

# Algoritma Branch & Bound

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Program Studi Informatika – STEI ITB

# Algoritma Branch & Bound (B&B)

- Digunakan untuk persoalan optimisasi → meminimalkan atau memaksimalkan suatu fungsi objektif, yang tidak melanggar batasan (*constraints*) persoalan
- B&B: BFS + least cost search
  - BFS murni: Simpul berikutnya yang akan diekspansi berdasarkan urutan pembangkitannya (FIFO)
- B&B:
  - Setiap simpul diberi sebuah nilai cost:  
 $\hat{c}(i)$  = nilai taksiran lintasan termurah ke simpul status tujuan yang melalui simpul status  $i$ .
  - Simpul berikutnya yang akan di-expand **tidak lagi** berdasarkan urutan pembangkitannya, tetapi simpul yang memiliki *cost* yang paling kecil (least cost search) – pada kasus minimasi.

# Algoritma Global Branch & Bound

1. Masukkan simpul akar ke dalam antrian  $Q$ . Jika simpul akar adalah simpul solusi (goal node), maka solusi telah ditemukan. Stop.
2. Jika  $Q$  kosong, tidak ada solusi. Stop.
3. Jika  $Q$  tidak kosong, pilih dari antrian  $Q$  simpul  $i$  yang mempunyai nilai 'cost'  $\hat{c}(i)$  paling kecil. Jika terdapat beberapa simpul  $i$  yang memenuhi, pilih satu secara sembarang.
4. Jika simpul  $i$  adalah simpul solusi, berarti solusi sudah ditemukan, stop. Jika simpul  $i$  bukan simpul solusi, maka bangkitkan semua anak-anaknya. Jika  $i$  tidak mempunyai anak, kembali ke langkah 2.
5. Untuk setiap anak  $j$  dari simpul  $i$ , hitung  $\hat{c}(j)$ , dan masukkan semua anak-anak tersebut ke dalam  $Q$ .
6. Kembali ke langkah 2.

# Permainan 15-Puzzle

1	3	4	15
2		5	12
7	6	11	14
8	9	10	13

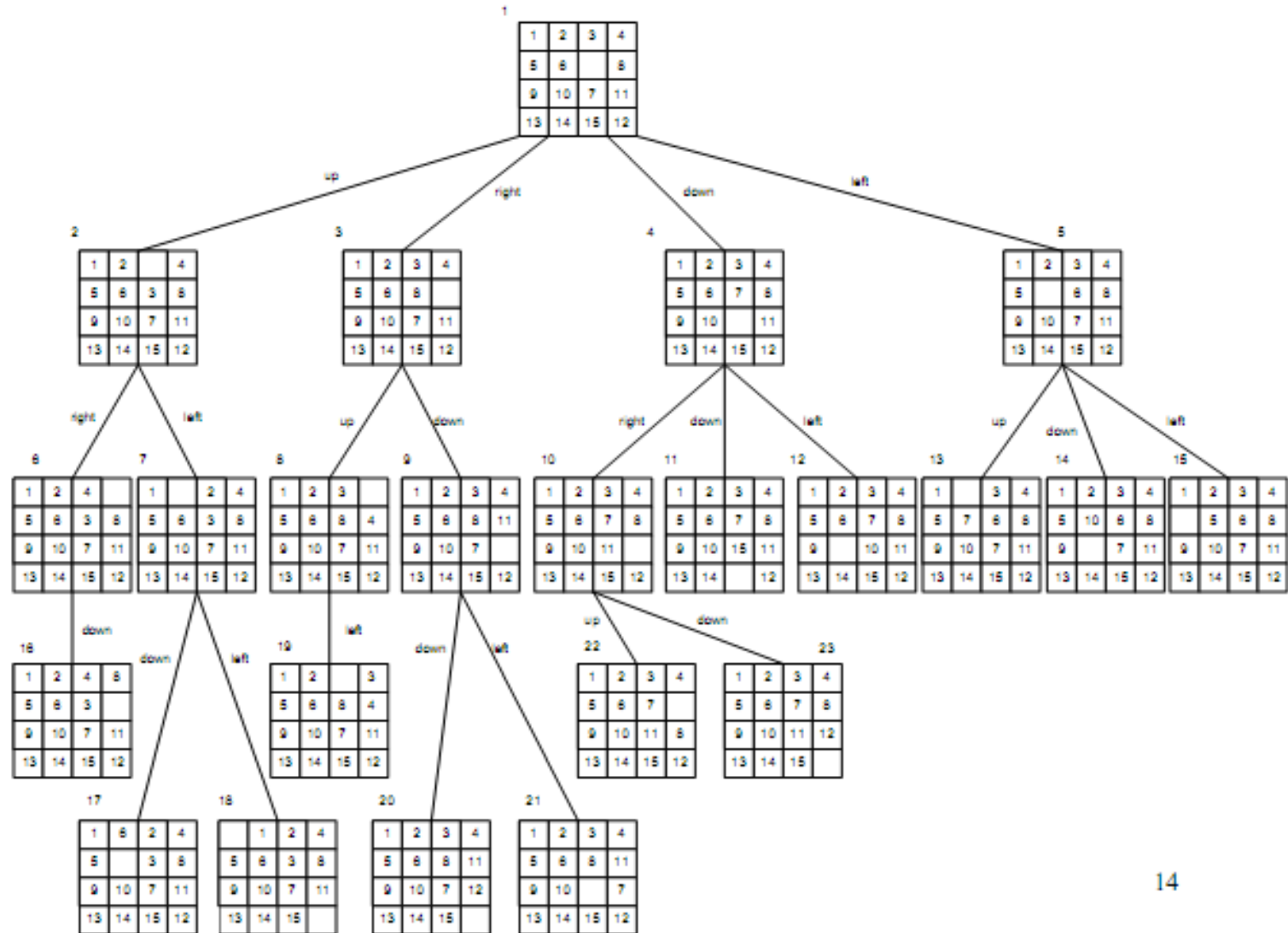
(a) Susunan awal

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(b) Susunan akhir

- State berdasarkan ubin kosong (*blank*)
- Aksi: up, down, left, right

# Pohon Ruang Status untuk 15-Puzzle



Pohon ruang status B&B ketika jalur ke solusi sudah 'diketahui'

# Cost dari Simpul Hidup (2)

- Pada umumnya, untuk kebanyakan persoalan, letak simpul solusi tidak diketahui.
- *Cost* setiap simpul umumnya berupa taksiran.

$$\hat{c}(i) = \hat{f}(i) + \hat{g}(i)$$

$\hat{c}(i)$  = ongkos untuk simpul  $i$

$\hat{f}(i)$  = ongkos mencapai simpul  $i$  dari akar

$\hat{g}(i)$  = ongkos mencapai simpul tujuan dari simpul  $i$ .

- Cost simpul  $P$  pada 15-puzzle:

$f(P)$  = adalah panjang lintasan dari simpul akar ke  $P$

$\hat{g}(P)$  = taksiran panjang lintasan terpendek dari  $P$  ke simpul solusi pada upapohon yang akarnya  $P$ .

# Cost dari Simpul Hidup 15-Puzzle

$\hat{g}(P)$  = jumlah ubin tidak kosong yang tidak terdapat pada susunan akhir

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Target

1	2	3	4
5	6		8
9	10	7	11
13	14	15	12

up

right

down

left

2

3

4

5

1	2		4
5	6	3	8
9	10	7	11
13	14	15	12

1	2	3	4
5	6	8	
9	10	7	11
13	14	15	12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

1	2	3	4
5		6	8
9	10	7	11
13	14	15	12

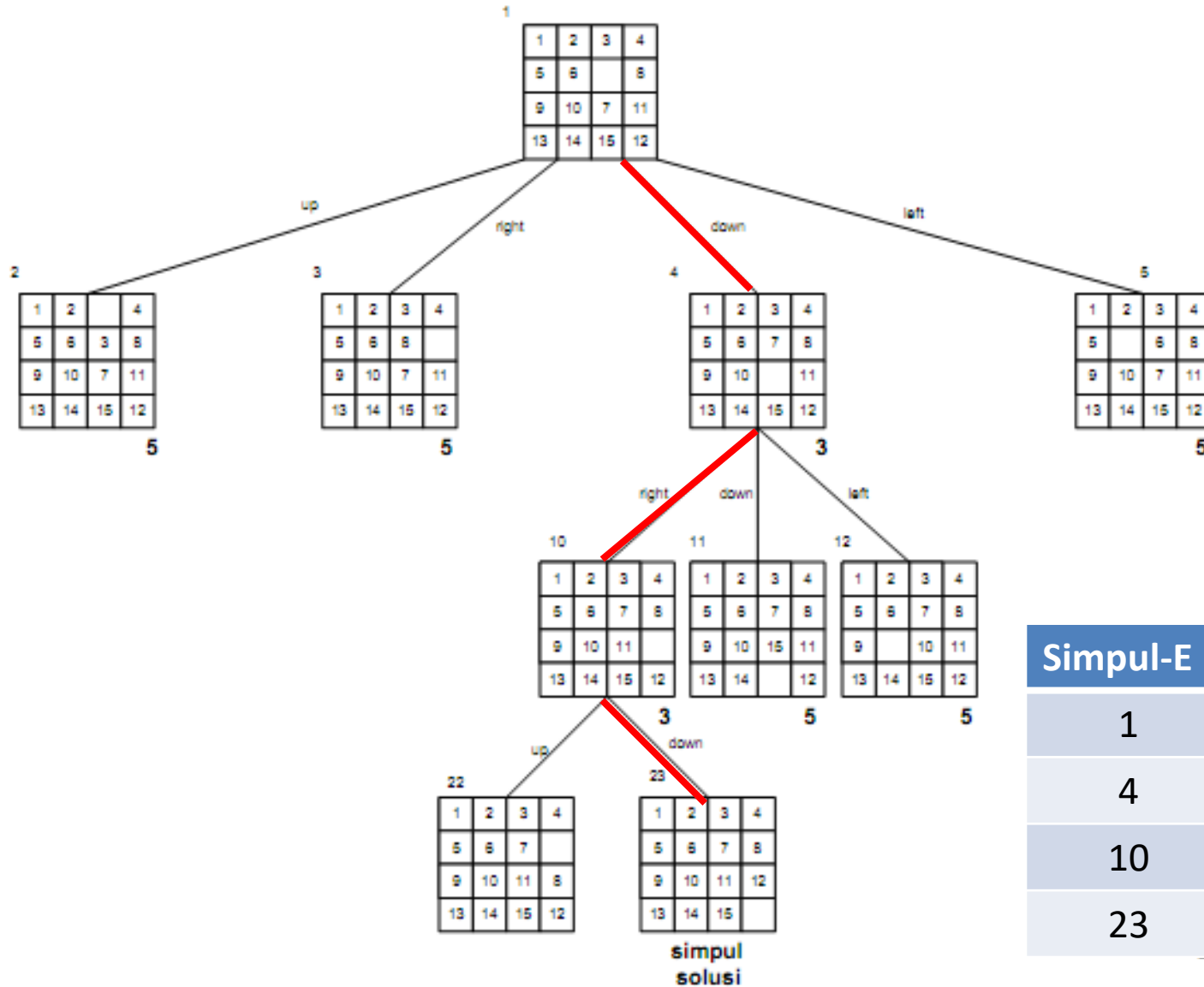
$$C(2)=1+4=5$$

$$C(3)=1+4=5$$

$$C(4)=1+2=3$$

$$C(5)=1+4=5$$

# Pembentukan Pohon Ruang Status 15-Puzzle dengan Branch & Bound

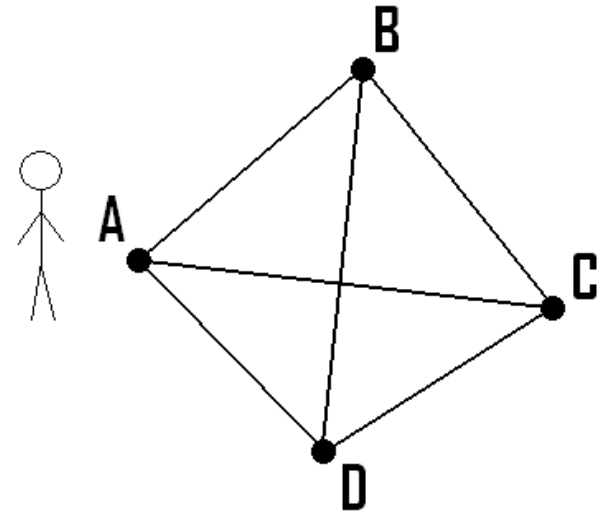


Simpul-E	Simpul Hidup
1	4,2,3,5
4	10,2,3,5,11,12
10	23,2,3,5,11,12,22
23	Solusi ketemu



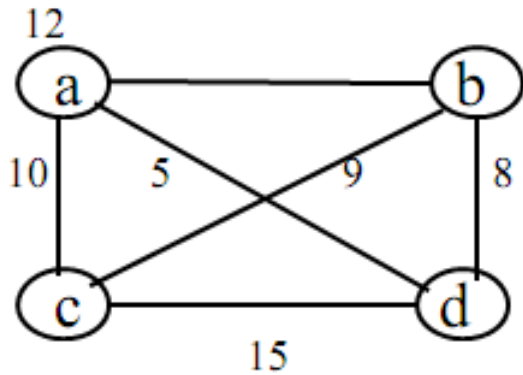
# Travelling Salesperson Problem

Persoalan: Diberikan  $n$  buah kota serta diketahui jarak antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) terpendek yang melalui setiap kota lainnya hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

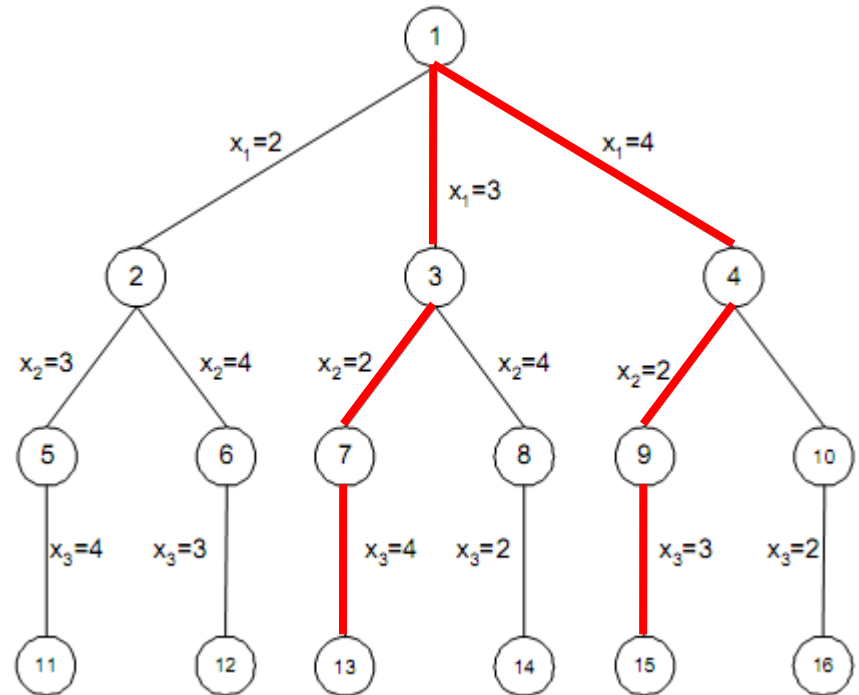


$(n-1)!$  sirkuit hamilton

# Pohon Ruang Status TSP 4 Simpul



A=1; B=2; C=3; D=4  
Simpul awal=1



Solusi: 1-3-2-4-1 atau 1-4-2-3-1

Bobot=5+8+9+10=32

(lihat diktat: TSP-Brute Force hal 20)

# TSP dengan B & B

Contoh lain TSP 5 simpul (matriks bobot/cost matrix):

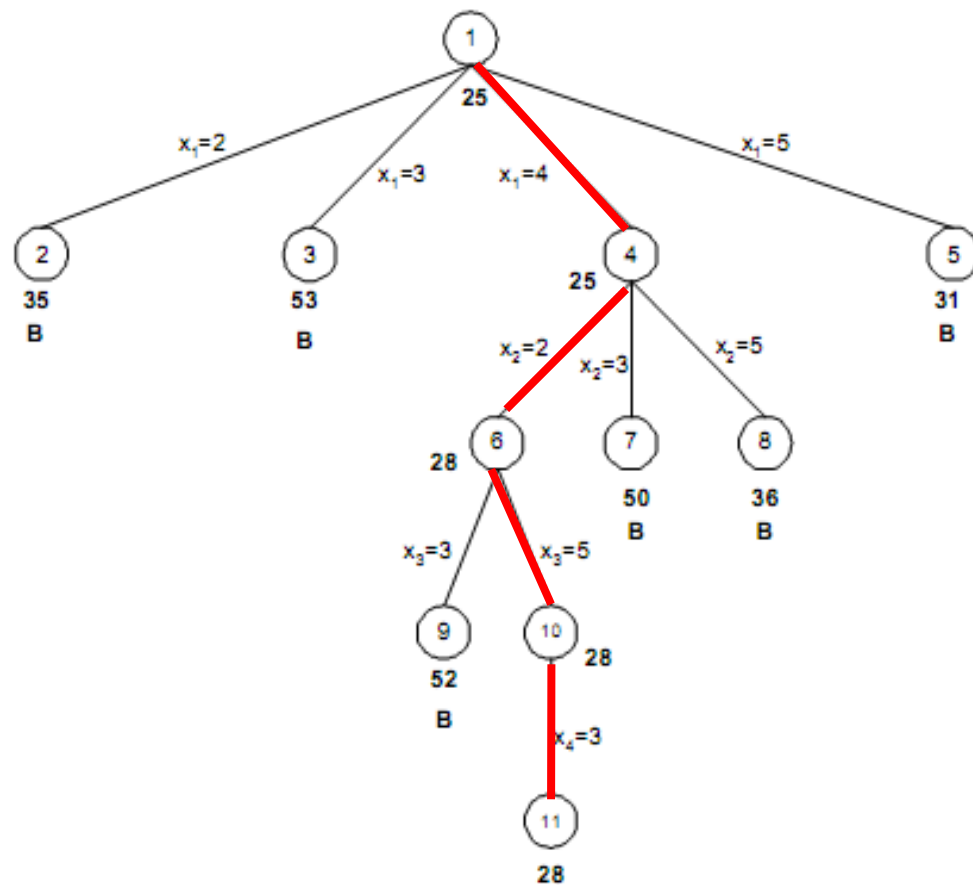
$$\begin{bmatrix}
 \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\
 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\
 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\
 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\
 16 & 4 & 7 & 16 & \infty
 \end{bmatrix}$$

Brute Force:

- $4! = 24$  sirkuit hamilton
- Solusi: 1-4-2-5-3-1
- Bobot:  $10 + 6 + 2 + 7 + 3 = 28$

Greedy:

- Solusi: 1-4-5-2-3-1
- Bobot:  $10 + 3 + 4 + 16 + 3 = 36$



B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix  
 $X_0 = X_5 = 1$

# Cost dari Simpul Hidup TSP

1. Matriks ongkos-tereduksi (reduced cost matrix) dari graf
  - Sebuah matriks dikatakan tereduksi jika setiap kolom dan barisnya mengandung paling sedikit satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif.
  - Batas (*bound*): Jumlah total elemen pengurang dari semua baris dan kolom merupakan batas bawah dari total bobot minimum tur. (hal 159)
2. Bobot minimum tur lengkap

# Reduced Cost Matrix: Contoh

R

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$



A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Setiap kolom dan barisnya mengandung paling sedikit satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif

# Reduced Cost Matrix

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\
 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\
 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\
 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\
 16 & 4 & 7 & 16 & \infty
 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\
 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\
 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\
 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\
 12 & 0 & 3 & 12 & \infty
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\
 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\
 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\
 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\
 12 & 0 & 3 & 12 & \infty
 \end{array} \right] \begin{array}{l} C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc}
 \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\
 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\
 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\
 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\
 11 & 0 & 0 & 12 & \infty
 \end{array} \right] = A
 \end{array}$$

Total semua pengurang =  $10 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 + 3 = 25 \rightarrow$  Cost simpul akar

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

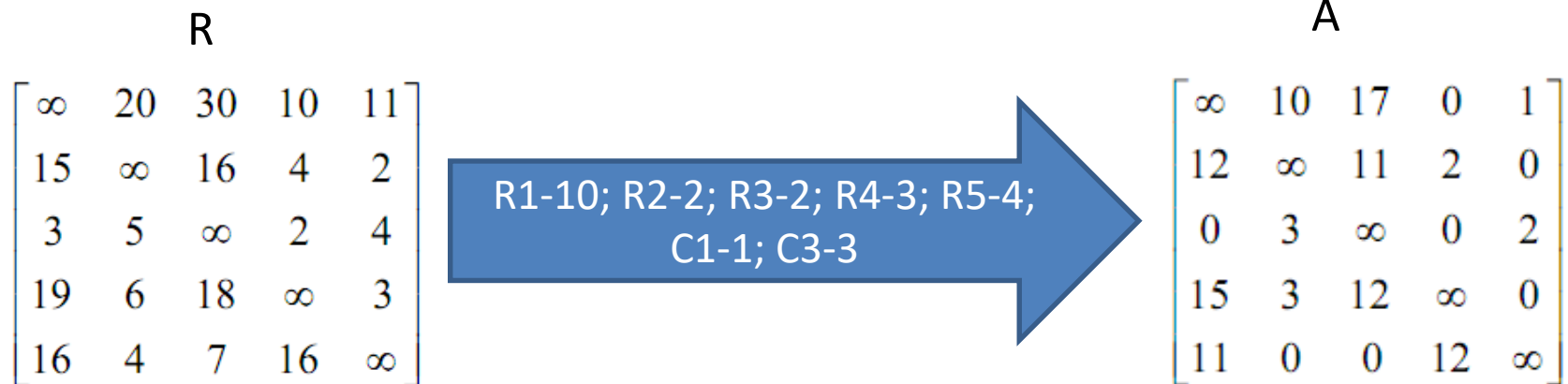
- Misalkan:
  - $A$ : matriks tereduksi untuk simpul  $R$ .
  - $S$ : anak dari simpul  $R$  sehingga sisi  $(R, S)$  pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi  $(i, j)$  pada perjalanan.
- Jika  $S$  bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul  $S$  dapat dihitung sebagai berikut:
  - (a) ubah semua nilai pada baris  $i$  dan kolom  $j$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul  $i$  atau masuk pada simpul  $j$ ;
  - (b) ubah  $A(j, 1)$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah penggunaan sisi  $(j, 1)$ ;
  - (c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks  $A$  kecuali untuk elemen  $\infty$ .
  - Jika  $r$  adalah total semua pengurang, maka nilai batas untuk simpul  $S$  adalah:
$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$
  - Hasil reduksi ini menghasilkan matriks  $B$ .

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (1)

- Misalkan:

A: matriks tereduksi untuk simpul R.

Simpul awal (R) = 1



S: anak dari simpul R sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.

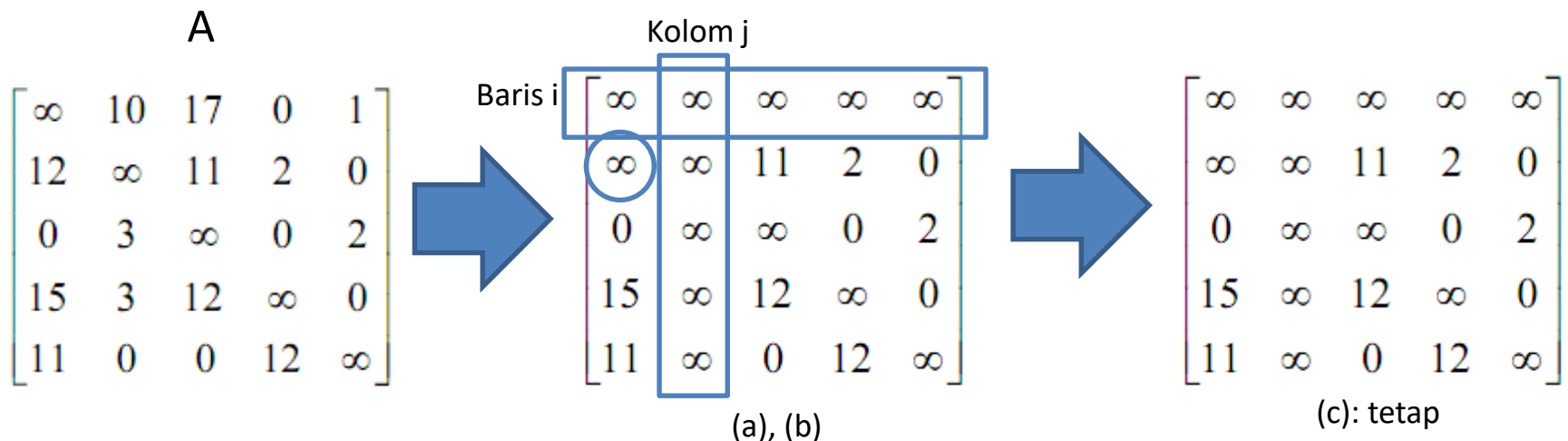
$S \in \{2,3,4,5\}$



# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (2)

- A: matriks tereduksi R; S: anak dari simpul R
- Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut (dari slide 32):
  - (a) ubah semua nilai pada baris i dan kolom j menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul i atau masuk pada simpul j;
  - (b) ubah  $A(j, 1)$  menjadi  $\infty$ . Ini untuk mencegah penggunaan sisi (j, 1)
  - (c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen  $\infty$ .

Contoh: R=1; S=2 (bukan daun)



# Taksiran Cost dgn Reduced Cost Matrix

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

$\hat{c}(S)$  :

- (a) bobot perjalanan dari akar ke S (jika S daun)
- (b) Bobot perjalanan minimum yang melalui simpul S (jika S bukan daun)

$$\hat{c}(\text{akar}) = r$$

$\hat{c}(S)$  = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul  $S$  (simpul di pohon ruang status)

$\hat{c}(R)$  = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul  $R$ , yang dalam hal ini  $R$  adalah orangtua dari  $S$ .

$A(i, j)$  = bobot sisi  $(i, j)$  pada graf  $G$  yang berkoresponden dengan sisi  $(R, S)$  pada pohon ruang status.

$r$  = jumlah semua pengurang pada proses memperoleh matriks tereduksi untuk simpul  $S$ .

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

$$\hat{c}(1) = 25$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

R=1

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

A

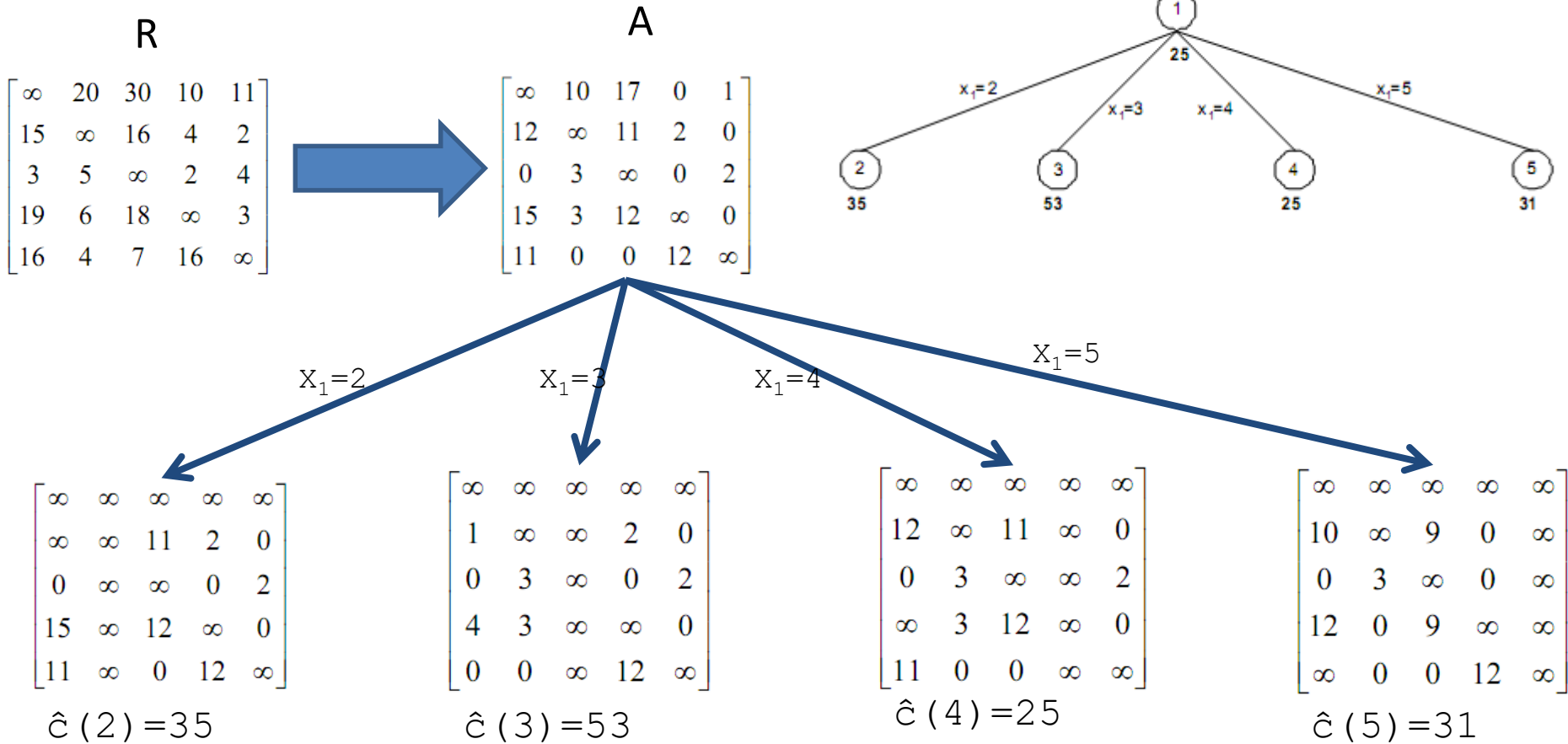
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

S=4

Sisi (1,4) yang sedang diperiksa, maka:

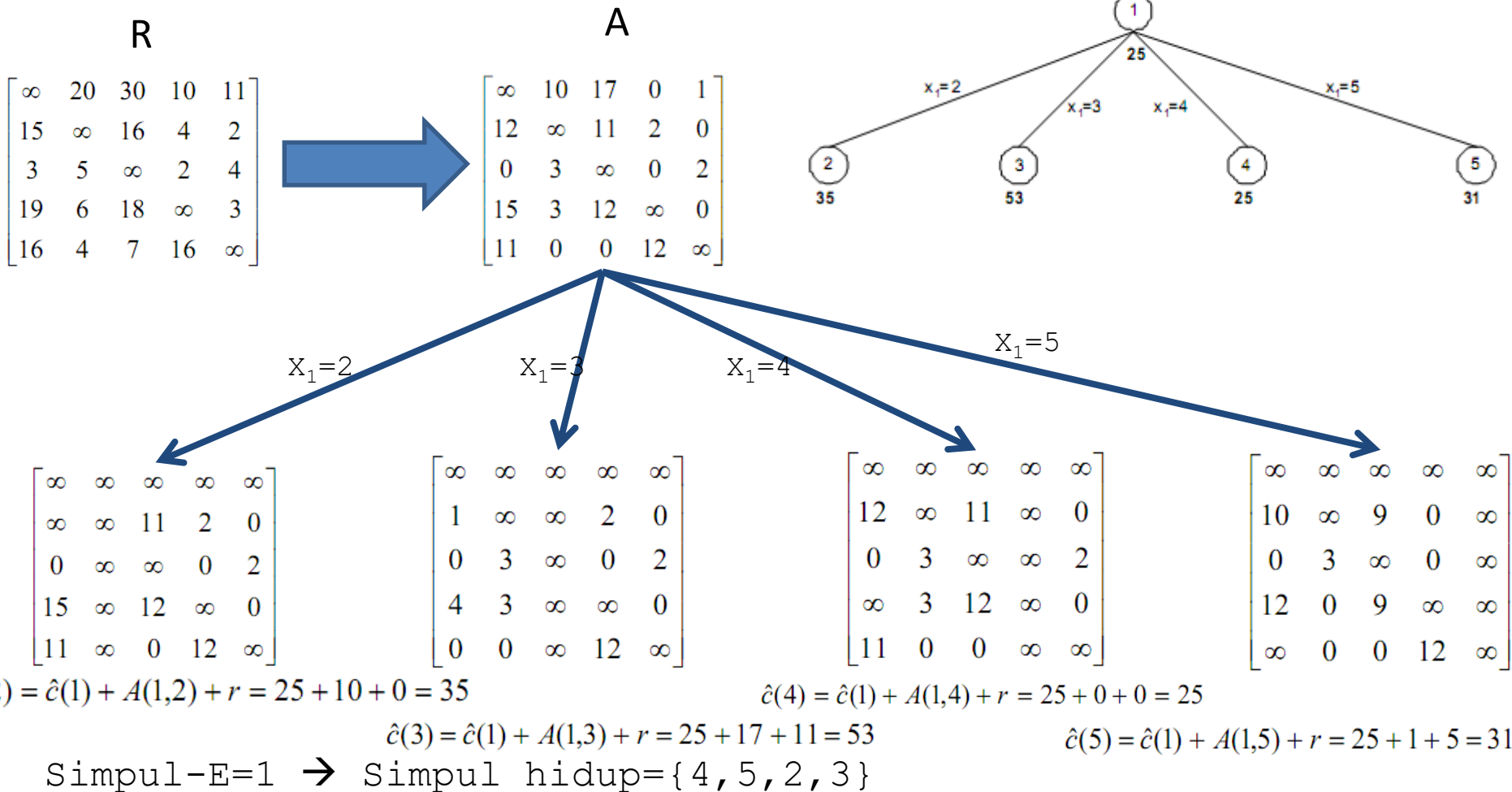
$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



Simpl-E=1 → Simpul hidup={4, 5, 2, 3}

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(6) = \hat{c}(4) + B(4,2) + r = 25 + 3 + 0 = 28$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

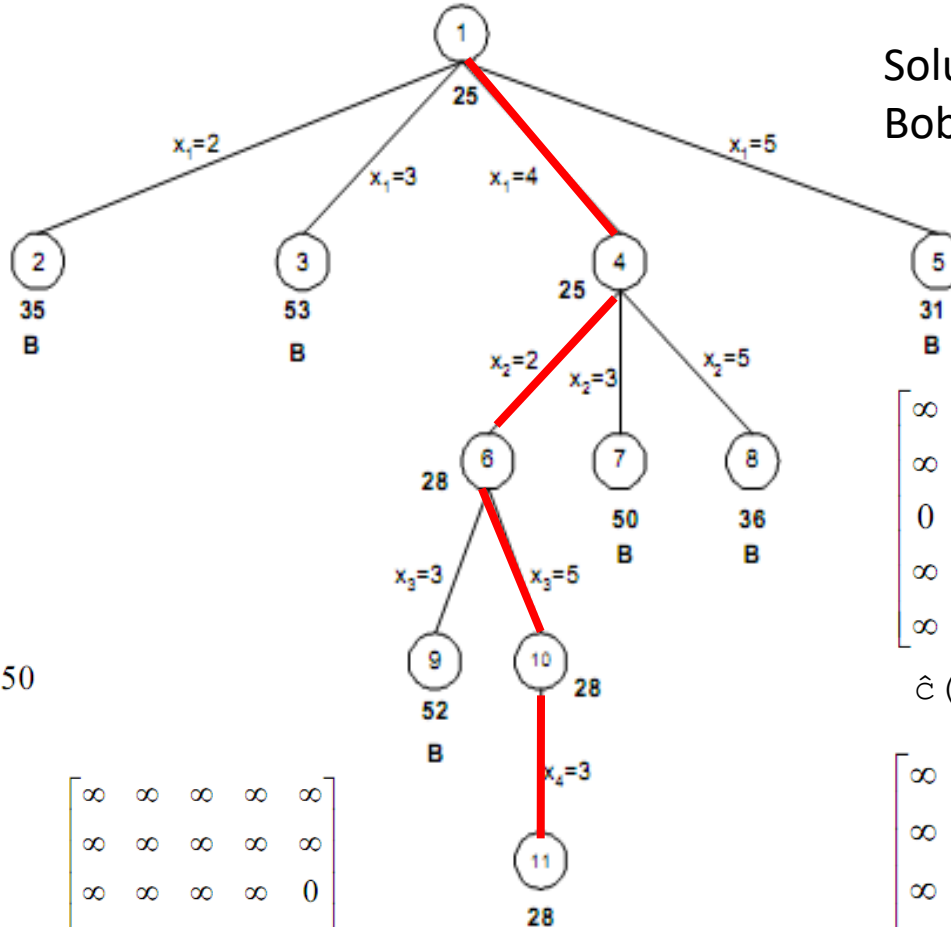
$$\hat{c}(7) = \hat{c}(4) + B(4,3) + r = 25 + 12 + 13 = 50$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(8) = \hat{c}(4) + B(4,5) + r = 25 + 0 + 11 = 36$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,3) + r = 28 + 11 + 13 = 52$$



Solusi: 1,4,2,5,3,1  
 Bobot: 28

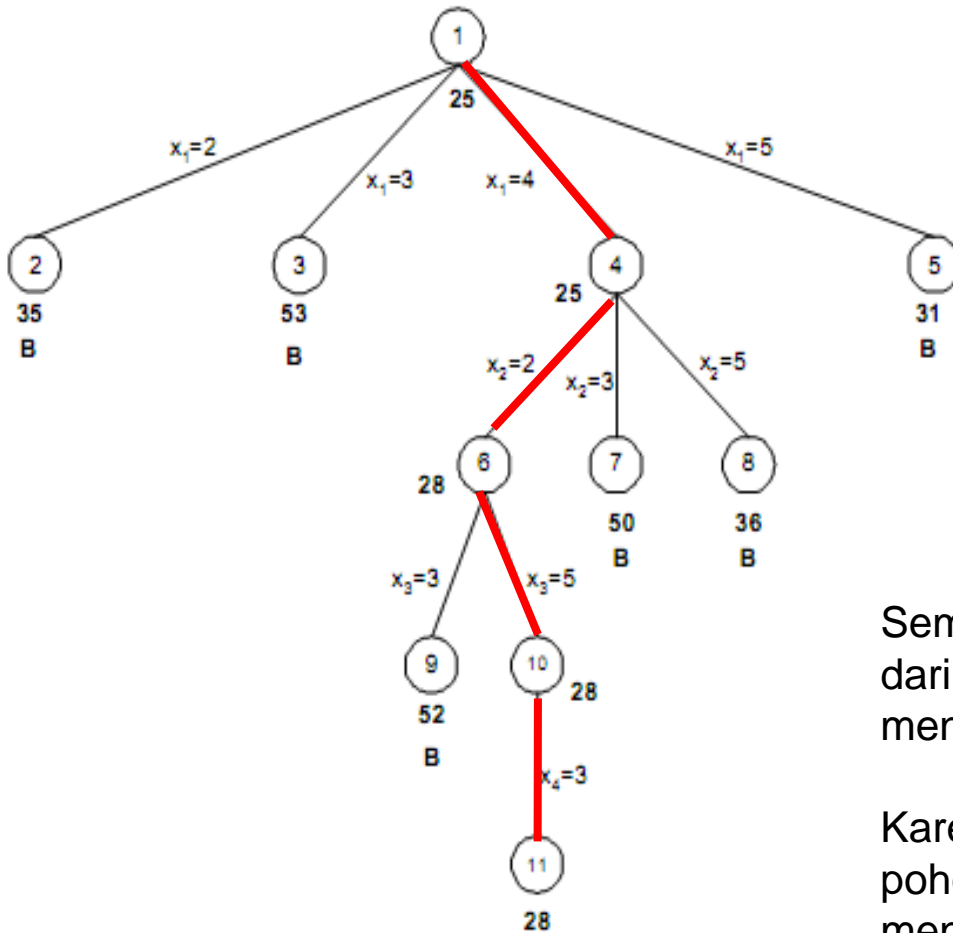
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(10) = 28$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(11) = 28$$

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



Simpul-E	Simpul Hidup
1	4,5,2,3
4	6,5,2,8,7,3
6	10,5,2,8,7,9,3
10	11,5,2,8,7,9,3
11	daun

Semua simpul hidup yang nilainya lebih besar dari 28 dibunuh (B) karena tidak mungkin lagi menghasilkan perjalanan dengan bobot  $< 28$ .

Karena tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka  $X = (1, 4, 2, 5, 3, 1)$  menjadi solusi persoalan TSP di atas dengan bobot 28.

**SELAMAT BELAJAR**