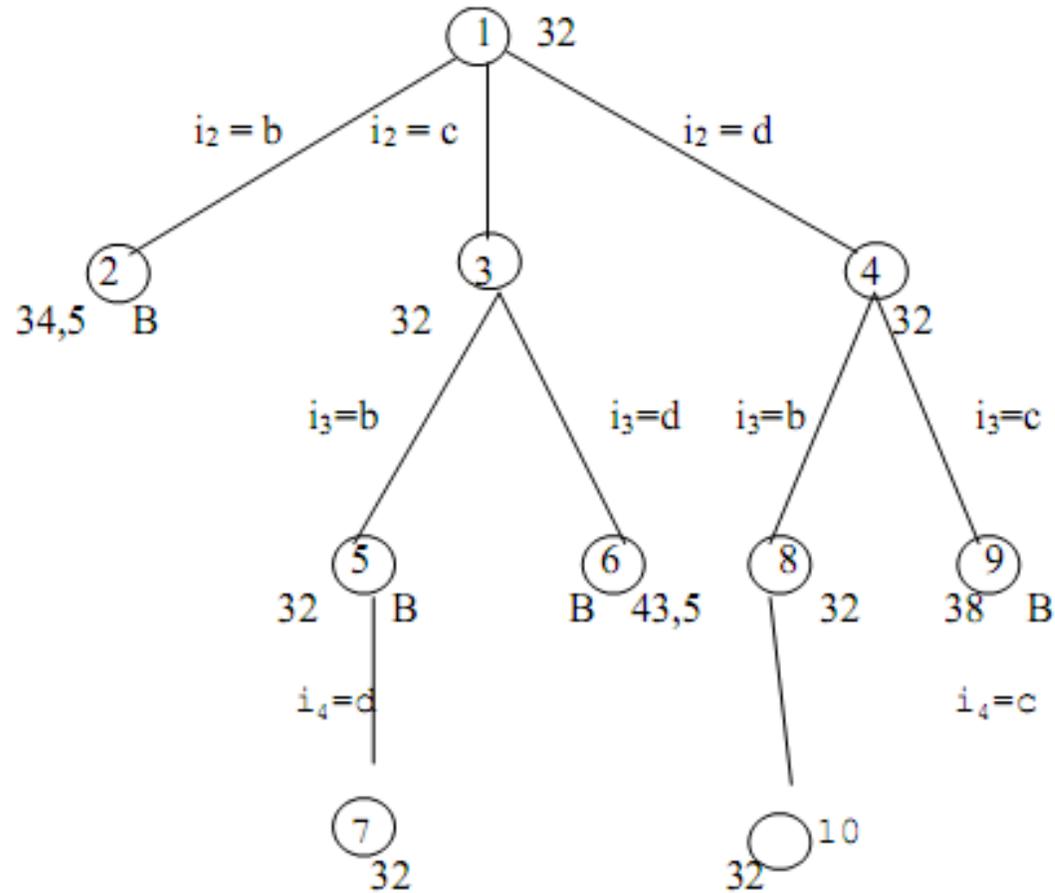


Solusi pertama: Tur a, c, b, d, a dengan bobot 32 (*the best solution so far*). Bunuh semua simpul dengan cost > 32. (ditandai dengan B)



$Cost \text{ simpul } 8 \geq \frac{1}{2}[(5+10)+(8+9)+(9+10)+(5+8)] = 32$





$Cost \text{ simpul } 10 \geq \frac{1}{2}[(5+10)+(9+8)+(9+10)+(5+8)] = 32$

Solusi ke-2: tur a, d, b, c, a dengan bobot 32

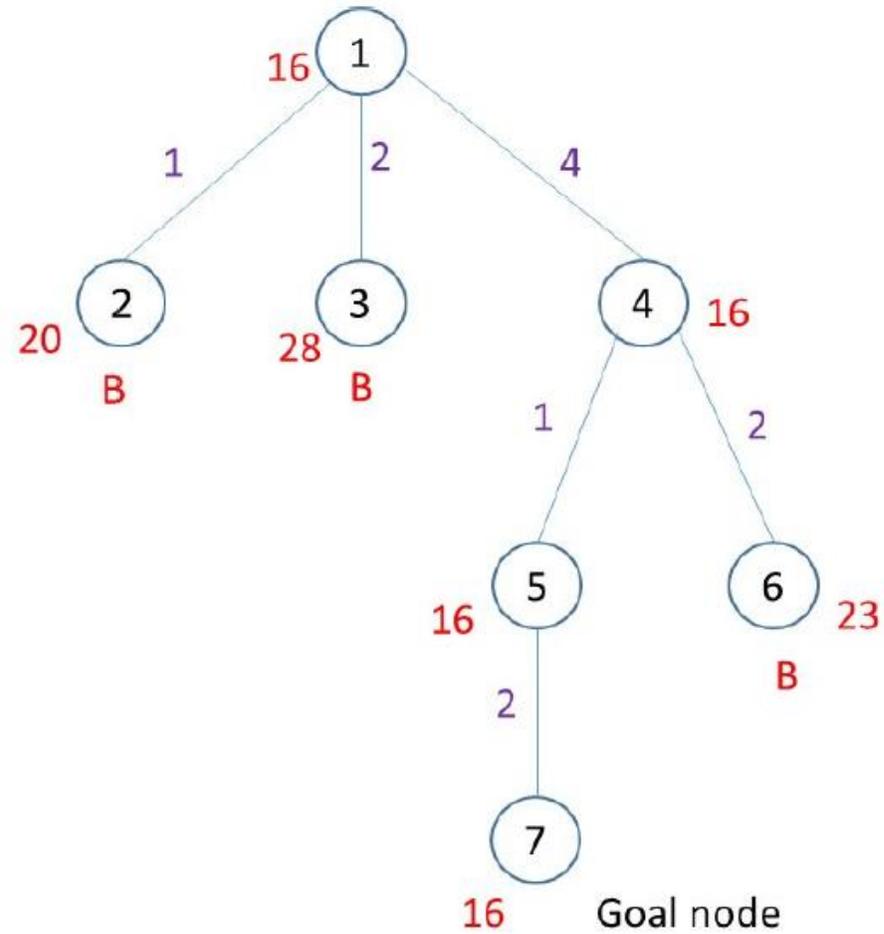
Latihan 1

- (TSP) Diberikan sebuah graf lengkap dengan 4 simpul yang dinyatakan dengan matriks berbobot sebagai berikut:
- Simpul diberi nomor 1, 2, 3, dan 4. Jika tur dimulai dari simpul 3, tentukan tur TSP dengan bobot minimum (dari 3 kembali ke 3 melalui simpul yang lain tepat sekali). Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. *Bound* atau cost dihitung dengan matriks ongkos tereduksi (*reduced cost matrices*). Tuliskan jawaban anda dengan menggambarkan pohon ruang status beserta nilai *bound* untuk setiap simpul, solusi dalam bentuk vektor X dan total bobot.

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Pohon ruang status yang terbentuk:



Solusi: $X = (3, 4, 1, 2, 3)$, cost = 16

Proses perhitungan *bound* untuk setiap simpul adalah sbb:

1. Menghitung bound untuk simpul 1:

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cccc} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - 2 \\ R2 - 3 \\ R3 - 4 \\ R4 - 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 3 & \infty & 0 & 4 \\ 1 & 4 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{l} C1 - 1 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{array} \right] = A
 \end{array}$$

Jumlah semua pengurang = $2 + 3 + 4 + 6 + 1 = 16 \rightarrow c(1) = 16$

2. Menghitung bound untuk simpul 2 (bersesuaia ndengan sisi (3,1) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-1 menjadi ∞ , lalu ubah nilai $A(1, 3)$ menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{C4 - 4} \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Jumlah semua pengurang = $r = 4$

Nilai bound untuk simpul 2 $\rightarrow c(2) = c(1) + A(3,1) + r = 16 + 0 + 4 = 20$

3. Menghitung bound untuk simpul 3 (bersesuaian dengan sisi (3,2) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-2 menjadi ∞ , lalu ubah nilai $A(2, 3)$ menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1-5 \\ R2-2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 1 \\ 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} C4-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Jumlah semua pengurang = $r = 5+2 +1 = 8$

Nilai bound untuk simpul 3 $\rightarrow c(3) = c(1) + A(3,2) + r = 16 + 4 + 8 = 28$

4. Menghitung bound untuk simpul 4 (bersesuaian dengan sisi (3,4) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-4 menjadi ∞ , lalu ubah nilai $A(4, 3)$ menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = B$$

Jumlah semua pengurang = $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 4 $\rightarrow c(4) = c(1) + A(3,4) + r = 16 + 0 + 0 = 16$

5. Menghitung bound untuk simpul 5 (bersesuaian dengan sisi (4,1) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-1 menjadi ∞ , lalu ubah nilai B(1, 3) menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = C$$

Jumlah semua pengurang = $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 5 $\rightarrow c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 0 = 16$

6. Menghitung bound untuk simpul 6 (bersesuaian dengan sisi (4,2) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-2 menjadi ∞ , lalu ubah nilai B(2, 3) menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1 - 5 \\ R2 - 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

Jumlah semua pengurang = $r = 2 + 5 = 7$

Nilai bound untuk simpul 5 $\rightarrow c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 7 = 23$

7. Menghitung bound untuk simpul 7 (bersesuaian dengan sisi (1,2) pada graf):

Dari matriks D, ubah nilai pada baris ke-1 dan kolom ke-2 menjadi ∞ , lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi}$$

Jumlah semua pengurang = $r = 0$

Nilai bound untuk simpul 5 $\rightarrow c(7) = c(5) + D(1,2) + r = 16 + 0 + 0 = 16 \rightarrow$ goal node

Bunuh semua simpul dengan bound > 16 . Habis.

Solusi $X = (3, 4, 1, 2, 3)$ dengan total bobot = 16

Latihan 2:

- (*Assignment Problem*) Misalkan terdapat 4 orang orang dan 4 buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah *job*. Ongkos (*cost*) untuk meng-*assign* setiap orang dengan sebuah *job* dinyatakan dengan sebuah matriks di samping ini.
- Bagaimana meng-*assign* job dengan orang sehingga total ongkos *assignment* seminimal mungkin? Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. *Bound* dihitung dengan matriks ongkos tereduksi (*reduced cost matrices*). Gambarkan juga proses pembentukan pohon ruang statusnya sampai menemukan solusi.

$$C = \begin{bmatrix} \text{Job 1} & \text{Job 2} & \text{Job 3} & \text{Job 4} \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{matrix}$$

Latihan 3:

- Persoalan 1/0 Knapsack
- Kapasitas knapsack : 10
- Dengan B&B:
 - Bagaimana pencabangan pohon?
Petunjuk: setiap *item* → diikuti sertakan atau tidak?
 - Bagaimana pengurutan *item* pada aras pohon?
Petunjuk: ingat Greedy, bagaimana pengurutan yang memberikan keuntungan optimal?
 - Perlu batas bawah, atau batas atas?
Petunjuk: tujuan meminimalkan atau memaksimalkan?
Nilai apa yang dioptimasi?
 - Fungsi batas (*bounding function*) setiap simpul ?

item	weight	value	$\frac{\text{value}}{\text{weight}}$
1	4	\$40	10
2	7	\$42	6
3	5	\$25	5
4	3	\$12	4

Selamat Belajar