

Aplikasi Greedy Untuk Pewarnaan Map Pada Jaringan Telepon Seluler GSM

Dandy Arif Rahman 13516086
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
dandyarifrahman@gmail.com

Ilmu tentang teori graf sangat luas, dari mulai teori tentang titik, sisi, upagrah, dan lain sebagainya. Terkadang saat mempelajarinya tidak puas jika hanya memahami teorinya saja, padahal banyak aplikasi dari teori graf ini. Salah satu aplikasi dari teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf banyak digunakan di bidang pemetaan, metode ini berguna memetakan jaringan telepon seluler GSM.

Kata Kunci— pewarnaan graf, GSM.

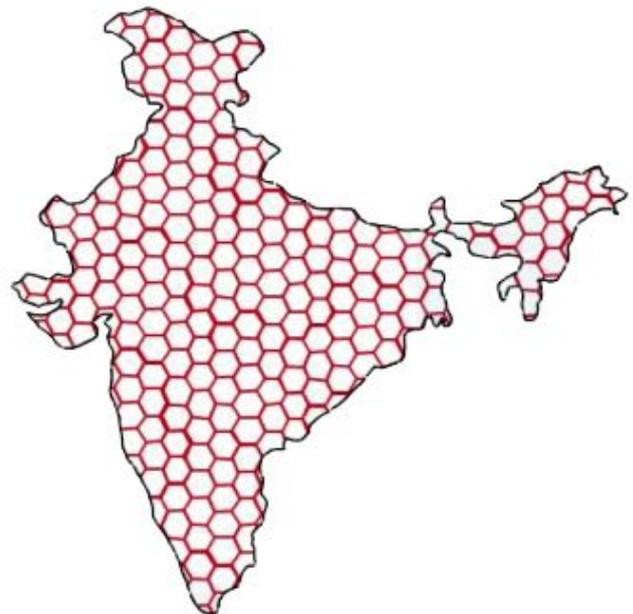
I. PENGANTAR

Backtracking adalah sebuah algoritma yang digunakan untuk mendapatkan solusi secara sebagian maupun keseluruhan terhadap masalah komputasional, terutama masalah dengan *constraint* tertentu. Algoritma ini pertama kali diperkenalkan oleh D. H. Lehmer pada tahun 1950. *Backtracking* dinilai menjadi sebuah metode yang mangkus, sistematis, dan terstruktur dalam memecahkan permasalahan. Algoritma ini pun merupakan bentuk perbaikan dari algoritma *exhaustive search*, berbeda dengan *exhaustive search* dimana semua kemungkinan dibangkitkan, pada *backtracking* hanya kemungkinan yang mengarah ke solusi yang dibangkitkan.

Backtracking dan teori graf juga berkaitan dengan erat, teori yang muncul pada abad ke 18 ini yang bermula saat Leonhard Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan klasik yang sangat terkenal, yaitu Jembatan Konigsberg, menyediakan permasalahan yang sangat cocok untuk diselesaikan dengan algoritma *backtracking*, salah satunya masalah yang akan dibahas di makalah ini, yaitu pewarnaan graf.

Pewarnaan graf merupakan permasalahan teori graf yang mengharuskan simpul-simpul yang dihubungkan oleh suatu sisi memiliki warna yang berbeda. Salah satu masalah terapan dari pewarnaan graf yaitu pewarnaan map pada jaringan telepon seluler GSM (*Group Special Mobile*). Suatu jaringan

GSM di suatu daerah tertentu dibagi menjadi sel-sel, sel ini berbentuk heksagonal. Pada setiap sel terdapat menara-menara yang memancarkan sinyal dan menangkap sinyal dari dan ke telepon seluler. Tetapi frekuensi sinyal pada tiap sel tidak boleh sama, karena ini akan menyebabkan interferensi gelombang, maka dari itu para pakar membuat tiap sel mempunyai frekuensi yang berbeda-beda. Untuk meminimalisir jenis menara yang dibuat, maka menurut teorema empat warna, bahwa sebuah daerah pada map dapat diwarnai dengan tidak melebihi empat warna. Masalah lain yang muncul adalah bagaimana mewarnai tiap sel yang bersisian dengan warna yang berbeda dengan hanya empat warna yang tersedia.



Gambar 1.1. Map Jaringan GSM
Sumber :

<https://www.youtube.com/watch?v=tt1-Ohe90OU>

(Diakses 11 Mei 2018 Pk. 21.32)

II. DEFINISI

- 1) **Graf** : Representasi dari himpunan objek yang berpasang-pasangan. Objek tersebut direpresentasikan sebagai titik dan hubungan antar objek direpresentasikan sebagai sisi^[7].
- 2) **Pewarnaan Graf** : Pewarnaan pada titik-titik yang ada di graf sehingga tidak ada dua titik yang berdampingan memiliki warna yang sama^[7].
- 3) **GSM** : standar yang dikembangkan oleh European Telecommunications Standards Institute (ETSI) untuk mendeskripsikan sebuah protokol untuk jaringan selular digital generasi kedua yang digunakan oleh perangkat selular seperti tablet, pertama kali dikembangkan di Finland pada Desember 1991^[2].
- 4) **Backtracking** : algoritma yang digunakan untuk mencari semua atau sebagian solusi pada sebagian permasalahan komputasional, terutama masalah pemenuhan *constraint* yang membuat kandidat terhadap solusi dan mengabaikan kandidat jika itu tidak mengarah ke solusi^{[3][4]}.
- 5) **Graf Planar** : graf yang bisa digambarkan pada sebuah bidang tanpa ada sisi yang bersilangan.

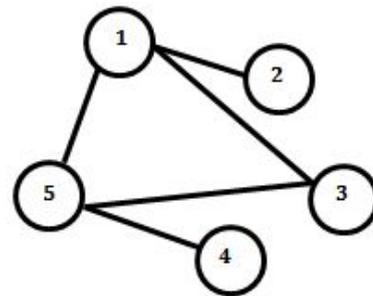
III. TEORI

- 1) **Four Color Theorem** : Daerah dari sebuah map planar apapun dapat diwarnai dengan hanya 4 warna, dengan begitu tiap daerah yang bersisian memiliki warna yang berbeda.^[1]
- 2) Jika G mempunyai n titik maka $\chi(G) \leq n$ ^[7].
- 3) $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G tidak mempunyai sisi^[7].
- 4) Graf *cycle* G yang mempunyai titik berjumlah genap mempunyai $\chi(G) = 2$ ^[7].
- 5) Graf *cycle* G yang mempunyai titik berjumlah ganjil mempunyai $\chi(G) = 3$ ^[7].
- 6) Graf komplit G berorde n mempunyai $\chi(G) = n$ ^[7].

IV. MEMAHAMI LEBIH DALAM TENTANG PEWARNAAN GRAF

Berbicara mengenai teori tentang graf, teori graf telah melahirkan bidang-bidang baru yang mempermudah banyak persoalan. Graf membantu merepresentasikan suatu permasalahan kedalam bentuk matematika yang membuatnya lebih mudah untuk dikomputasikan.

Salah satu bidang dari graf yang menarik banyak perhatian adalah *graf coloring* atau pewarnaan graf. Seperti yang sempat disinggung diatas definisi dari pewarnaan graf adalah pewarnaan pada objek-objek yang di representasikan sebagai titik-titik yang ada di graf sehingga tidak ada dua titik yang berdampingan memiliki warna yang sama. Sebagai contoh, gambar 4.1 merepresentasikan graf yang mempunyai 5 titik dan 5 sisi.

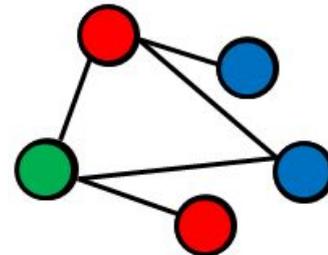


Gambar 4.1. Graf yang mempunyai 5 titik dan 5 sisi

Sumber :

<https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring> (Diakses 5 Mei 2018 Pk. 21.50)

Jika graf pada gambar 4.1 kita beri warna maka grafnya akan menjadi seperti pada gambar 4.2



Gambar 4.2. Pewarnaan Graf pada gambar 4.1

Sumber :

<https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring> (Diakses 5 Mei 2018 Pk. 21.50)

Pada graf diatas, titik 1 dan 2 tidak boleh memiliki warna yang sama karena kedua titik tersebut terhubung oleh suatu sisi, sedangkan titik 2 dan 3 boleh memiliki warna yang sama karena kedua titik tersebut tidak terhubung oleh suatu sisi. Begitu juga dengan titik-titik lainnya, dua titik yang terhubung oleh suatu sisi tidak boleh memiliki warna yang sama.

Suatu graf memungkinkan untuk memiliki lebih dari satu kombinasi pewarnaan graf. Dibawah ini merupakan kombinasi pewarnaan graf lainnya.

memuaskan, yaitu *backtracking*. Misal diberikan graph seperti gambar dibawah ini :

Gambar 5.1 Graf Planar

kemudian diberikan 2 warna yaitu merah dan kuning, langkah-langkahnya akan seperti :

1. Warnai graf no 1 dengan warna merah dan buat pohon pencariannya

Gambar 4.3. (1) dan (2) Kombinasi pewarnaan graf pada Gambar 4.1 lainnya

Sumber :

<https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring> (Diakses 5 Mei 2018 Pk. 21.50)

Sekarang sudah jelas bahwa suatu graf memungkinkan untuk memiliki lebih dari satu kombinasi pewarnaan, Sekarang tujuan kita adalah untuk mencari warna minimum yang dibutuhkan untuk pewarnaan suatu graf.

Pada gambar 4.3 (1) kita dapati bahwa pewarnaan graf tersebut menggunakan tiga macam warna, sedangkan pada gambar 4.3 (2) terdapat 5 macam warna. Kalau kita lihat dari banyaknya warna, tentu gambar 4.3 (1) lebih hemat warna dibanding dengan gambar 4.3 (2). Sebenarnya mengapa kita membutuhkan sesedikit mungkin warna? ini disebabkan karena dalam banyak kasus warna merepresentasikan jumlah cara. Karena alasan itu agar tercapai efisiensi maka cara yang digunakan harus minimum. Warna minimum yang dibutuhkan untuk melakukan pewarnaan pada suatu graf disebut dengan *chromatic number*.

V. ALGORITMA *GREEDY COLORING*

Masalah pewarnaan graf sampai saat ini tergolong ke *computationally hard*, banyak riset yang membahas tentang ini, tetapi belum ada algoritma pewarnaan yang sangat efisien. Meskipun demikian algoritma yang ada sekarang cukup

Gambar 5.2 Pohon pencarian pada pewarnaan graf 5.1

2. Kemudian lakukan untuk simpul 2 dengan mewarnai dengan merah, lalu cek apakah bisa, ternyata tidak, maka semua kemungkinan dengan simpul 1 berwarna merah dan simpul 2 berwarna merah tidak akan mengarah ke solusi

Gambar 5.3 Pohon pencarian pada pewarnaan graf 5.1

3. Warnai simpul dengan warna yang tersedia, yaitu kuning

Gambar 5.4 Pohon pencarian pada pewarnaan graf 5.1

4. Warnai simpul ketiga dengan warna merah, kemudian cek, ternyata simpul ketiga dengan warna merah mungkin mengarah ke solusi

Gambar 5.6 Pohon pencarian pada pewarnaan graf 5.1

6. Pewarnaan graf selesai dan menghasilkan graf sebagai berikut

Gambar 5.5 Pohon pencarian pada pewarnaan graf 5.1

5. Warnai simpul keempat dengan warna merah, kemudian cek, ternyata simpul keempat dengan warna merah tidak akan mengarah ke solusi, maka di-*bound*, warnai simpul keempat dengan warna kuning

Gambar 5.7 Graf hasil pewarnaan dengan algoritma *backtracking*

Bandingkan dengan algoritma exhaustive search yang harus membangkitkan semua kemungkinan termasuk yang tidak mengarah ke solusi, tentu algoritma *backtracking* lebih mangkus.

VI. PEWARNAAN MAP PADA JARINGAN TELEPON SELULER GSM

Pada kasus jaringan GSM, suatu daerah terbagi menjadi sel-sel yang berbentuk heksagonal, transformasikan map tersebut menjadi sebuah graf planar dengan tiap sel sebagai simpul dan tiap sel yang bersisian, dihubungkan dengan suatu sisi.

Gambar 6.1 Sel pada map GSM

Gambar 6.2 Graf pada map GSM

Gambar 6.3 Graf Planar dari sel pada map GSM

Setelah terbentuk graf planar dari map GSM tersebut, misal pewarnaan dilakukan dengan mengambil empat warna yaitu merah, kuning, hijau, dan biru, lakukan langkah-langkah yang

ada pada bab lima dengan membangkitkan pohon solusi, maka graf yang terbentuk adalah

Gambar 6.3 Hasil Graf Planar dari sel pada map GSM

V. APLIKASI PEWARNAAN GRAF LAINNYA

1) Pembuatan peta dunia.

Gambar 4.1. Representasi peta dunia dalam bentuk graph berwarna

Sumber :

<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y>

(Diakses 5 Mei 2018 Pk. 14.00)

2) Merancang jadwal yang waktunya beririsan

Tabel 4.1. Jadwal kuliah

Sumber :

<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y>

(5 Mei 2018 Pk. 14.00)

Gambar 4.2. Representasi tabel 4.1 dalam bentuk graf berwarna
Sumber :
<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y>
(Diakses 11 Mei 2018 Pk. 14.00)

Tabel 4.2. Jadwal waktu kuliah
Sumber :
<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y> (Diakses 26 November
2017 Pk. 14.00)

3) Sudoku Solver

Gambar 6.2(a) Teka-teki sudoku berukuran 4x4
Sumber :
<https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring>
(Diakses 11 Mei 2018 Pk.15.55)

Gambar 6.2(b) Representasi teka-teki sudoku berukuran 4x4 dalam bentuk graf berwarna
Sumber :
<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y>
(Diakses 11 Mei 2018 Pk. 14.00)

Gambar 6.2(c) Teka-teki sudoku berukuran 4x4 berwarna
Sumber :
<https://www.youtube.com/watch?v=v4RAYOjKb5Y>
(Diakses 11 Mei 2018 Pk. 14.00)

REFERENCES

- [1] Georges Gonthier (Desember 2008). "Formal Proof—The Four-Color Theorem". *Notices of the AMS*. **55** (11): 1382–1393
- [2] Anton A. Hurdeman, [The Worldwide History of Telecommunications](#), John Wiley & Sons, 31 juli 2003, page 529
- [3] Donald E. Knuth (1968). [The Art of Computer Programming](#). Addison-Wesley.
- [4] Gurari, Eitan (1999). "[CIS 680: DATA STRUCTURES: Chapter 19: Backtracking Algorithms](#)".
- [5] Origin of Sudoku, <http://www.sudoku-dragon.com/sudokuhistory.htm> (November 28, 2017)
- [6] Munir, R., 2006, Matematika Diskrit, *Graf*, (Mei 11, 2018)
- [7] Rosen, Kenneth H, 2012, Discrete Mathematics and Its Applications, NewYork:McGraw-Hill, (November 26, 2017)

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Mei 2018

Dandy Arif Rahman
13516086