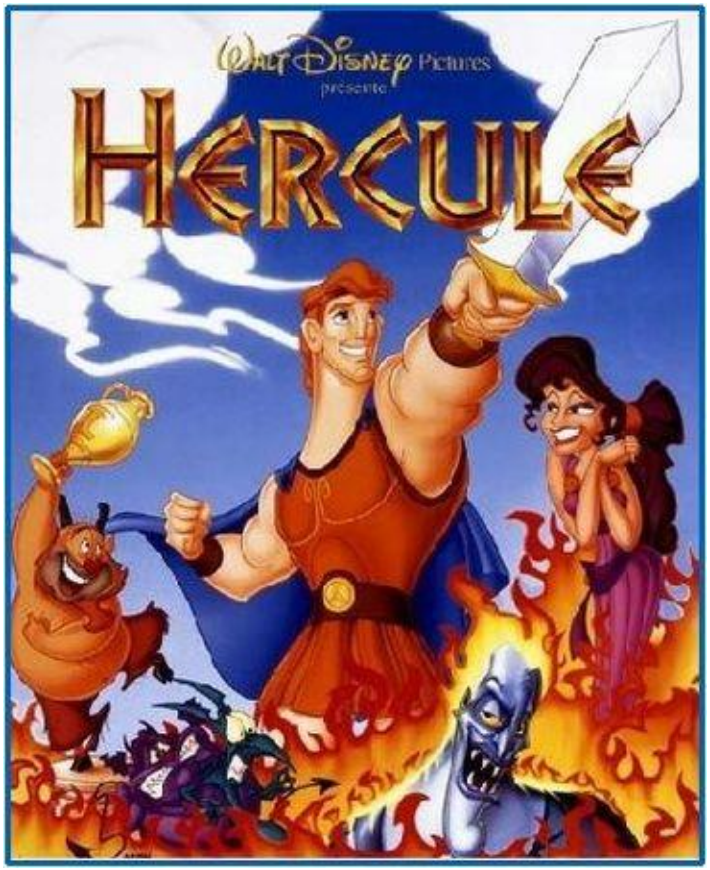
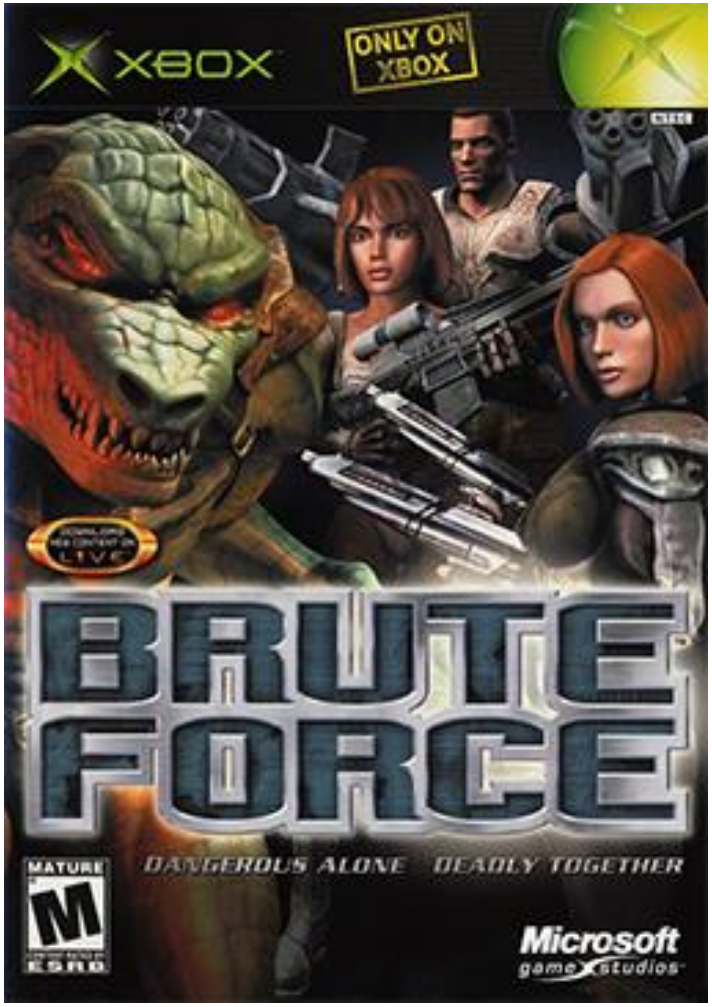
Algoritma *Brute Force*

Oleh: Rinaldi Munir



Bahan Kuliah
IF2211 Strategi Algoritma

Program Studi Informatika
Sekolah teknik Elektro dan Informatika, ITB, 2014


XBOX
ONLY ON XBOX
BRUTE FORCE
DANGEROUS ALONE DEADLY TOGETHER
MATURE
M
ESRB
Microsoft
game studios

Definisi *Brute Force*

- *Brute force* : pendekatan yang lempang (*straightforward*) untuk memecahkan suatu persoalan

- Biasanya didasarkan pada:
  - pernyataan pada persoalan (*problem statement*)
  - definisi konsep yang dilibatkan.

- Algoritma *brute force* memecahkan persoalan dengan
  - sangat sederhana,
  - langsung,
  - jelas (*obvious way*).
- *Just do it!* atau *Just Solve it!*

Contoh-contoh

(Berdasarkan pernyataan persoalan)

1. **Mencari elemen terbesar (terkecil)**

Persoalan: Diberikan sebuah senarai yang beranggotakan *n* buah bilangan bulat (a_1, a_2, …, a_n). Carilah elemen terbesar di dalam senarai tersebut.

Algoritma *brute force*: bandingkan setiap elemen senarai untuk menemukan elemen terbesar

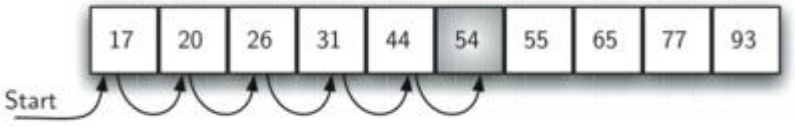
```
procedure CariElemenTerbesar(input a1, a2, ..., an : integer,
                             output maks : integer)
{ Mencari elemen terbesar di antara elemen a1, a2, ..., an. Elemen
terbesar akan disimpan di dalam maks.
Masukan: a1, a2, ..., an
Keluaran: maks
}
Deklarasi
  k : integer

Algoritma:
  maks←a1
  for k←2 to n do
    if ak > maks then
      maks←ak
    endif
  endfor
```

Jumlah operasi perbandingan elemen: $n - 1$
Kompleksitas waktu algoritma: $O(n)$.

2. Pencarian beruntun (Sequential Search)

Persoalan: Diberikan senarai yang berisi *n* buah bilangan bulat (a_1, a_2, …, a_n). Carilah nilai *x* di dalam senara tersebut. Jika *x* ditemukan, maka keluarannya adalah indeks elemen senarai, jika *x* tidak ditemukan, maka keluarannya adalah -1.

Algoritma *brute force (sequential search):* setiap elemen senarai dibandingkan dengan *x*. Pencarian selesai jika *x* ditemukan atau elemen senarai sudah habis diperiksa.




```
procedure PencarianBeruntun(input a1, a2, ..., an : integer,
                            x : integer, output idx : integer)
{ Mencari x di dalam elemen a1, a2, ..., an. Lokasi (indeks elemen)
tempat x ditemukan diisi ke dalam idx. Jika x tidak ditemukan, maka
idx diisi dengan 0.
  Masukan: a1, a2, ..., an
  Keluaran: idx
}
Deklarasi
  k : integer

Algoritma:
  k←1
  while (k < n) and (ak ≠ x) do
     k ← k + 1
  endwhile
  { k = n or ak = x }

  if ak = x then    { x ditemukan }
     idx ← k
  else
     idx ← -1       { x tidak ditemukan }
  endif
```

Jumlah perbandingan elemen: *n*

Kompleksitas waktu algoritma: *O*(*n*).

Adakah algoritma pencarian elemen yang lebih mangkus daripada *brute force*?

Contoh-contoh

(Berdasarkan definisi konsep yang terlibat)

1. **Menghitung a^n ($a > 0$, n adalah bilangan bulat tak-negatif)**

   Definisi:

   $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n kali) , jika $n > 0$

   $= 1$, jika $n = 0$

   Algoritma *brute force*: kalikan 1 dengan a sebanyak n kali

```
function pangkat(a : real, n : integer) → real
{ Menghitung a^n }
Deklarasi
  i : integer
  hasil : real
Algoritma:
  hasil ← 1
  for i ← 1 to n do
     hasil ← hasil * a
  end
  return hasil
```

Jumlah operasi kali: *n*
Kompleksitas waktu algoritma: *O*(*n*).
Adakah algoritma perpangkatan yang lebih mangkus daripada *brute force*?

2. **Menghitung *n*! (*n* bilangan bulat tak-negatif)**

Definisi:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \quad \text{, jika } n > 0$$
$$= 1 \quad \text{, jika } n = 0$$

Algoritma *brute force*: kalikan *n* buah bilangan, yaitu 1, 2, 3, …, *n*, bersama-sama

```
function faktorial(n : integer) → integer
{ Menghitung n! }
Deklarasi
   i : integer
   fak : real
Algoritma:
   fak ← 1
   for i ← 1 to n do
      fak ← fak * i
   end
   return fak
```

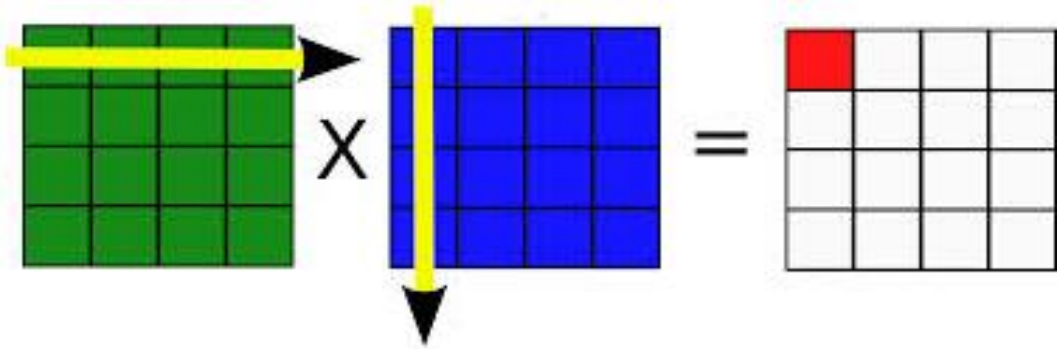
Jumlah operasi kali: *n*
Kompleksitas waktu algoritma: *O*(*n*).

3. Mengalikan dua buah matriks, *A* dan *B*

Definisi:

Misalkan $C = A \times B$ dan elemen-elemen matrik dinyatakan sebagai c_{ij}, a_{ij}, dan b_{ij}

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$



- Algoritma *brute force*: hitung setiap elemen hasil perkalian satu per satu, dengan cara mengalikan dua vektor yang panjangnya *n*.

```
procedure PerkalianMatriks(input A, B : Matriks,
                           input n : integer,
                           output C : Matriks)
{ Mengalikan matriks A dan B yang berukuran n × n, menghasilkan
  matriks C yang juga berukuran n × n
  Masukan: matriks integer A dan B, ukuran matriks n
  Keluaran: matriks C
}

Deklarasi
  i, j, k : integer

Algoritma
   for i←1 to n do
     for j←1 to n do
        C[i,j]←0    { inisialisasi penjumlah }
        for k ← 1 to n do
           C[i,j]←C[i,j] + A[i,k]*B[k,j]
        endfor
     endfor
   endfor
```

Jumlah operasi kali; n^3 dan operasi tambah: n^3, total $2n^3$

Kompleksitas waktu algoritma: $O(n^3)$

Adakah algoritma perkalian matriks yang lebih mangkus daripada *brute force*?

4. Tes Bilangan Prima

Persoalan: Diberikan sebuah bilangan bilangan bulat positif. Ujilah apakah bilangan tersebut merupakan bilangan prima atau bukan.

> **Definisi**: bilangan prima adalah bilangan yang hanya habis dibagi oleh 1 dan dirinya sendiri.

Algoritma *brute force*: bagi n dengan 2 sampai $\sqrt{n}$.
Jika semuanya tidak habis membagi n, maka n adalah bilangan prima.

```
function Prima(input x : integer)→boolean
{ Menguji apakah x bilangan prima atau bukan.
  Masukan: x
  Keluaran: true jika x prima, atau false jika x tidak prima.
}
Deklarasi
  k, y : integer
  test : boolean

Algoritma:
  if x < 2 then     { 1 bukan prima }
    return false
  else
    if x = 2 then   { 2 adalah prima, kasus khusus }
      return true
    else
      y←⌈√x⌉
      test←true
      while (test) and (y ≥ 2) do
        if x mod y = 0 then
          test←false
        else
          y←y - 1
        endif
      endwhile
      { not test or y < 2 }

      return test
   endif
 endif
```

Adakah algoritma pengujian bilangan prima yang lebih mangkus daripada *brute force*?

5. Algoritma Pengurutan *Brute Force*

- Algoritma apa yang memecahkan masalah pengurutan secara *brute force*?

  Bubble sort dan *selection sort!*

- Kedua algoritma ini memperlihatkan teknik *brute force* dengan sangat jelas sekali.

Selection Sort

Pass ke –1:

1. Cari elemen terkecil mulai di dalam *s*[1..*n*]
2. Letakkan elemen terkecil pada posisi ke-1 (pertukaran)

P*ass* ke-2:

1. Cari elemen terkecil mulai di dalam *s*[2..*n*]
2. Letakkan elemen terkecil pada posisi 2 (pertukaran)

Ulangi sampai hanya tersisa 1 elemen

Semuanya ada *n* –1 kali *pass*

Sumber gambar: **Prof. Amr Goneid**
Department of Computer Science, AUC

```
procedure SelectionSort(input/output  s : array [1..n] of integer)
{ Mengurutkan s1, s2, ..., sn sehingga tersusun menaik dengan metode pengurutan seleksi.
  Masukan: s1, s2, ..., sn
  Keluaran: s1, s2, ..., sn (terurut menaik)
}
Deklarasi
    i, j, imin, temp : integer

Algoritma:
    for i ← 1 to n-1 do   { jumlah pass sebanyak n - 1 }
       { cari elemen terkecil di dalam s[i], s[i+1, ..., s[n] }
       imin ← i  { elemen ke-i diasumsikan sebagai elemen  terkecil sementara }
       for j ← i+1 to n do
         if s[j] < s[imin] then
            imin ← j
         endif
       endfor
       {pertukarkan s[imin] dengan s[i] }
       temp ← s[i]
       s[i] ← s[imin]
       s[imin] ← temp
    endfor
```

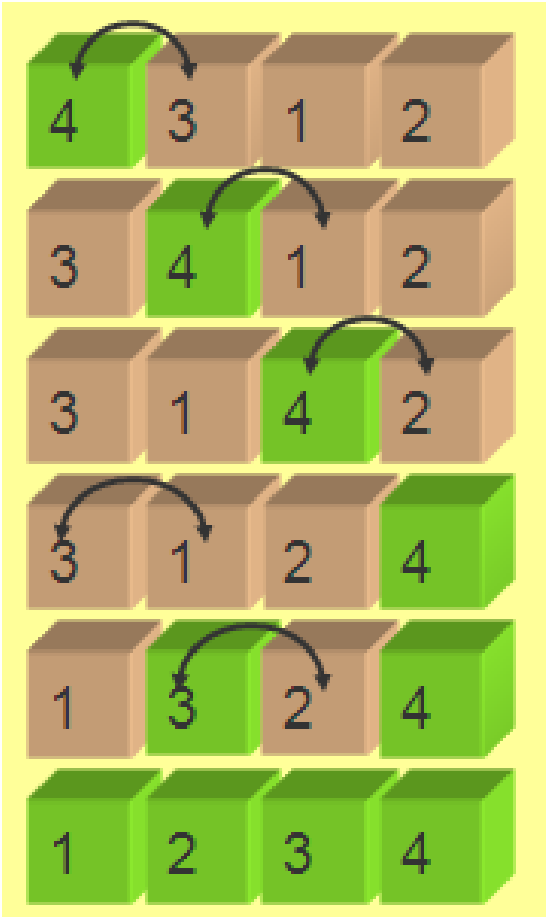
Jumlah perbandingan elemen: $n(n - 1)/2$
Jumlah pertukaran: $n - 1$
Kompleksitas waktu algoritma diukur dari jumlah perbandingan: $O(n^2)$.
Adakah algoritma pengurutan yang lebih mangkus?

Bubble Sort

- Mulai dari elemen ke-1:
  1. Jika $s_2 < s_1$, pertukarkan
  2. Jika $s_3 < s_2$, pertukarkan
  …
  3. Jika $s_{n-1} < s_n$, pertukarkan

  } satu kali *pass*

- Ulangi lagi untuk *pass* ke-2, 3, .., $n - 1$ dst
- Semuanya ada $n - 1$ kali *pass*



Sumber gambar: **Prof. Amr Goneid**
Department of Computer Science, AUC

```
procedure BubbleSort (input/output s : TabelInt, input n : integer)
{ Mengurutkan tabel s[1..N] sehingga terurut menaik dengan metode
  pengurutan bubble sort.

  Masukan : Tabel s yang sudah terdefenisi nilai-nilainya.
  Keluaran: Tabel s yang terurut menaik sedemikian sehingga
            s[1] ≤ s[2] ≤ … ≤ s[N].
}
Deklarasi
    i    : integer     { pencacah untuk jumlah langkah }
    k    : integer     { pencacah,untuk pengapungan pada setiap
 langkah }
    temp : integer     { peubah bantu untuk pertukaran }

 Algoritma:
    for i ← n-1 downto 1 do
      for k ← 1 to i do
         if s[k+1] < s[k] then
           {pertukarkan s[k] dengan s[k+1]}
            temp ← s[k]
            s[k] ← s[k+1]
            s[k+1] ← temp
          endif
      endfor
    endfor
```

Jumlah perbandingan elemen: $n(n - 1)/2$

Jumlah pertukaran (kasus terburuk): $n(n - 1)/2$

Kompleksitas waktu algoritma diukur dari jumlah perbandingan: $O(n^2)$.

Adakah algoritma pengurutan yang lebih mangkus?

6. Mengevaluasi polinom

- Persoalan: Hitung nilai polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

untuk $x = t$.

- Algoritma *brute force*: x^i dihitung secara *brute force* (seperti perhitungan a^n). Kalikan nilai x^i dengan a_i, lalu jumlahkan dengan suku-suku lainnya.

```
function polinom(input t : real)→real
{ Menghitung nilai p(x) pada x = t. Koefisien-koefisein polinom
sudah disimpan di dalam a[0..n].
Masukan: t
Keluaran: nilai polinom pada x = t.
}
Deklarasi
  i, j : integer
  p, pangkat  : real

Algoritma:
  p ← 0
  for i ← n downto 0 do
     pangkat ← 1
     for j ← 1 to i do  {hitung x^i }
        pangkat ← pangkat * t
     endfor
     p ← p + a[i] * pangkat
  endfor
  return p
```

Jumlah operasi perkalian: $n(n + 1)/2 + (n + 1)$
Kompleksitas waktu algoritma: $O(n^2)$.

Perbaikan (*improve*):

```
function polinom2(input t : real)→real
{ Menghitung nilai p(x) pada x = t. Koefisien-koefisein polinom
sudah disimpan di dalam a[0..n].
Masukan: t
Keluaran: nilai polinom pada x = t.
}
Deklarasi
  i, j : integer
  p, pangkat  : real

Algoritma:
  p ← a[0]
  pangkat←1
  for i ← 1 to n do
     pangkat ← pangkat * t
     p ← p + a[i] * pangkat
  endfor
  return p
```

Jumlah operasi perkalian: 2*n*
Kompleksitas algoritma ini adalah *O*(*n*).
Adakah algoritma perhitungan nilai polinom yang lebih mangkus daripada *brute force*?

Karakteristik Algoritma *Brute Force*

1. Algoritma *brute force* umumnya tidak "cerdas" dan tidak mangkus, karena ia membutuhkan jumlah komputasi yang besar dan waktu yang lama dalam penyelesaiannya.

   Kata "force" mengindikasikan "tenaga" ketimbang "otak"

   Kadang-kadang algoritma *brute force* disebut juga **algoritma naif** (*naïve algorithm*).

2. Algoritma *brute force* lebih cocok untuk persoalan yang berukuran kecil.

Pertimbangannya:

- sederhana,
- implementasinya mudah

Algoritma *brute force* sering digunakan sebagai basis pembanding dengan algoritma yang lebih mangkus.

4. Meskipun bukan metode yang mangkus, hampir semua persoalan dapat diselesaikan dengan algoritma *brute force*.

Sukar menunjukkan persoalan yang tidak dapat diselesaikan dengan metode *brute force*.

Bahkan, ada persoalan yang hanya dapat diselesaikan dengan metode *brute force*.

Contoh: mencari elemen terbesar di dalam senarai.

Contoh lainnya?

"*When in doubt, use brute force*" (Ken Thompson, penemu sistem operasi UNIX)

Contoh-contoh lain

1. **Pencocokan String *(String Matching)***

   Persoalan: Diberikan

   a. teks (*text*), yaitu (*long*) *string* dengan panjang *n* karakter

   b. *pattern*, yaitu *string* dengan panjang *m* karakter (asumsi: $m < n$)

   Carilah lokasi pertama di dalam teks yang bersesuaian dengan *pattern*.

Algoritma *brute force*:

1. Mula-mula *pattern* dicocokkan pada awal teks.

2. Dengan bergerak dari kiri ke kanan, bandingkan setiap karakter di dalam *pattern* dengan karakter yang bersesuaian di dalam teks sampai:

   – semua karakter yang dibandingkan cocok atau sama (pencarian berhasil), atau
   – dijumpai sebuah ketidakcocokan karakter (pencarian belum berhasil)

3. Bila *pattern* belum ditemukan kecocokannya dan teks belum habis, geser *pattern* satu karakter ke kanan dan ulangi langkah 2.

Contoh 1:

Pattern: NOT

Teks: NOBODY NOTICED HIM

```
  NOBODY NOTICED HIM
1 NOT
2  NOT
3   NOT
4    NOT
5     NOT
6      NOT
7       NOT
8        NOT
```

Contoh 2:

Pattern: 001011

Teks: 10010101**001011**110101010001

```
  10010101001011110101010001
1 001011
2  001011
3   001011
4    001011
5     001011
6      001011
7       001011
8        001011
9         001011
```

```
procedure PencocokanString(input P : string, T : string,
                           n, m : integer, output idx : integer)
{ Masukan: pattern P yang panjangnya m dan teks T yang
panjangnya n. Teks T direpresentasika sebagai string
(array of character)
Keluaran: lokasi awal kecocokan (idx)
}
Deklarasi
  i : integer
  ketemu : boolean

Algoritma:
  i←0
  ketemu←false
  while (i ≤ n-m) and (not ketemu) do
    j←1
    while (j ≤ m) and (Pj = Ti+j ) do
      j←j+1
    endwhile
    { j > m or Pj ≠ Ti+j }

    if j = m then   { kecocokan string ditemukan }
      ketemu←true
    else
      i←i+1  {geser pattern satu karakter ke kanan teks }
    endif
  endfor
  { i > n - m or ketemu }
  if ketemu then
     idx←i+1
  else
     idx←-1
  endif
```

Brute Force in Java

```
public static int brute(String text,String pattern)
{ int n = text.length();    // n is length of text
  int m = pattern.length(); // m is length of pattern
  int j;
  for(int i=0; i <= (n-m); i++) {
    j = 0;
    while ((j < m) && (text.charAt(i+j)== pattern.charAt(j))
) {
        j++;
     }
    if (j == m)
        return i;   // match at i
  }
  return -1;   // no match
} // end of brute()
```

Analis

Worst Case.

- Pada setiap pergeseran pattern, semua karakter di *pattern* dibandingkan.
- Jumlah perbandingan: $m(n - m + 1) = O(mn)$
- Contoh:
  - T: "aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaah"
  - P: "aaah"

continued

Best case

- Kompleksitas kasus terbaik adalah $O(n)$.
- Terjadi bila karakter pertama *pattern P* tidak pernah sama dengan karakter teks *T* yang dicocokkan
- Jumlah perbandingan maksimal *n* kali:
- Contoh:

  T: `String ini berakhir dengan zzz`

  P: `zzz`

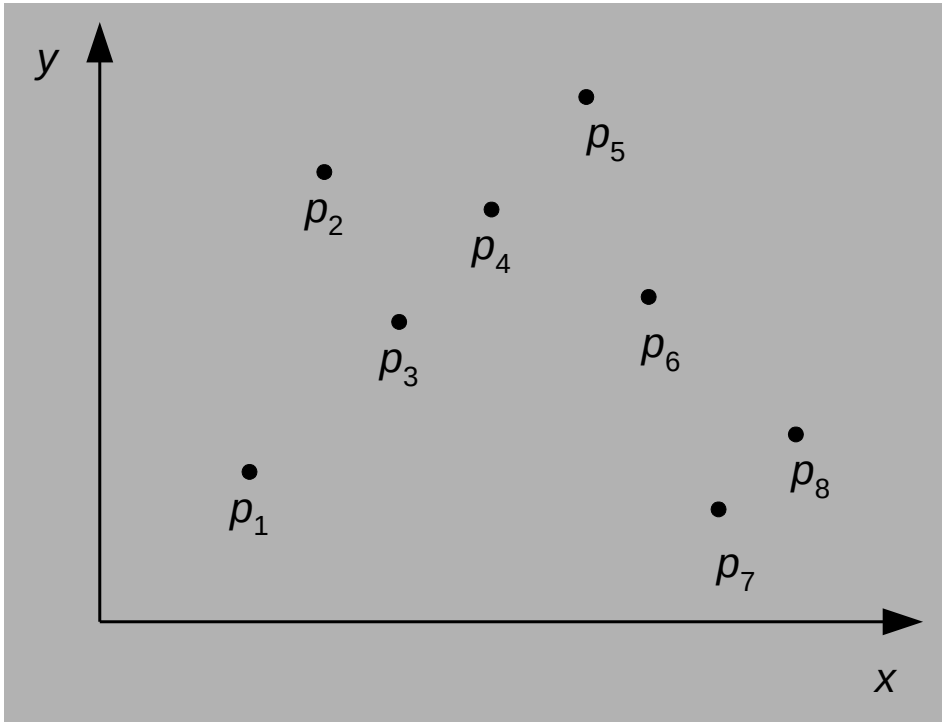
Average Case

- Pencarin pada teks normal (teks biasa)
- Kompleksitas O(m+n).

- Example of a more average case:
  - T: "a string searching example is standard"
  - P: "store"

2. Mencari Pasangan Titik yang Jaraknya Terdekat (*Closest Pairs*)

Persoalan: Diberikan *n* buah titik (2-D atau 3-D), tentukan dua buah titik yang terdekat satu sama lain.



- Jarak dua buah titik, $p_1 = (x_1, y_1)$ dan $p_2 = (x_2, y_2)$ dihitung dengan rumus Euclidean:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Algoritma *brute force*:

1. Hitung jarak setiap pasang titik.
2. Pasangan titik yang mempunyai jarak terpendek itulah jawabannya.

- Algoritma *brute force* akan menghitung sebanyak $C(n, 2) = n(n - 1)/2$ pasangan titik dan memilih pasangan titik yang mempunyai jarak terkecil.

  Kompleksitas algoritma adalah $O(n^2)$.

```
procedure CariDuaTitikTerdekat(input P : SetOfPoint,
                               n : integer,
                               output P1, P2 : Point)
{ Mencari dua buah titik di dalam himpunan P yang jaraknya
terdekat.
Masukan: P = himpunan titik, dengan struktur data sebagai
berikut
       type Point = record(x : real, y : real)
       type SetOfPoint = array [1..n] of Point
Keluaran: dua buah titik, P1 dan P2 yang jaraknya
terdekat.
}
Deklarasi
  d, dmin : real
  i, j : integer

Algoritma:
  dmin←9999
  for i←1 to n-1 do

    for j←i+1 to n do
      d←√((Pi.x-Pj.x)^2 + ((Pi.y-Pj.y)^2)
      if d < dmin then          { perbarui jarak terdekat }
        dmin←d
        P1←Pi
        P2←Pj
      endif
    endfor

  endfor
```

Kompleksitas algoritma: $O(n^2)$.

Kekuatan dan Kelemahan Metode *Brute Force*

Kekuatan:

1. Metode *brute force* dapat digunakan untuk memecahkan hampir sebagian besar masalah (*wide applicability*).

2. Metode *brute force* sederhana dan mudah dimengerti.

3. Metode *brute force* menghasilkan algoritma yang layak untuk beberapa masalah penting seperti pencarian, pengurutan, pencocokan *string*, perkalian matriks.

4. Metode *brute force* menghasilkan algoritma baku (standard) untuk tugas-tugas komputasi seperti penjumlahan/perkalian *n* buah bilangan, menentukan elemen minimum atau maksimum di dalam tabel (*list*).

Kelemahan:

1. Metode *brute force* jarang menghasilkan algoritma yang mangkus.

2. Beberapa algoritma *brute force* lambat sehingga tidak dapat diterima.

3. Tidak sekontruktif/sekreatif teknik pemecahan masalah lainnya.

Algoritma *Brute Force* dalam *Sudoku*

- **Sudoku** adalah adalah permainan teka-teki (*puzzle*) logik yang berasal dari Jepang. Permainan ini sangat populer di seluruh dunia.

- Contoh sebuah Sudoku:

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- Kotak-kotak di dalam Sudoku harus diisi dengan angka 1 sampai 9 sedemikian sehingga:
  1. tidak ada angka yang sama (berulang) pada setiap baris;
  2. tidak ada angka yang sama (berulang) pada setiap kolom;
  3. tidak ada angka yang sama (berulang) pada setiap bujursangkar (persegi) yang lebih kecil.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Algoritma *Brute Force* untuk Sudoku:

1. Tempatkan angka “1” pada sel pertama. Periksa apakah penempatan “1” dibolehkan (dengan memeriksa baris, kolom, dan kotak).
2. Jika tidak ada pelanggaran, maju ke sel berikutnya. Tempatkan “1” pada sel tersebut dan periksa apakah ada pelanggaran.
3. Jika pada pemeriksaan ditemukan pelanggaran, yaitu penempatan “1” tidak dibolehkan, maka coba dengan menempatkan “2”.
4. Jika pada proses penempatan ditemukan bahwa tidak satupun dari 9 angka diperbolehkan, maka tinggalkan sel tersebut dalam keadaan kosong, lalu mundur satu langkah ke sel sebelumnya. Nilai di sel tersebut dinaikkan 1.
5. Ulangi sampai 81 buah sel sudah terisi solusi yang benar.

Exhaustive Search

Exhaustive search:

- adalah teknik pencarian solusi secara solusi *brute force* untuk persoalan-persoalan-masalah kombinatorik;

- biasanya di antara objek-objek kombinatorik seperti permutasi, kombinasi, atau himpunan bagian dari sebuah himpunan.

- Langkah-langkah metode *exhaustive search*:

  1. Enumerasi (*list*) setiap solusi yang mungkin dengan cara yang sistematis.

  2. Evaluasi setiap kemungkinan solusi satu per satu, simpan solusi terbaik yang ditemukan sampai sejauh ini (*the best solusi found so far*).

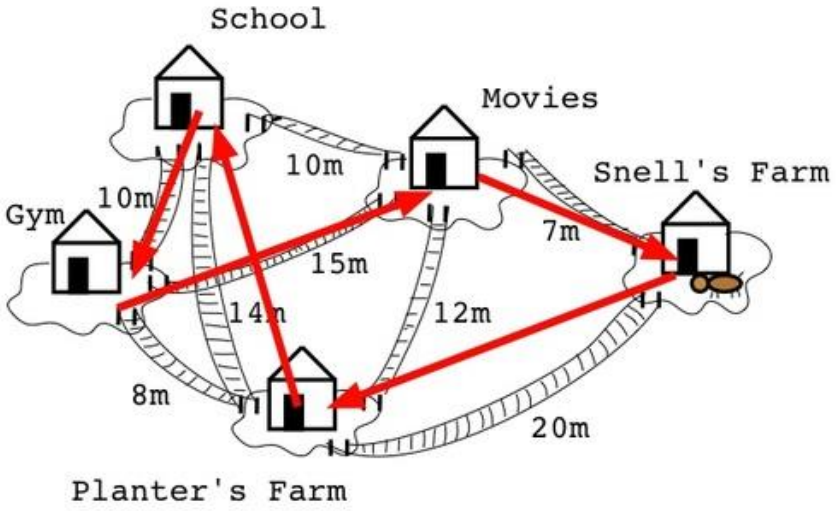
  3. Bila pencarian berakhir, umumkan solusi terbaik (*the winner*)

- Meskipun *exhaustive search* secara teoritis menghasilkan solusi, namun waktu atau sumberdaya yang dibutuhkan dalam pencarian solusinya sangat besar.

Contoh-contoh *exhaustive search*

1. Travelling Salesperson Problem

Persoalan: Diberikan *n* buah kota serta diketahui jarak antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) terpendek yang melalui setiap kota lainnya hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.



- Persoalan *TSP* tidak lain adalah menemukan sirkuit Hamilton dengan bobot minimum.

- Algoritma *exhaustive search* untuk TSP:

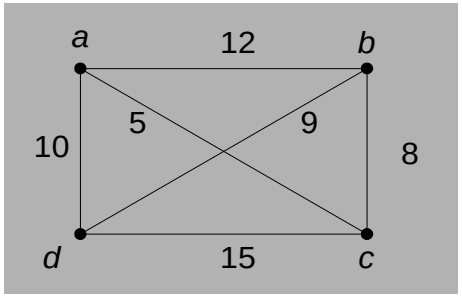
  1. Enumerasikan (*list*) semua sirkuit Hamilton dari graf lengkap dengan *n* buah simpul.

  2. Hitung (evaluasi) bobot setiap sirkuit Hamilton yang ditemukan pada langkah 1.

  3. Pilih sirkuit Hamilton yang mempunyai bobot terkecil.

Contoh 4:

TSP dengan $n = 4$, simpul awal = a



No.	Rute perjalanan (*tour*)	Bobot
1.	$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$	10+12+8+15 = 45
2.	$a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$	12+5+9+15 = 41
3.	$\boldsymbol{a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a}$	10+5+9+8 = **32**
4.	$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow a$	12+5+9+15 = 41
5.	$\boldsymbol{a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a}$	10+5+9+8 = **32**
6	$a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$	10+12+8+15 = 45

Rute perjalananan terpendek adalah

$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$

$a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

dengan bobot = 32.

- Untuk n buah simpul semua rute perjalanan dibangkitkan dengan permutasi dari $n - 1$ buah simpul.

- Permutasi dari $n - 1$ buah simpul adalah

$$(n - 1)!$$

- Pada contoh di atas, untuk $n = 6$ akan terdapat

$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

buah rute perjalanan.

- Jika diselesaikan dengan *exhaustive search*, maka kita harus mengenumerasi sebanyak $(n - 1)!$ buah sirkuit Hamilton, menghitung setiap bobotnya, dan memilih sirkuit Hamilton dengan bobot terkecil.

- Kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP sebanding dengan $(n - 1)!$ dikali dengan waktu untuk menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton.

- Menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton membutuhkan waktu $O(n)$, sehingga kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP adalah $O(n \cdot n!)$.

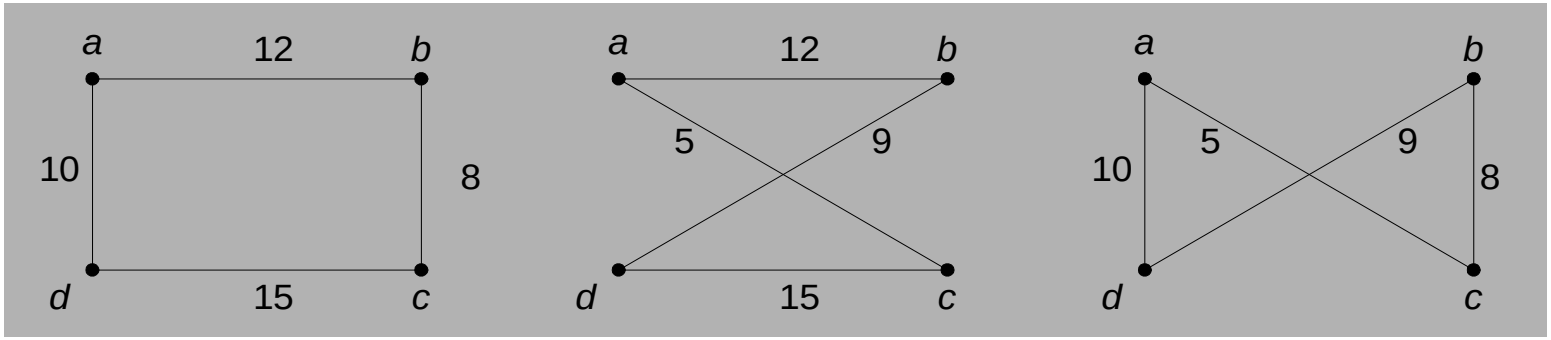
- **Perbaikan**: setengah dari rute perjalanan adalah hasil pencerminan dari setengah rute yang lain, yakni dengan mengubah arah rute perjalanan

  1 dan 6

  2 dan 4

  3 dan 5
- maka dapat dihilangkan setengah dari jumlah permutasi (dari 6 menjadi 3).

- Ketiga buah sirkuit Hamilton yang dihasilkan:



- Untuk graf dengan *n* buah simpul, kita hanya perlu mengevaluasi $(n - 1)!/2$ sirkuit Hamilton.

- Untuk ukuran masukan yang besar, jelas algoritma *exhaustive search* menjadi sangat tidak mangkus.

- Pada persoalan *TSP*, untuk $n = 20$ akan terdapat $(19!)/2 = 6 \times 10^{16}$ sirkuit Hamilton yang harus dievaluasi satu per satu.

- Jika untuk mengevaluasi satu sirkuit Hamilton dibutuhkan waktu 1 detik, maka waktu yang dibutuhkan untuk mengevaluasi 6×10^{16} sirkuit Hamilton adalah sekitar 190 juta tahun

- Sayangnya, untuk persoalan TSP tidak ada algoritma lain yang lebih baik daripada algoritma *exhaustive search*.

- Jika anda dapat menemukan algoritma yang mangkus untuk TSP, anda akan menjadi terkenal dan kaya!

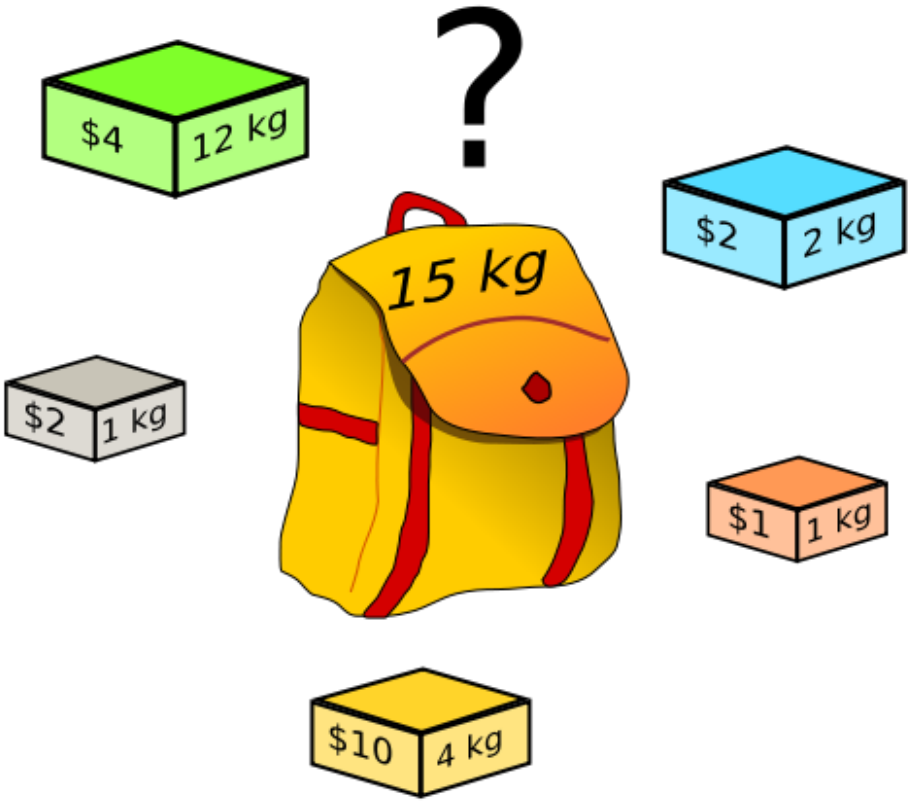
- Algoritma yang mangkus selalu mempunyai kompleksitas waktu dalam orde polinomial.

2. 1/0 Knapsack Problem

- **Persoalan:** Diberikan *n* buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas bobot *K*. Setiap objek memiliki properti bobot (*weigth*) w_i dan keuntungan(*profit*) p_i.

  Bagaimana memilih memilih objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* sedemikian sehingga diperoleh keuntungan yang maksimal. Total bobot objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* tidak boleh melebihi kapasitas *knapsack*.

- Persoalan 0/1 *Knapsack* dapat kita pandang sebagai mencari himpunan bagian (*subset*) dari keseluruhan objek yang muat ke dalam *knapsack* dan memberikan total keuntungan terbesar.



- Solusi persoalan dinyatakan sebagai:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

x_i = 1, jika objek ke-*i* dipilih,

x_i = 0, jika objek ke-*i* tidak dipilih.

Formulasi secara matematis:

Maksimasi $F = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini, $x_i = 0$ atau 1, $i = 1, 2, \ldots, n$

Algoritma *exhaustive search:*

1. Enumerasikan (*list*) semua himpunan bagian dari himpunan dengan n objek.

2. Hitung (evaluasi) total keuntungan dari setiap himpunan bagian dari langkah 1.

3. Pilih himpunan bagian yang memberikan total keuntungan terbesar.

Contoh: $n = 4$, $K = 16$

Objek	Bobot	Profit ($)
1	2	20
2	5	30
3	10	50
4	5	10

Langkah-langkah pencarian solusi 0/1 *Knapsack* secara *exhaustive search* dirangkum dalam tabel di bawah ini:

Himpunan Bagian	Total Bobot	Total keuntungan
{}	0	0
{1}	2	20
{2}	5	30
{3}	10	50
{4}	5	10
{1, 2}	7	50
{1, 3}	12	70
{1, 4}	7	30
{2, 3}	**15**	**80**
{2, 4}	10	40
{3, 4}	15	60
{1, 2, 3}	17	tidak layak
{1, 2, 4}	12	60
{1, 3, 4}	17	tidak layak
{2, 3, 4}	20	tidak layak
{1, 2, 3, 4}	22	tidak layak

- Himpunan bagian objek yang memberikan keuntungan maksimum adalah {2, 3} dengan total keuntungan adalah 80.
- Solusi: X = {0, 1, 1, 0}

- Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan dengan n elemen adalah 2^n.

  Waktu untuk menghitung total bobot objek yang dipilih = $O(n)$

  Sehingga, Kompleksitas algoritma *exhaustive search* untuk persoalan 0/1 *Knapsack* = $O(n.\ 2^n)$.

- TSP dan 0/1 *Knapsack*, adalah contoh persoalan eksponensial.

Latihan

(yang diselesaikan secara *exhaustive search*)

1. (**Persoalan Penugasan**) Misalkan terdapat *n* orang dan *n* buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah pekerjaan. Penugasan orang ke-*i* dengan pekerjaan ke-*j* membutuhkan biaya sebesar *c*(*i*, *j*). Bagaimana melakukan penugasan sehingga total biaya penugasan adalah seminimal mungkin? Misalkan instansiasi persoalan dinyatakan sebagai matriks *C* sebagai berikut

$$C = \begin{bmatrix} Job1 & Job2 & Job3 & Job4 & \\ 9 & 2 & 7 & 8 & \text{Orang } a \\ 6 & 4 & 3 & 7 & \text{Orang } b \\ 5 & 8 & 1 & 4 & \text{Orang } c \\ 7 & 6 & 9 & 4 & \text{Orang } d \end{bmatrix}$$

2. (**Persoalan partisi**). Diberikan *n* buah bilangan bulat positif. Bagilah menjadi dua himpunan bagian *disjoint* sehingga setiap bagian mempunyai jumlah nilai yang sama (catatan: masalah ini tidak selalu mempunyai solusi).

   Contoh: *n* = 6, yaitu 3, 8, 4, 6, 1, 2, dibagidua menjadi {3, 8, 1} dan {4, 6, 2} yang masing-masing jumlahnya 12.

   Rancang algoritma *exhaustive search* untuk masalah ini. Cobalah mengurangi jumlah himpunan bagian yang perlu dibangkitkan.

3. (**Bujursangkar ajaib**). Bujursangkar ajaib (*magic square*) adalah pengaturan *n* buah bilangan dari 1 hingga n^2 di dalam bujursangkar yang berukuran *n* x *n* sedemikian sehingga jumlah nilai setiap kolom,baris, dan diaginal sama. Rancanglah algoritma *exhaustive search* untuk membangkitkan bujursangkar ajaib orde *n*.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Latihan Soal UTS 2014

- Diberikan sebuah larik (*array*) integer a_1, a_2, …, a_n. Anda diminta menemukan *sub-sequence* yang kontigu (berderetan) dari larik tersebut yang memiliki nilai maksimum. Nilai maksimum *sub-sequenc*e adalah nol jika semua elemen larik adalah negatif. Sebagai contoh instansiasi: larik [–2 , 11, –4 , 13, –5 , 2, –1, 3] memiliki nilai maksimum *sub-sequence* kontigu adalah 20, yaitu dari elemen ke-2 hingga elemen ke-4 (yaitu [11, –4 , 13]).
- Jika diselesaikan dengan algoritma *brute force* bagaimana caranya? Berapa kompleksitas algoritma *brute force* tersebut dalam notasi O-besar?

- Jawaban: **Alternatif 1** (*Exhaustive Search*)
  - Nyatakan larik sebagai sebuah himpuan
  - Tuliskan semua upa-himpunan (*sub-set*) dari himpunan tersebut, lalu sesuaikan urutan elemen di dalam upa-himpunan dengan urutan elemen di dalam larik.
  - Buang upa-himpunan yang elemen-elemennya tidak berurutan.
  - Hitung jumlah nilai di dalam setiap upa-himpunan.
  - Pilih upa-himpunan yang mempunyai nilai maksimum.

  Jumlah semua upa-himpunan adalah 2^n, menghitung jumlah nilai di dalam upa-himpunan adalah O(n), maka kompleksitas algoritmanya adalah O(n. 2^n).

- Jawaban: **Alternatif 2** (*Exhaustive Search*), lebih baik
  - Tuliskan semua *sub-sequence* dengan 1 elemen (ada n buah), *sub-sequence* dengan 2 elemen (ada $n - 1$ buah), dan seterusnya hingga *sub-sequence* dengan n elemen (1 buah). Seluruhnya ada

    $$n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = n(n + 1)/2$$

    sub-sequence.
  - Hitung jumlah nilai pada setiap *sub-sequence*
  - Pilih *sub-sequence* yang jumlahnya maksimum

Menghitung jumlah nilai di dalam *sub-sequence* adalah $O(n)$, maka kompleksitas algoritmanya adalah $O(n.\ n(n + 1)/2) = O(n^3)$.

Soal UTS 2011

- Misalkan kita menempuh perjalanan sejauh 100 km, dimulai dari titik 0 dan berakhir pada kilometer 100. Di sepanjang jalan terdapat SPBU pada jarak 10, 25, 30, 40, 50, 75, dan 80 km dari titik awal. Tangki bensin pada awalnya hanya cukup untuk berjalan sejauh 30 km. Bagaimana kita menempuh tempat pemberhentian agar kita berhenti sesedikit mungkin?
- Bagaimana penyelesaian dengan algoritma *Brute Force*? Jelaskan!

Exhaustive Search di dalam Kriptografi

- Di dalam kriptografi, *exhaustive search* merupakan teknik yang digunakan penyerang untuk menemukan kunci enkripsi dengan cara mencoba semua kemungkinan kunci.

  Serangan semacam ini dikenal dengan nama *exhaustive key search attack* atau *brute force attack*.

- Contoh: Panjang kunci enkripsi pada algoritma *DES* (*Data Encryption Standard*) = 64 bit.

  Dari 64 bit tersebut, hanya 56 bit yang digunakan (8 bit paritas lainnya tidak dipakai).

- Jumlah kombinasi kunci yang harus dievaluasi oleh pihak lawan adalah sebanyak

  $$(2)(2)(2)(2)(2) \ldots (2)(2) = 2^{56} = 7.205.759.403.7927.936$$

- Jika untuk percobaan dengan satu kunci memerlukan waktu 1 detik, maka untuk jumlah kunci sebanyak itu diperlukan waktu komputasi kurang lebih selama 228.4931.317 tahun!

- Algoritma *exhaustive search* tidak mangkus sebagaimana ciri algoritma *brute force* pada umumnya

- Namun, nilai plusnya terletak pada keberhasilannya yang selalu menemukan solusi (jika diberikan waktu yang cukup).

Mempercepat Algoritma *Exhaustive Search*

- Algoritma *exhaustive search* dapat diperbaiki kinerjanya sehingga tidak perlu melakukan pencarian terhadap semua kemungkinan solusi.

- Salah satu teknik yang digunakan untuk mempercepat pencarian solusi, di mana exhaustive search tidak praktis, adalah teknik **heuristik** (*heuristic*).

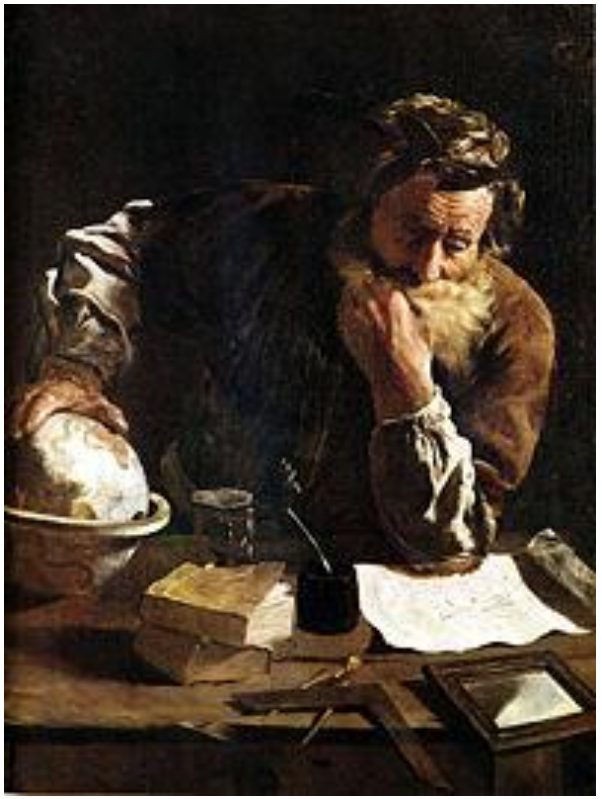
- Dalam *exhaustive search*, teknik heuristik digunakan untuk mengeliminasi beberapa kemungkinan solusi tanpa harus mengeksplorasinya secara penuh.

- Heuristik adalah teknik yang dirancang untuk memecahkan persoalan dengan mengabaikan apakah solusi dapat terbukti benar secara matematis

- Contoh dari teknik ini termasuk menggunakan tebakan, penilaian intuitif, atau akal sehat.

- Contoh: program antivirus menggunakan pola-pola heuristik untuk mengidentifikasi dokumen yang terkena virus atau *malware*.

Sejarah

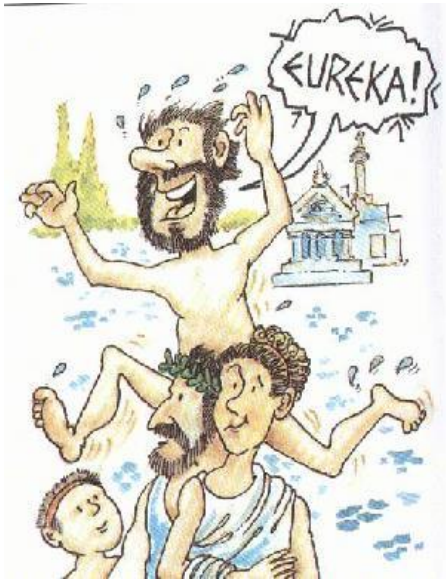


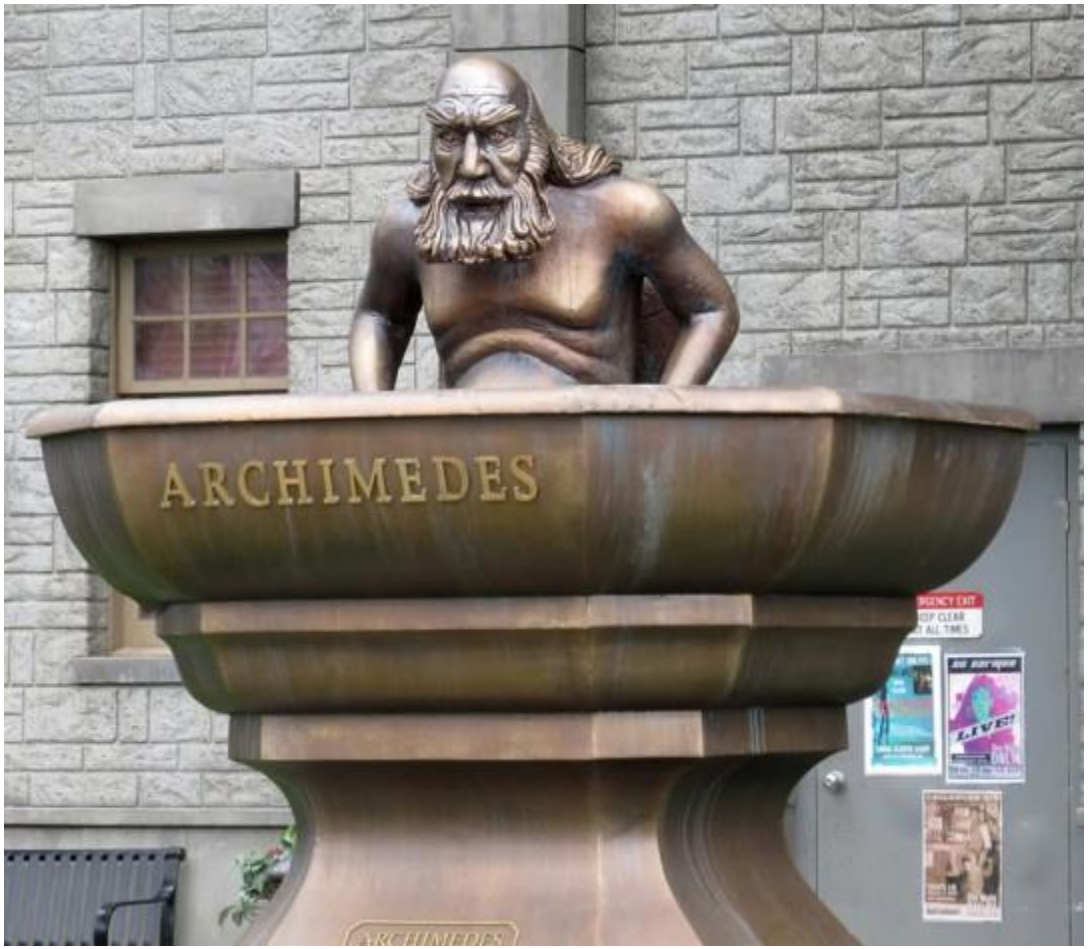
- Heuristik adalah seni dan ilmu menemukan (*art and science of discovery*).

- Kata heuristik diturunkan dari Bahasa Yunani yaitu "*eureka*" yang berarti "menemukan" (*to find* atau *to discover*).

- Matematikawan Yunani yang bernama Archimedes yang melontarkan kata "*heureka*", dari sinilah kita menemukan kata "*eureka*" yang berarti "*I have found it*."


Eureka!


EUREKA!


ARCHIMEDES

- Heuristk mengacu pada teknik memecahkan persoalan berbasis pengalaman, dari proses pembelajaran, dan penemuan solusi meskipun tidak dijamin optimal.

- Heuristik berbeda dari algoritma:
  - heuristik berlaku sebagai panduan (*guideline*),
  - sedangkan algoritma adalah urutan langkah-langkah penyelesaian persoalan.

- Metode heuristik menggunakan terkaan, intuisi, dan *common sense*. Secara matematis tidak dapat dibuktikan, namun sangat berguna.

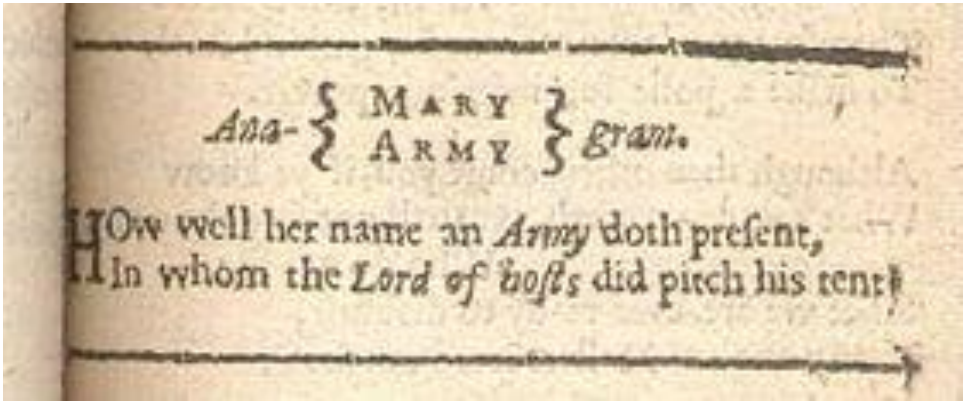
- Heuristik mungkin tidak selalu memberikan hasil optimal, tetapi secara ekstrim ia berguna pada pemecahan masalah.

- Heuristik yang bagus dapat secara dramatis mengurangi waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan masalah dengan cara mengeliminir kebutuhan untuk mempertimbangkan kemungkinan solusi yang tidak perlu.

- Heuristik tidak menjamin selalu dapat memecahkan persoalan, tetapi seringkali memecahkan persoalan dengan cukup baik untuk kebanyakan persoalan, dan seringkali pula lebih cepat daripada pencarian solusi secara *exhaustive search*.

- Sudah sejak lama heuristik digunakan secara intensif di dalam bidang intelijensia buatan (*artificial intelligence*).

- *Contoh penggunaan heuristik untuk mempercepat algoritma exhaustive search*



Contoh 1: Masalah *anagram*. *Anagram* adalah penukaran huruf dalam sebuah kata atau kalimat sehingga kata atau kalimat yang baru mempunyai arti lain.

Contoh-contoh *anagram* (semua contoh dalam Bahasa Inggris):

lived $\rightarrow$ *devil*

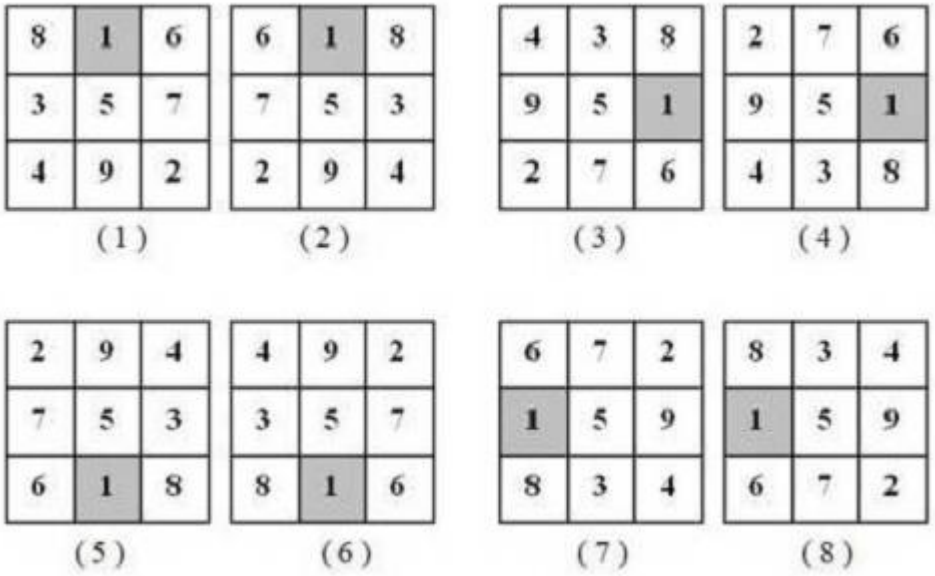
tea $\rightarrow$ *eat*

charm $\rightarrow$ *march*

- Bila diselesaikan secara *exhaustive search*, kita harus mencari semua permutasi huruf-huruf pembentuk kata atau kalimat, lalu memerika apakah kata atau kalimat yang terbentuk mengandung arti.

- Teknik heuristik dapat digunakan untuk mengurangi jumlah pencarian solusi. Salah satu teknik heuristik yang digunakan misalnya membuat aturan bahwa dalam Bahasa Inggris huruf *c* dan *h* selalu digunakan berdampingan sebagai *ch* (lihat contoh *charm* dan *march*), sehingga kita hanya membuat permutasi huruf-huruf dengan *c* dan *h* berdampingan. Semua permutasi dengan huruf *c* dan *h* tidak berdampingan ditolak dari pencarian.

- Contoh 2: Kubus ajaib 3 x 3 mempunyai 8 buah solusi sbb



Dengan *exhaustive search*, kita perlu memeriksa 9! semua susunan solusi yang mungkin.
Perhatikan, bahwa jumlah setiap baris, setiap kolom, atau setiap diagonal selalu 15.
Strategi heuristik: pada setiap pembangkitan permutasi, periksa apakah nilai 3 buah angka pertama jumlahnya 15. Jika ya → teruskan, jika tidak → tolak