

# PENGGUNAAN ALGORITMA HUNGARIAN DALAM MENYELESAIKAN PERSOALAN MATRIKS BERBOBOT

Alvin Susanto (13506087)

Program studi Teknik Informatika ITB angkatan 2006  
Jalan Ganesha no. 10 Bandung  
e-mail: alvin\_punya@yahoo.co.id

## ABSTRAK

Makalah yang penulis buat ini memuat tentang penggunaan algoritma hungarian dalam memecahkan persoalan sehari-hari, yaitu untuk menyelesaikan persoalan matriks berbobot, yang dalam hal ini, solusi yang dicari adalah solusi terbaik minimum. Algoritma ini sendiri diciptakan oleh Harold Kuhn dan James Munkres, yang terinspirasi oleh hasil penemuan dua orang matematikawan asal Hungaria, yaitu Denes Konig dan Jenő Egervary. Makalah ini akan menceritakan sejarah lahirnya algoritma hungarian dan metode penyelesaian masalah yang diberikan dengan menggunakan algoritma hungarian.

**Kata kunci:** algoritma hungarian, Harold Kuhn, James Munkres, persoalan matriks berbobot.

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persoalan assignment dengan matriks berbobot merupakan salah satu masalah terbesar dalam dunia teknik informatika, di mana masalah ini merupakan masalah yang metode penyelesaiannya cukup kompleks. Salah satu algoritma yang disarankan untuk digunakan dalam menyelesaikan persoalan ini adalah algoritma brute force, di mana dalam algoritma ini seluruh kemungkinan solusi diperhitungkan sebagai kandidat solusi. Tentu saja hal ini sangat menggunakan resource yang besar dan penyelesaian dengan metode ini menjadi tidak mungkin.

Salah satu alternatif dalam menyelesaikan masalah assignment ini adalah dengan menggunakan algoritma hungarian. Dengan menggunakan algoritma ini, solusi optimum sudah pasti akan ditemukan. Namun untuk hal ini, kasusnya dibatasi, yaitu bila kita ingin menemukan solusi terbaik dengan nilai minimum (least cost search). Keuntungan terbesar penggunaan algoritma hungarian adalah kompleksitas algoritmanya yang polinomial.

### 1.2 Sejarah Lahirnya Algoritma Hungarian

Algoritma hungarian adalah salah satu algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan masalah assignment. Versi awalnya, yang dikenal dengan metode Hungarian, ditemukan dan dipublikasikan oleh Harold Kuhn pada tahun 1955. Algoritma ini kemudian diperbaiki oleh James Munkres pada tahun 1957. Oleh karena itu, algoritma ini kemudian dikenal juga dengan nama algoritma Kuhn – Munkres.

Algoritma yang dikembangkan oleh Kuhn ini didasarkan pada hasil kerja dua orang matematikawan asal Hungaria lainnya, yaitu Denes Konig dan Jenő Egervary. Keberhasilan Kuhn menggabungkan dua buah penemuan matematis dari Jenő Egervary menjadi satu bagian merupakan hal utama yang menginspirasi lahirnya algoritma hungarian.

## 2. METODE

### 2.1 Algoritma Hungarian

Metode yang digunakan dalam algoritma hungarian dalam memecahkan masalah sangat sederhana dan mudah dipahami. Metode ini akan penulis aplikasikan dalam pemecahan masalah matriks berbobot, di mana masalah yang ingin dipecahkan adalah mencari solusi terbaik minimum. Untuk memudahkan persoalan, maka penulis akan membahas salah satu contoh kasus dari masalah ini, yaitu masalah penempatan pegawai seefektif mungkin agar sebuah perusahaan dapat membayar seluruh pegawai semurah mungkin.

Asumsi dari masalah ini :

1. Satu orang pekerja hanya dapat bekerja maksimum pada satu pekerjaan saja.
2. Satu pekerja dapat tidak diberikan pekerjaan.
3. Setiap pekerjaan yang dilakukan setiap pekerja akan berhasil dalam jangka waktu yang sama tanpa memperhatikan berapa besar pegawai itu dibayar.

Untuk menyelesaikan persoalan ini dengan algoritma hungarian, dibutuhkan sebuah matriks berbentuk persegi, sehingga bila jumlah dari pekerja dan pekerjaan tidak sama, akan digunakan elemen dummy. Dengan kata lain,

kita harus membuat agar jumlah pekerja dan pekerjaan dalam matriks menjadi sama.

Bila persyaratan di atas telah terpenuhi, kita dapat memulai langkah – langkah pencarian solusi. Adapun langkah – langkah yang akan dilakukan akan dipaparkan sebagai berikut :

Misalkan matriks di bawah ini adalah matriks berbobot, di mana a,b,c, dan d merupakan pekerja yang akan diberikan tugas dan angka 1,2,3, dan 4 merupakan jenis pekerjaan yang dapat diambil.

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{bmatrix}$$

Nilai dari a1 dapat diartikan sebagai pegawai a mengambil pekerjaan nomor 1. Hal yang sama juga berlaku untuk c3 yang berarti pegawai c mengambil pekerjaan nomor 3.

Langkah – langkah atau prosedur dalam algoritma hungarian secara umum adalah :

1. Pilihlah nilai elemen minimum dari setiap baris, lalu lakukan operasi pengurangan dari tiap elemen di baris tersebut dengan bilangan minimum yang telah dipilih. Dengan demikian, dapat dipastikan bahwa ada minimal satu buah elemen di tiap baris matriks yang bernilai nol dan tidak ada elemen dengan nilai negatif.
2. Pilihlah nilai elemen minimum dari setiap kolom, lalu lakukan operasi pengurangan dari tiap elemen di kolom tersebut dengan bilangan minimum yang telah dipilih. Dengan demikian, dapat dipastikan bahwa ada minimal satu buah elemen di tiap baris dan tiap kolom matriks yang bernilai nol dan tidak ada elemen dengan nilai negatif.
3. Periksa baris pertama dari matriks. Bila pada baris tersebut hanya terdapat satu buah bilangan nol, maka tandailah letak bilangan nol tersebut dan hilangkan seluruh nilai nol dari kolom tempat elemen nol tersebut berada. Bila pada baris tersebut terdapat lebih dari satu buah bilangan nol, maka pencarian dilakukan pada baris berikutnya. Pada baris berikutnya tersebut, lakukan hal yang sama dengan yang dilakukan pada baris sebelumnya.
4. Lakukan hal yang sama untuk kolom. Dalam hal ini, kita tinggal menukar baris dan kolom dari prosedur nomor 3 untuk menghasilkan matriks yang telah direduksi nilainya. Bila solusi telah ditemukan, lompat ke nomor 6. Solusi ditemukan

bila dalam tiap kolom dan baris matriks hanya terdapat satu buah nilai nol.

5. Bila solusi masih belum ditemukan, lakukan langkah – langkah berikut.  
Buat sebuah penanda berupa garis yang melewati setiap baris dan kolom tempat dimana elemen nol berada. Setelah itu, pilih sebuah bilangan terkecil yang terdapat pada matriks dan tidak dilalui oleh garis tersebut. Kita berikan nama bilangan tersebut bilangan u. Setelah bilangan u ditemukan, lakukan operasi pengurangan pada tiap elemen yang tidak dilalui oleh garis penanda dengan bilangan u. Sedangkan bilangan yang dilalui oleh dua buah garis penanda nilainya dijumlahkan dengan u. Setelah itu lakukan lagi prosedur 3 hingga solusi ditemukan.
6. Hitung total biaya optimum dari solusi yang diperoleh berdasarkan elemen dari matriks awal yang belum direduksi nilainya.

Hal yang sama akan dilakukan bila jumlah dari pekerja dan pekerjaan yang diberikan tidak sama. Yang perlu kita lakukan hanyalah menyisipkan suatu baris/kolom yang setiap elemennya bernilai nol hingga jumlah dari baris dan kolom dari matriks tersebut sama. Untuk menemukan solusinya, kita tinggal mengikuti prosedur yang telah dipaparkan sebelumnya.

## 2.2 Contoh Kasus

Pada upabab ini, penulis akan memperlihatkan contoh dari penggunaan algoritma hungarian dalam menyelesaikan persoalan matriks berbobot. Kasus yang digunakan adalah kasus yang telah dibahas pada bab sebelumnya, yaitu kasus penempatan pegawai agar suatu perusahaan mengeluarkan biaya sekecil mungkin.

Matriks di bawah ini adalah contoh matriks berbobot yang telah terisi nilainya.

	1	2	3	4
a	8	6	5	7
b	6	5	4	3
c	7	8	4	6
d	6	7	5	6

Dari masalah di atas, mudah ditebak dengan pemikiran kita bahwa solusi terbaiknya adalah pekerja a mengambil pekerjaan ke-2, pekerja b mengambil pekerjaan ke-4, pekerja c mengambil pekerjaan ke-3, dan pekerja d mengambil pekerjaan ke-1. Bila dihitung, nilai yang harus dibayar perusahaan untuk para pekerja tersebut adalah  $6 + 3 + 4 + 6 = 19$

Langkah pertama yang akan kita lakukan adalah mengurangi elemen dari tiap baris dengan nilai elemen terkecil dari masing-masing baris tersebut. Dalam hal ini, pada baris pertama tiap elemen dikurangi 5, baris kedua dikurangi 3, baris ketiga dikurangi dengan 4, dan baris keempat dikurangi dengan 5.

Setelah dilakukan operasi pengurangan tersebut, matriks berbobot baru yang terbentuk adalah :

	1	2	3	4
a	3	1	0	2
b	3	2	1	0
c	3	4	0	2
d	1	2	0	1

Bila diperhatikan, kita akan mendapati bahwa tiap baris dari matriks tersebut memiliki elemen dengan nilai nol. Hal ini berarti operasi pengurangan yang kita lakukan telah benar.

Langkah berikutnya yang dilakukan adalah melakukan operasi pengurangan tiap elemen dari kolom matriks dengan elemen terkecil dari masing-masing kolom tersebut. Dengan demikian, tiap elemen pada kolom pertama akan kedua dikurangi 1. Sedangkan elemen-elemen pada kolom ketiga dan keempat tidak mengalami pengurangan karena pada kedua kolom tersebut nilai minimumnya adalah 1.

Dengan demikian, matriks baru yang terbentuk akibat operasi pengurangan tersebut adalah :

	1	2	3	4
a	2	0	0	1
b	2	1	0	0
c	2	3	0	1
d	0	1	0	0

Terlihat bahwa dari tiap baris dan kolom dari matriks di atas minimal terdapat satu buah nilai nol.

Langkah berikutnya yang akan kita lakukan adalah memeriksa baris pertama dari matriks. Bila pada baris tersebut hanya terdapat satu buah bilangan nol, maka kita harus menandai bilangan nol tersebut dan menghilangkan seluruh nilai nol pada kolom tempat bilangan nol tersebut berada. Dalam makalah ini, nilai nol yang telah dihilangkan akan dilambangkan dengan nilai X.

Apabila pada saat pencarian ditemukan bahwa pada suatu baris dari matriks terdapat lebih dari satu elemen yang bernilai nol, maka pencarian pada baris tersebut

dihentikan dan dilanjutkan dengan pencarian pada baris berikutnya hingga tiap baris selesai diperiksa.

Dari contoh di atas, jawaban dari langkah ini yang memenuhi adalah baris ketiga, dimana pada baris tersebut hanya terdapat satu buah elemen dengan nilai nol. Selanjutnya kita menghilangkan semua nilai nol pada kolom dimana nilai nol yang telah ditemukan itu terletak. Dengan demikian, matriks baru yang terbentuk adalah :

	1	2	3	4
a	2	0	X	1
b	2	1	X	0
c	2	3	[0]	1
d	0	1	X	0

Nilai nol yang diberi kurung siku merupakan nilai nol yang disimpan dan akan digunakan sebagai bagian dari solusi persoalan.

Langkah berikutnya yang diambil hampir sama dengan yang diambil pada langkah sebelumnya. Hanya saja, kita akan melakukannya pada tiap kolom dari matriks. Operasi penghilangan elemen pun tetap dilakukan hanya saja kali ini dilakukan pada baris dimana elemen nol pada satu kolom ditemukan. Dengan demikian, matriks baru yang terbentuk adalah :

	1	2	3	4
a	2	[0]	X	1
b	2	1	X	[0]
c	2	3	[0]	1
d	[0]	1	X	X

Jawaban optimum sekarang telah ditemukan. Tiap nilai nol yang diberi kurung siku merupakan jawaban dari persoalan yang telah diberikan. Yang perlu kita lakukan sekarang adalah membandingkan nilai-nilai nol dengan kurung siku tersebut dengan nilai aslinya, lalu menjumlahkannya. Bila diperhatikan, nilai nol dengan kurung siku tersebut akan sesuai dengan tebakan awal kita, dan jawaban solusi optimumnya adalah 19. Ini merupakan nilai terkecil yang harus dibayar oleh perusahaan tersebut untuk membayar semua pegawainya.

Pertanyaan yang muncul sekarang adalah : bagaimana bila jumlah dari pekerja dan pekerjaan tidak sama? Telah dibahas pada bab sebelumnya bahwa kita akan menggunakan elemen dummy pada matriks tersebut hingga jumlah dari pekerja dan pekerjaan sama.

Berikut adalah contoh penyelesaian kasus dimana jumlah pekerja dan pekerjaan tidak sama :

	1	2	3	4
a	7	5	8	4
b	5	6	7	4
c	8	7	9	8

Untuk persoalan di atas, kita menambahkan elemen dummy sebagai pekerja d dengan nilai dari tiap elemen nol.

	1	2	3	4
a	7	5	8	4
b	5	6	7	4
c	8	7	9	8
d	0	0	0	0

Kita lakukan prosedur yang telah kita terapkan pada contoh sebelumnya pada matriks di atas hingga kita mendapatkan sebuah matriks baru:

	1	2	3	4
a	3	1	4	[0]
b	1	2	3	X
c	1	[0]	2	1
d	[0]	X	X	X

Terlihat dari matriks di atas bahwa solusi masih belum ditemukan. Kita harus melakukan prosedur berikutnya agar solusi dapat ditemukan. Solusi berikutnya yang kita lakukan adalah membuat garis penanda yang melalui tiap elemen nol. Perlu diingat bahwa X juga sebenarnya adalah bilangan nol sehingga X pun harus dilalui oleh garis penanda tersebut.

	1	2	3	4
a	3	1	4	[0]
b	1	2	3	X
c	1	[0]	2	1
d	[0]	X	X	X

Langkah berikutnya yang kita lakukan adalah menentukan nilai minimum dari matriks berbobot di atas dengan syarat bahwa bilangan tersebut tidak dilalui oleh

garis penanda. Kita dapatkan bahwa bilangan tersebut adalah 1. Kita harus mengurangi tiap elemen yang tidak dilalui oleh garis penanda dengan bilangan ini. Akan tetapi, tiap bilangan yang dilalui oleh dua buah garis penanda harus dijumlahkan dengan bilangan ini.

Dengan demikian matriks baru yang terbentuk adalah sebagai berikut :

	1	2	3	4
a	2	1	3	0
b	0	2	2	0
c	0	0	1	1
d	0	1	0	1

Setelah itu kita melakukan lagi prosedur yang telah kita lakukan sebelumnya (prosedur 3), yaitu mengecek nilai nol pada baris dan kolom hingga himpunan solusi terbentuk. Gambar di bawah merupakan matriks yang baru setelah prosedur tersebut dilakukan.

	1	2	3	4
a	2	1	3	[0]
b	[0]	2	2	X
c	X	[0]	1	1
d	X	1	[0]	1

Dengan demikian, solusi telah ditemukan. Kita akan membandingkan nilai dari solusi yang didapat dengan nilai aslinya.

Setelah dibandingkan, didapatkan nilai dari solusi adalah  $4 + 5 + 7 + 0 = 16$ . Nilai ini akan sama dengan nilai yang kita temukan dengan nalar kita ataupun dengan algoritma brute force.

## 2.2 Analisis Kasus

Dari contoh-contoh kasus di atas, didapatkan bahwa solusi yang didapat dengan menggunakan algoritma hungarian dalam penyelesaian masalah matriks berbobot akan selalu optimum. Selain itu, dengan menggunakan algoritma hungarian, kompleksitas solusi yang dihasilkan akan bersifat polinomial. Hal ini akan sangat menghemat sumber daya komputer bila dibandingkan dengan algoritma brute force yang kompleksitas algoritmanya faktorial.

## III. KESIMPULAN

Algoritma hungarian merupakan salah satu algoritma yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan assignment dengan biaya terkecil. Solusi yang diperoleh bila kita menggunakan algoritma hungarian akan selalu optimum.

## **REFERENSI**

- [1] Munir, Rinaldi. "Strategi Algoritmik". Teknik Informatika ITB. 2005.
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian_algorithm)