Aplikasi Dynamic Programming dalam Pricing American Option

Jesslyn Nathania / 13517053
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13517053@std.stei.itb.ac.id

Harga pasar dapat berubah setiap saat menuntut pernyataan pentingnya pengertian mengenai opsi. Di tengah perubahaan tidak konsiten ini, tanpa disadari oleh semua orang, keuntungan yang jauh lebih besar dapat diperoleh pula. Sebelum mengenal opsi, kontrak yang mirip pengertiannya telah diterapkan jauh dahulu kala melalui konsep bahwa prediksi penjualan biji Zaitun dapat meninggi di musim panan dari penjualan biasa di musim lainnya. Pada zaman globalisasi ini, banyak opsi yang dibuat dalam bentuk standar menurut pada aturan umum yang terikat dan banyak opsi pula yang dibentuk hanya dalam hubungan bilateral privat(hanya dua pihak), pembeli dan penjual. Opsi merupakan salah satu bagian alat dan instrumen terpenting dalam perhitungan keuntungan dan profit finansial dan dikenal juga sebagai produk turunan.

Kata kunci – harga, pasar, konsiten, opsi, kontrak, prediksi pembeli, penjual, profit, aset, finansial, keuntungan, produk, turunan.

I. INTRODUCTION (*HEADING 1*)

Dalam istilah pasar modal, **Opsi** merupakan suatu hak beli dan jual yang diberikan dengan dasar pada suatu kontrak perjanjian pada suatu batas harga yang telah disetujui sebelumnya pada selang waktu yang ditentukan. Produk dapat berupa asset berharga, surat keuangan berharga, saham, komoditi dan mata uang asing. Opsi sangat berguna dalam meminimalisasi risiko dan memaksimalkan profit dengan daya daya ungkit yang lebih besar. Opsi terbagi dalam dua golongan. ***Call Option*** memberikan hak pada pemegang untuk membeli saham pada batas harga dan selang waktu yang telah ditentukan pada perjanjian(bukan suatu perjanjian). ***Put Option*** memberikan kewenangan bagi penjual(penulis kontrak) untuk memaksa pihak pembeli untuk membeli saham pada batas harga dan selang waktu yang telah ditentukan pada perjanjian sebelumnya.

American option menerapkan *Call Option* dan *Put Option* yang dapat dilaksanakan setiap waktu sebelum batas waktu yang dijanjikan terlewat. Suatu opsi juga dapat diterapkan dengan batas harga asset yang sesuai dengan harga pasar. Hal ini memungkin nilai suatu opsi dapat menurun beberapa kali selama perjanjian kontrak berlaku. Kebanyakan pertukaran opsi yang terjadi dalam jumlah yang cukup besar sekaligus merupakan aplikasi dari *American Option*. *American option* memungkingkan pemegang perjanjian untuk menunggu hingga waktu yang tepat, waktu ketika harga produk berada pada titik tertinggi yang paling menguntungkan, lalu mengeksekusi opsi tersebut. *Put option* pada *American option* ini menguntungkan penulis kontrak untuk menjual suatu aset pada harga pasar yang tinggi. Penulis kontrak tidak wajib untuk tetap melakukan penjualan terhadap aset. Pihak kerjasama dari kontrak ini harus membeli apabila begitu penulis kontrak mengeluarkan suara. *Call option* pada *American option* menguntungkan pihak penulis kontrak untuk membeli aset pada harga pasar yang rendah. Penulis kontrak tidak harus melaksanakan perjanjian ini, tapi pihak kerjasama dari kontrak ini harus menurutinya.

Selain *American option*, terdapat *European options* yang mempunyai perbedaan dalam pelaksanaan pertukaran opsi. *European option* hanya boleh dilaksanakan pada saat tanggal ekspirasi pada saat itu juga. Berbeda dengan *American Option* yang dapat dilaksanakan pada setiap saat sebelum waktu ekspirasi perjanjian diterapkan. Melalui pengertian ini pula, dikarenakan fleksibilitas, *American options* dianggap lebih menguntungkan dibandingkan *European-style options*, yang hanya dapat dilakukan pertukarannya hanya pada suatu saat yang tepat.

Hasil profit yang didapatkan dalam *American option* maupun *European option* dapat ditentukan melalui rumus berikut.

- Max{(S-K),0}, untuk *call option*
- Max{(K-S),0}, untuk *put option*

K merupakan harga yang dijanjikan. S merupakan harga pasar pada saat itu juga ketika suatu aset dapat dibeli atau dijual.

Terdapat jenis opsi yang lain sebagai berikut; *Bermudan option*, *Canary option*, *Verde option*, *Capped-style option*, *Compound option*, *Shout option*, *Double option*, *Swing option*, dan *Evergreen option*. Walaupun terdiri dari banyak jenis, konsep utama dari sebuah opsi tetap terpenuhi, yaitu memiliki pihak penulis kontrak dan pihak kerjasama dari opsi tersebut. Yang berbeda dari beragam jenis opsi ini, yaitu terletak pada waktu untuk mengeksekusi opsi tersebut dan bagaimana opsi tersebut dieksekusi.

II. DASAR TEORI

A. Penentuan Harga dari Opsi

Pricing model ini digunakan untuk menentukan harga yang cukup adil atau nilai secara teori diperuntukan untuk *call option* dan *put option*. Model ini diterapkan berdasarkan enam variabel pengubah, yaitu volatilitas, jenis opsi, harga saham pokok, waktu, *strike price*, dan tingkat bebas risiko. Spekulasi ini lebih menunjukkan ke arah menyelesaikan turunan permasalahan dari pasar saham. Dengan *model pricing* yang cocok sangat berpeluang untuk mengurangi kemungkinan dilakukan pertukaran pada saat bersamaan.

Dalam menentukan harga dari opsi dapat ditelusuri melalui tiga model penting berikut ini.

1. *Black-Scholes Model*

Mayoritas penggunaan *pricing model* diterapkan oleh *traders* yang berminat membeli opsi yang ditetapkan harganya dibawah perhitungan nilai berdasarkan formula perhitungan dan menjual opsi di atas perhitungan yang lebih tinggi dibandingkan perhitungan nilai melalui perhitungan formula *Black-Schole*. *Black-Schole* dan *Black-Scholes-Merton model* sangat sesuai diterapkan dalam model Matematika untuk pasar saham yang dinamis, terhitung juga sebagai alat inventasi turunan. Model ini hanya mempunyai sifat *European-style pricing option* dan hanya bisa dieksekusi pada saat waktu ekspirasi tertera saja.

Black-Scholes model mengasumsikan bahwa pasar terdiri dari satu aset yang berbahaya, biasanya disebut *stock* dan satu aset lainnya yang hanya memiliki tingkat bahaya yang sangat rendah. Contohnya, pasar uang, *cash*, dan lain-lain.

- Tingkat dari hasil yang dikembalikan oleh aset tanpa bahaya adalah konstan. Oleh karena itu, dapat dipastikan suatu investasi tanpa kerugian finansial. (*riskless rate*)
- Tingkat dari hasil yang dikembalikan oleh harga *stock* adalah dalam bentuk *log* matematika yang terus berlanjut dan dilakukan dengan acak terhadap langkah selanjutnya yang akan terjadi. Secara inti, dapat disebut *geometric Brownian motion*. Diasumsikan volatilitasnya konstan. (*random walk*)
- Pemegang *Stock* ini tidak diberikan pembagian laba saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki. Hal ini dilakukan dengan mengantipasi kurangnya laba yang didapat dan kas yang tersedia untuk perusahaan.
- Hasil yang didapatkan dari opsi tertentu ini mempunyai fungsi distribusi normal.

Formula berikut memperhitungkan perhitungan harga opsi pada saat itu, harga penjualan atau pembelian opsi pada saat itu juga, waktu hingga selesainya ekspirasi(dalam persen tahun), mengimplikasi volatilitas dan persen bunga tanpa kerugian.

$$C = SN(d_1) - N(d_2)Ke^{-rt}$$

C = Call premium
S = Current stock price
t = Time until option exercise
K = Option striking price
r = Risk-free interest rate
N = Cumulative standard normal distribution
e = Exponential term

s = St. Deviation
ln = Natural Log

$$d_1 = \frac{\ln\left(S/K\right) + \left(r + s^2/2\right)t}{s \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - s \cdot \sqrt{t}$$

2. *Binomial Options pricing model*

Model ini merupakan metode penilaian opsi yang diterapkan sejak 1979. Model ini menggunakan prosedur iterasi, penerapan spesifikasi node dan poin-poin di waktu tertentu, yang terdapat pada dalam selang waktu antara waktu mulai diterapkannya perjanjian tersebut hingga waktu ekspirasi. Model ini dapat diterapkan dalam sebuah graf pohon dengan akar yang merupakan saham pada suatu periode tertentu. Kedua anaknya masing-masing merupakan harga saham pada periode berikutnya. Anaknya ini kemudian akan menjadi akar dari node selanjutnya. Hal ini akan berlangsung secara rekursif.

Jika S merupakan harga pada saat tertentu, di periode selanjutnya:

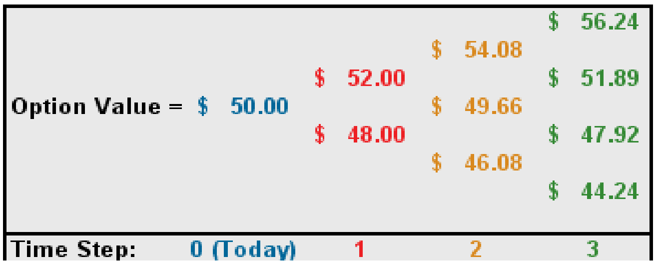
$$S_{up} = S.u \text{ atau } S_{down} = S.d$$

Faktor atas dan bawah ini dikalkulasi menggunakan volatilitas σ dan selang waktu tertentu, ∂t dalam tahun,

$$u = e^{\sigma(t)\text{^}1/2}$$

$$d = e^{\sigma(t)\text{^}1/2} = 1/u$$

Terlebih lagi, model ini mengurangi kemungkinan perubahan harga yang terjadi dan juga menghapus kemungkinan untuk dilakukan pertukaran secara bersamaan(*arbitrage*).



Gambar 1. *contoh binomial tree untuk perhitungan opsi*

Binomial option price models hanya memungkinkan dua *outputs* untuk setiap elemen pada setiap tahap tertentu. Keuntungan ada model ini yaitu memiliki perhitungan Matematika yang cukup mudah dimengerti. Namun, kerugian ini yaitu pendekatannya sangat kompleks dan memerlukan fasilitas perhitungan dan program dari komputer apabila frekuensi perubahan harga saham terlalu banyak. Kerugian ini dapat diatasi dan disederhanakan dengan model *Black and Scholes*.

3. *More on Binomial models*

3.1. *The Cox-Ross-Rubenstein model*(CRR)

Model CRR menggunakan metode perhitungan risiko netral. Hasil ekspektasi merupakan persamaan terhadap persen bunga yang berbas dari risiko.

- Tidak ada kemungkinan untuk adanya pembelian atau penjualan aset secara bersamaan atau pasar yang efisien.
- Setiap saatnya, simpul, harga pada periode tertentu hanya boleh mengambil salah satu giliran antara atas atau bawah tapi tidak keduanya sekaligus.

Penilaian dimulai dari masing-masing simpul final(yaitu pada saat masa ekspirasi) dan iterasi dilakukan membelakangi melalui seluruh penelusurah graf pohon hingga simpul final atau yaitu simpul pertama(waktu dimulainya perjanjian).

$$u = e^{\sigma(t)^{\wedge}1/2}$$

$$d = e^{\sigma(t)^{\wedge}1/2} = 1/u$$

$$p = (e^{rT} – d)/(u-d)$$

3.2. *Black-Scholes smoothing*

Perhitungan *Black-Scholes* digunakan untuk menghitung tiga simpul yang dekat dengan harga penjualan atau pembelian aset pada saat tertentu dan untuk mendapatkan oksilasi, *Black-Scholes* dapat juga digunakan untuk menghitung semua simpul terdekat dengan harga tersebut.

B. *Dynamic Programming*

Program Dinamis(*Dynamic Programming*) merupakan suatu metode dalam memecahkan masalah kompleks dengan teknik memecahkan masalah tersebut atau membagi masalah tersebut ke beberapa sub masalah. Setiap solusi dari sub masalah tersebut ditetapkan indeksnya ke beberapa tahapan sedemikian rupa sehingga menfasilitasi dalam penelusuran yang akan dilakukan. Di proses selanjutnya, apabila suatu solusi sub masalah tertentu masih harus digunakan, tidak harus melakukan kompilasi ulang untuk mendapatkan hasil tersebut, tapi cukup mengakses solusi yang telah dikompilasi sebelumnya. Hal ini dilakukan dengan tujuan penghematan waktu yang berarti. Teknik penyimpanan solusi terhadap sub masalah ini dinamakan memoisasi(*memorization*).

Penyimpanan ini dilakukan dengan sistem yang menyerupai *caching*. Sehingga pada program, cukup mengakses tempat penyimpanan tersebut. Sewaktu melakukan proses penyimpanan, digunanakan optimisasi di keseluruhan rekursif. Dengan arti lainnya, *Dynamic programming* menggunakan prinsip optimalitas, yaitu jika solusi total optimal, layaknya bagian solusi sampai tahap ke-k harus optimal juga. Penyelesaian dengan metode *dynamic programming* juga dapat dimulai dari paling belakang(tahapan paling akhir) lalu mundur hingga tahapan pertama.

III. IMPLEMENTASI *DYNAMIC PROGRAMMING* DALAM BERBAGAI MODEL *OPTION PRICING*

1. *Binomial options pricing model*

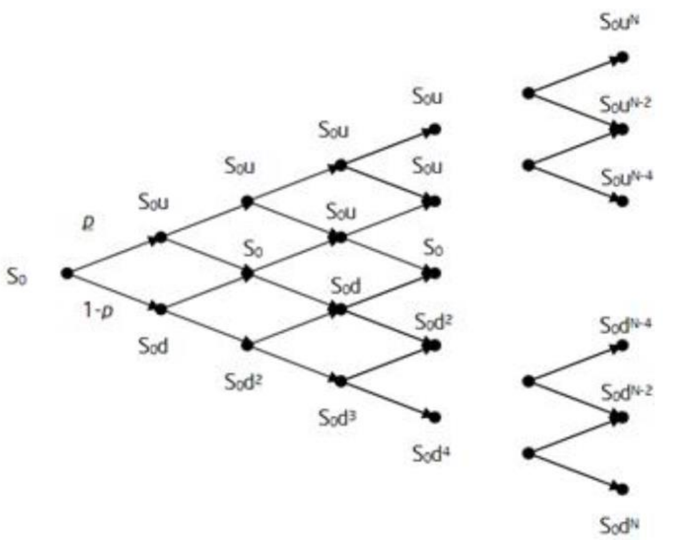
Binomial options pricing model menerapkan teknik dan prinsip *binary tree* dalam perhitungan. Di model ini, suatu nilai saham atau simpul pada tahapan tertentu hanya boleh menempuh dua nilai kemungkinan. Graf pohon yang dirancang terdiri dari simpul yang merepresentasikan nilai dari aset mulai dari awal waktu eksekusi opsi(tahapan paling awal) hingga masa ekspirasi dari opsi tersebut(tahapan paling akhir).

Penilaian aset dalam metode ini terdiri dari tiga proses berikut.

a. Generasi pohon harga.

b. Mengkalkulasi setiap nilai opsi pada setia[simpul final.

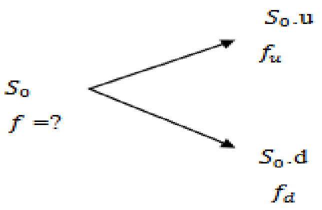
c. Kalkulasi secara sekuensial dari nilai opsi di setiap simpul yang diturunkan.



Gambar 2. *contoh pohon binary untuk permasalahan option pricing yang kompleks*

dari awal waktu eksekusi opsi(tahapan paling awal) hingga masa ekspirasi dari opsi tersebut(tahapan

Di setiap simpul final, sudah dapat dipastikan bahwa nilai opsi di simpul final mengikuti persamaan Max{|K-S_n|,0}. K merupakan *strike price* dan S_n merupakan *spot price* dari aset perjanjian di periode ke-n.



Pada tahap ini, akan ditelusuri grap pohon dari tahapan final hingga mundur menuju awal tahapan simpul.

$$S_0.u.\Delta - f_u = S_0.d.\Delta - f_d$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0.u - S_0.d} \qquad (1)$$

Perhitungan di atas merupakan penujuk, apabila hasilnya positif, maka dapat dipastikan itu merupakan *call option* dan negative jika itu merupakan *put option*.

$$S_0.\Delta - f = (S_0.u.\Delta - f_u)e^{-rT}$$

$$\Rightarrow f = S_0.\Delta(1 - u.e^{-rT}) + f_u e^{-rT} \qquad (2)$$

Kedua persamaan dipersatukan hingga mendapat formula berikut.

$$f = e^{-rT}\left(\frac{e^{rT}-d}{u-d}f_u + \frac{u-e^{rT}}{u-d}f_d\right)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk yang lebih spesifik.

$$f = e^{-rT}(p.f_u + (1-p)f_d)$$

Dimana:

$$p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

Pada setiap jalur dari simpul, dapat diturunkan suatu simpul dengan perbedaan *cost* sebesar p atau 1-p. Untuk menghitung fungsi nilai opsi pada saat itu juga dapat ditempul melalui rumus *f* yang telah diturunkan.

Di *dynamic programming*, dapat dibuat sebuah *array* yang merupakan nilai tiap simpul. Namun, sebelum membentuk array ini, harus sudah terbentuk dan terstruktur jelas indeks dari simpul nilai aset berkaitan. Selain *array*, dapat dibentuk juga sebuah *mapping* atau dictionary dengan *key* merupakan variabel penunjuk dari simpul nilai opsi berkaitan dan value yang memuat nilai jual atau beli dari opsi itu sendiri.

Untuk melakukan perhitungan per nlai opsi di simpul, telebih dahulu harus mempunyai nilai f_u dan f_d. Kemudian, nilai ini akan disimpan pada indeks yang sesuai di array maupun *key* yang sesuai pada *mapping*. Hal ini dibuat sedemikian rupa sehingga akses f_u dan f_d hanya mempunyai kompleksitas sebanyak O(1). Serta perhitungan keseluruhan simpul hanya memakai kompleksitas sebanyak O(n).

Pada program berikut merupakan perwujudan dari *pricing option* yang dilakukan.

```
function price =
GenericLS(S0,X,r,T,sigma,NSteps,NRepl,fhandles
)
dt = T/NSteps;discount = exp(-r*dt);
discountVet = exp(-r*dt*(1:NSteps)’);
NBasis = length(fhandles); % number of basis
functions
a = zeros(NBasis,1); % regression
parametersRegrMat = zeros(NRepl,NBasis);
% generate sample paths
SPaths=GenPathsA(S0,r,sigma,T,NSteps,NRepl);
SPaths(:,1) = []; % get rid of starting prices
%
CashFlows = max(0, X - SPaths(:,NSteps));
ExerciseTime = NSteps*ones(NRepl,1);
for step = NSteps-1:-1:1
    InMoney = find(SPaths(:,step) < X);
    XData = SPaths(InMoney,step);
    for i=1:NBasis
        RegrMat(1:length(XData), i) =
feval(fhandles(i), XData);
    end
    YData = CashFlows(InMoney) .*
discountVet(ExerciseTime(InMoney) - step);
    a = RegrMat(1:length(XData),:) \ YData;
    IntrinsicValue = X - XData;
    ContinuationValue =
RegrMat(1:length(XData),:) * a;
    Exercise = find(IntrinsicValue >
ContinuationValue);
    k = InMoney(Exercise);
    CashFlows(k) = IntrinsicValue(Exercise);
    ExerciseTime(k) = step;
end % for
price =
mean(CashFlows.*discountVet(ExerciseTime));
```

Fungsi *price* di atas menggunakan parameter sebagai berikut.

- K : *Strike price*
- T hari : selang waktu dari mulainya eksekusi opsi hingga masa ekspirasi.

- S_t : *Stock price* pada hari ke-t
- Laju pertumbuhan : u∈(1,∞)
- Laju pengurangan : d∈(0,1)
- Probabilitas dari pertumbuhan : p∈[0,1]

ACKNOWLEDGMENT

Puji syukur kepada Tuhan serta masyarakat yang telah memberikan kesempatan kali ini pada saya untuk dapat menyelesaikan makalah dengan topik perhitungan harga opsi dengan judul "***Aplikasi Dynamic Programming dalam Pricing American Option***". Saya ucapkan terima kasih yang banyak juga kepada para penulis sebelumnya sehingga saya dapat menyelesaikan makalah ini dengan ilmu yang telah kalian salurkan.

REFERENCES

[1] http://janroman.dhis.org/stud/I2012/EandAPut/EandAPut.pdf

[2] https://www.investopedia.com/terms/b/binomialoptionpricing.asp

[3] F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Valuing American Options by Simulation: a SimpleLeast-SquaresApproach.The Review of Financial Studies, 14:113-147, 2001.

[4] R.C. Merton.Continuous-Time Finance. Blackwell Publishers, Malden (MA), 1990.

[5] D.A. Tavella.Quantitative Methods in Derivatives Pricing: an Introduction to Computa-tional Finance. Wiley, New York, 2002.

[6] J.N. Tsitsiklis and B. Van Roy. Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert SpaceTheory, Approximation Algorithms, and an Application to Pricing High-Dimensional Fi-nancial Derivatives.IEEE Transactions on Automatic Control, 44:1840-1851, 1999.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 29 April 2012

Jesslyn Nathania
13517053