

Rantai Markov dan Aplikasinya Sebagai Bagian dari Ilmu Probabilitas

Bagus Pratanggapati Kusumobroto (18209034)

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

bagus.pratanggapati@gmail.com

ABSTRAK

Rantai Markov adalah salah satu teori dalam ilmu probabilitas. Banyak sekali hal yang berkaitan dengan teori ini. Baik secara langsung maupun tidak langsung. Implementasinya sering digunakan dalam berbagai bidang di sekitar kita. Beberapa aplikasinya banyak ditemukan dalam bidang perindustrian, perdagangan, perekonomian, periklanan, dan masih banyak lagi. Bahkan permainan pun bisa menggunakan teori ini. Khususnya untuk melihat kemungkinan saat seorang pemain mendapatkan giliran untuk bermain. Contoh yang paling mudah adalah dalam permainan ular tangga. Ada juga contoh lain tentang aplikasi teori ini di dalam bidang sistem dan teknologi informasi, yaitu di dalam jaringan internet. Namun, Rantai Markov sangat jarang dibahas secara khusus dalam buku probabilitas yang umumnya digunakan sebagai bahan kuliah. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas secara mendetail mengenai teori ini. Di dalam makalah ini juga akan coba dijelaskan dengan bahasa sederhana mengenai aplikasi teori Rantai Markov yang erat kaitannya dalam kehidupan kita sehari-hari.

Kata Kunci : aplikasi, probabilitas, Rantai Markov.

1. PENDAHULUAN

Probabilitas dapat diartikan sebagai peluang atau kemungkinan munculnya suatu kejadian secara acak. Dalam kehidupan kita sehari-hari banyak sekali hal yang berkaitan dengan probabilitas ini. Hal-hal sederhana yang ada di sekitar kita ini biasanya tidak kita sadari bahwa itu merupakan bagian dari ilmu probabilitas. Misalnya saja saat bermain kartu remi, memilih barang yang akan dibeli, dan masih banyak lagi.

Meskipun begitu, tentu saja masalah probabilitas ini sudah dikenal saat di bangku sekolah. Bahkan sampai kuliah pun ada materi tentang probabilitas ini. Namun, tidak semua materi mengenai probabilitas ini dipelajari. Salah satunya adalah mengenai teori Rantai Markov. Walaupun bukan merupakan suatu bahan pelajaran di kelas, namun aplikasi dari Rantai Markov ini sebenarnya banyak sekali. Dan semuanya hal-hal sederhana yang ada di sekitar kita.

2. PEMBAHASAN

Pada bagian sebelumnya sudah dijelaskan bahwa Rantai Markov sangat erat kaitannya dengan ilmu probabilitas. Berdasarkan hal tersebut, maka pada bab ini akan dibagi ke dalam dua bagian besar. Pada bagian pertama akan dijelaskan ilmu probabilitas secara sederhana. Sedangkan pada bagian berikutnya akan dijelaskan tentang teori Rantai Markov.

2.1. Probabilitas

Probabilitas merupakan suatu ilmu yang sudah diajarkan saat seseorang sudah berada di bangku sekolah. Hal ini disebabkan oleh banyaknya kejadian dalam hidup ini yang menggunakan prinsip probabilitas. Sehingga setidaknya seseorang bisa mengerti teori ini untuk menentukan keputusan yang akan diambil.

Namun sebenarnya tanpa mempelajari ilmu ini seseorang sudah sering menerapkan ilmu ini untuk sebuah keputusan yang akan diambilnya. Seseorang yang akan mengambil keputusan tentu saja akan melihat kejadian-kejadian yang telah terjadi. Kemudian akan memprediksi kejadian selanjutnya yang akan terjadi.

Secara sederhana probabilitas dapat didefinisikan sebagai suatu cara untuk mengungkapkan suatu informasi atau pengetahuan bahwa suatu kejadian akan terjadi maupun telah terjadi. Probabilitas sering disebut juga sebagai peluang atau kemungkinan.

Untuk menuliskan probabilitas dari suatu kejadian digunakan sebuah angka yang dikenal sebagai probabilitas suatu kejadian. Angka ini nilainya $0 \leq 1$. Semakin besar nilai probabilitas suatu kejadian tertentu, maka kejadian tersebut paling memungkinkan untuk terjadi. Apabila suatu kejadian sama sekali tidak memungkinkan untuk terjadi atau mustahil untuk terjadi, maka probabilitas kejadian tersebut adalah 0. Misalnya kejadian manusia memiliki tanduk. Begitu juga sebaliknya. Jika suatu kejadian pasti terjadi atau telah terjadi, berarti probabilitasnya adalah 1. Misalnya adalah manusia pasti melahirkan manusia.

Untuk menyatakan probabilitas suatu kejadian, terdapat notasi yang sudah menjadi kesepakatan bersama. Untuk melambangkan notasi probabilitas

kejadian A, maka ditulis $P(A)$. Demikian juga dengan kejadian lainnya. Notasi probabilitas kejadian B adalah $P(B)$, notasi probabilitas kejadian C adalah $P(C)$. Begitu seterusnya. Nilai untuk $P(A)$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

Keterangan:

A : Jumlah kejadian A

S : Sampel

Sedangkan untuk melambangkan komplemen atau lawan dari kejadian A maka notasinya bisa dituliskan sebagai $P(A')$. Besarnya probabilitas komplemen kejadian A dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Ini merupakan penjelasan paling sederhana dari ilmu probabilitas. Ilmu probabilitas ini banyak digunakan untuk berbagai hal di kehidupan sehari-hari. Misalnya saja saat melempar dadu dalam permainan ular tangga. Probabilitas munculnya angka 5 saat melempar dadu dapat dihitung dengan menggunakan rumus yang sudah diberikan di atas.

Jumlah sampel dadu = $S = 6$

Jumlah kejadian muncul angka 5 = $A = 1$

Sehingga,

$$P(A) = \frac{A}{S} = \frac{1}{6}$$

Selain contoh di atas, masih banyak hal lain yang menggunakan ilmu probabilitas secara sederhana. Misalnya saja saat kita memilih barang yang akan dibeli. Pasti saat kita akan membeli suatu barang di supermarket, pasti kita akan mengambil salah satu barang dari sekian banyak barang yang sama yang sama yang disediakan di sana. Perhitungan peluangnya hanya menggunakan rumus yang sudah diungkapkan di atas.

2.2 Teori Rantai Markov

Teori Rantai Markov pertama kali ditemukan oleh Andrey Andreyevich Markov pada tahun 1906. Ia adalah seorang matematikawan dari Rusia yang hidup pada tahun 1856 sampai tahun 1922. Ia merupakan murid dari Chebysev, seorang yang terkenal di dunia probabilitas karena rumus yang ditemukannya.



Gambar 2.1 Andrey Andreyevich Markov

Sebagaimana halnya dengan Chebysev, Markov pun tidak mau kalah. Ia mengungkapkan teori bahwa suatu kejadian berikutnya tergantung hanya pada keadaan saat ini dan bukan pada kejadian masa lalu. Pada tahun 1913 ia menerapkan temuannya ini yang pertama kali untuk 20.000 pertama Pushkin huruf "Eugene Onegin".

Berdasarkan teori yang diungkapkan oleh Markov di atas dapat dibuat dengan kata lain. Rantai markov merupakan suatu teknik yang terdapat di dalam ilmu probabilitas yang bisa digunakan untuk menganalisis pergerakan suatu probabilitas dari suatu keadaan ke keadaan lainnya.

Rantai Markov bukanlah suatu teknik optimisasi melainkan suatu teknik deskriptif. Maksudnya adalah bahwa Rantai Markov bukanlah suatu cara yang bisa digunakan untuk menghasilkan suatu keputusan rekomendasi (optimis). Akan tetapi, Rantai Markov ini hanya digunakan untuk membantu seseorang untuk mengambil keputusan (deskriptif). Sehingga bisa dikatakan bahwa analisa Rantai Markov ini mirip dengan analisis keputusan. Untuk menentukan sebuah keputusan memungkinkan untuk terjadi perpindahan keputusan. Dari keputusan yang satu akan mungkin pindah ke keputusan yang lain. Kemungkinan tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P_{ij}^{(n)} = \Pr (X_n = j | X_0 = i)$$

Dalam proses menerapkan Rantai Markov ke dalam suatu kasus tertentu, terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi. Syarat-syarat tersebut adalah sebagai berikut.

1. Jumlah probabilitas transisi untuk suatu keadaan awal dari sistem sama dengan satu.
2. Probabilitas-probabilitas tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
3. Probabilitas transisi konstan sepanjang waktu.

4. Kondisi merupakan kondisi yang independen (bebas) sepanjang waktu.

Rantai Markov bisa digunakan untuk modeling (pembuatan model) berbagai macam sistem dan proses. Dengan menggunakan teori ini bisa dianalisa kejadian-kejadian pada waktu mendatang secara sistematis dan matematis.

Rantai Markov merupakan suatu kumpulan variabel acak $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$. Atau secara formal bisa dituliskan sebagai berikut.

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = y) = \Pr(X_{n-1} = x \mid X_n = y)$$

3. APLIKASI RANTAI MARKOV

Teori Rantai Markov ini memiliki beberapa penerapan aplikasi. Namun bisa dikatakan penerapan teori ini sangatlah terbatas. Hal ini dikarenakan sulitnya menemukan masalah-masalah yang memenuhi semua syarat yang diperlukan untuk menerapkan teori Rantai Markov ini. Rantai Markov ini adalah probabilitas transisi yang menyebabkan probabilitas pergerakan perpindahan kondisi dalam sistem. Sedangkan kebanyakan masalah-masalah yang ada probabilitasnya bersifat konstan.

Walaupun begitu ada beberapa bidang di kehidupan sehari-hari yang masih dapat menerapkan Rantai Markov. Di antaranya adalah dalam bidang ekonomi, ilmu pengetahuan, dan juga permainan. Berikut ini akan dijelaskan beberapa masalah yang bisa menerapkan teori ini.

3.1 Rantai Markov dalam Perpindahan Merk

Saat ini tidak bisa dipungkiri lagi bahwa merk merupakan salah satu daya jual yang bisa membuat suatu jenis barang laku terjual. Konsumen tentu saja ingin mendapatkan fasilitas terbaik dengan harga yang seminimal mungkin. Apabila seorang konsumen tidak puas dengan suatu merk, maka tidak mungkin ia mempertahankan untuk terus memakai merk ini. Pasti ia akan mencari merk lain yang lebih baik. Karena itulah bisa muncul perpindahan merk.

Cara menerapkan Rantai Markov dalam aplikasi ini cukup sederhana. Pertama jelas kita harus memiliki data perpindahan merk dari setiap konsumen. Kemudian dari data tersebut kita bisa melihat probabilitas dari setiap merk. Lalu nilai probabilitas tersebut bila dikalikan dengan jumlah konsumen bisa memberikan sebuah angka yang menentukan seberapa besar probabilitas konsumen untuk pindah merk.

3.2 Rantai Markov dalam Jaringan Internet

Perkembangan teknologi saat ini sangatlah pesat. Semua orang pasti pernah menggunakan salah satu hasil teknologi dalam bentuk apa pun. Misalnya *handphone*, komputer, internet, dan masih banyak lainnya. Namun teknologi yang perkembangannya paing berpengaruh saat ini adalah internet.

Jaringan internet bisa dikatakan jaringan yang sangat rumit. Setiap orang kapan pun dan di mana pun saat ini sudah bisa menggunakan internet. Baik itu menggunakan telepon genggam maupun menggunakan Komputer. Meskipun tidak semua orang dapat menggunakan internet secara efisien.

Dalam penggunaan internet, paling sering orang menggunakannya untuk *browsing*. Saat *browsing*, seserang pasti akan masuk ke dalam halaman web yang jumlah cukup banyak. Kemudian di dalam suatu halaman web itu masih juga terdapat *link* yang cukup banyak berkaitan dengan kata kunci pencariannya. Hal ini bisa mengakibatkan kurangnya efisiensi dalam mencari suatu masalah dalam internet.

Banyaknya link ini bisa menghubungkan seseorang antara halaman web yang satu dengan halaman yang lainnya. Bila melihat rumus yang telah disampaikan dalam bab sebelumnya maka akan terdapat barisan distribusi bersyarat dari $X(t_n)$ untuk nilai $X(t_1), X(t_2), \dots$ dan seterusnya. Jadi hanya web yang memiliki banyak *link* antar halaman saja yang bisa diaplikasikan dalam Rantai Markov.

Dengan mengamati kebiasaan kunjungan pemakai web sebagai rantai Markov, maka dapat dibangun suatu model Markov yang terekam dalam *web log files*. Rantai Markov ini sifatnya diskrit. Model Rantai Markov ini kemudian bisa digunakan untuk membuat prediksi link untuk menentukan halaman yang paling banyak dikunjungi. Sehingga bisa direkomendasikan ke pengunjung web tadi agar lebih efektif dan efisien saat *browsing*.

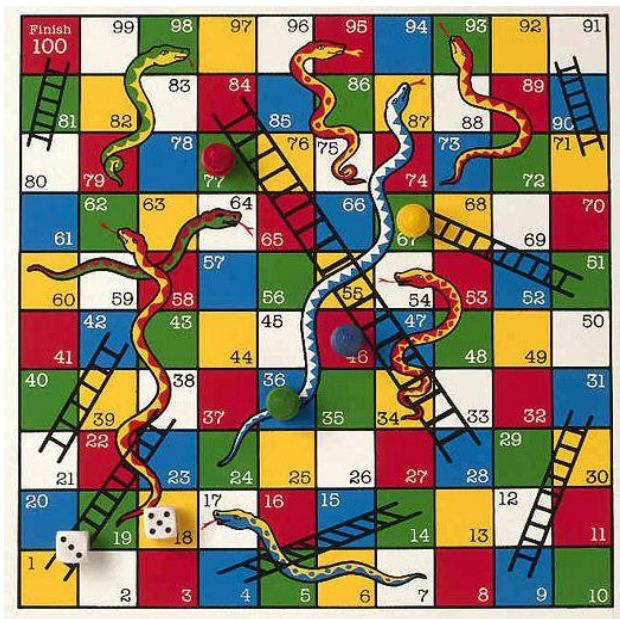
3.3 Rantai Markov dalam Permainan Ular Tangga

Ular tangga adalah permainan yang sering dimainkan oleh anak-anak. Ular tangga merupakan sebuah permainan papan yang sangat sederhana. Dalam permainan ini giliran bermain seorang pemain ditentukan dengan melemparkan dadu.

Permainan ini merupakan permainan yang paling banyak menggunakan prinsip probabilitas. Karena jumlah angka untuk menentukan jalannya seorang pemain benar-benar tidak bisa diprediksi.

Aturan permainan ini sangatlah sederhana. Setiap pemain mulai dari kotak nomor 1. Kemudian dengan menggunakan dadu, jumlah kotak untuk pemain berjalan ditentukan. Apabila saat berhenti di kotak tersebut ada pangkal tangga, mala pemain tersebut langsung naik ke ujung tangga. Namun apabila serang pemain masuk ke

kotak yang terdapat kepala ularnya, maka pemain tersebut harus turun sampai kotak yang terdapat ekor ular tadi.



Gambar 3.1 Contoh Papan Permainan Ular Tangga

Berdasarkan deskripsi singkat dan sederhana di atas, maka dapat dikatakan bahwa permainan ini sangat berhubungan erat dengan probabilitas, terutama Rantai Markov. Karena pada bab sebelumnya sudah dikatakan bahwa pada Rantai Markov, kejadian yang akan terjadi tidak dipengaruhi oleh kejadian masa lalu. Tetapi di pengaruhi oleh kejadian saat ini saja.

Dengan menggunakan teori Rantai Markov, seorang pemain juga dapat menentukan keadaan atau kejadian yang sebaiknya terjadi saat pemain akan mendapatkan giliran bermain (teknik deskriptif). Setidaknya pemain mendapatkan gambaran kejadian apa saja yang akan terjadi saat ia akan menggunakan gilirannya tersebut. Akan tetapi pemain tidak akan bisa menggunakan teori ini untuk mengambil keputusan (teknik optimisasi). Karena keputusan yang akan diambil tidak bisa ditentukan oleh seorang pemain. Semuanya terjadi berdasarkan hasil pelemparan dadu.

Setiap pemain yang akan menggunakan giliran jalannya tentu saja akan berjalan sesuai kotak dan akan secara acak. Dalam rumus teori Rantai Markov, maka posisi pemain sebelum berjalan lagi ke kotak selanjutnya bisa dianggap sebagai x . Nilai x ini tentu saja akan berubah apabila pemain itu akan berjalan. Apabila pemain berjalan ke kanan maka x akan berubah $+1$. Sedangkan apabila pemain akan berjalan ke kiri maka nilai x akan berubah -1 . Semuanya ini menggunakan ilmu probabilitas.

Berdasarkan penjelasan pada paragraph di atas, maka peluang seorang pemain saat akan berjalan dapat ditentukan dengan teori Rantai Markov dengan rumus

sebagai berikut.

$$P_{\text{ke kiri}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c+|x|} \right)$$

$$P_{\text{ke kanan}} = 1 - P_{\text{ke kiri}}$$

Keterangan:

x = kotak posisi terakhir pemain sebelum ia jalan lagi

c = sebuah konstanta dengan nilai > 0

Sebagai contoh, apabila konstanta dari c adalah sama dengan 1, maka probabilitas seorang pemain bergerak ke kiri dengan posisi $x = -2, -1, 0, 1, 2$ adalah $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$

Karena probabilitas ini hanya melihat posisi sekarang (saat ini) dan tidak melihat posisi lain, maka peluang jalan pemain secara acak ini merupakan definisi dari rantai Markov.

Sebenarnya ada beberapa permainan lain yang juga bisa mendefinisikan teori Rantai Markov ini. Misalnya saja saat bermain kartu Blackjack. Seseorang yang bermain kartu akan mendapatkan keuntungan hanya melihat kartu yang dia miliki saat ini saja.

Permainan lain yang jalannya menggunakan dadu juga dapat mendefinisikan teori Rantai Markov ini. Karena semua posisi yang akan terjadi selanjutnya hanya ditentukan oleh dadu. Kejadiannya juga hanya dipengaruhi posisi pemain saat ini saja. Tidak dipengaruhi hal lain.

3.4 Rantai Markov dalam Memprakirakan Cuaca

Cuaca merupakan hal penting yang akan dilihat orang apabila akan melaksanakan suatu kegiatan. Apabila cuaca yang terjadi tidak sesuai dengan prediksi seseorang maka orang tersebut akan sulit sekali menjalankan aktivitasnya. Oleh karena itulah orang sering kali memprakirakan cuaca untuk bisa memprediksi perubahan cuaca yang akan terjadi. Sehingga bisa mempersiapkan segala kemungkinan cuaca yang akan terjadi nantinya.

Untuk memprakirakan kondisi cuaca ini dapat dikaitkan dengan teori Rantai Markov. Karena cara untuk memprakirakannya sesuai sekali dengan definisi dari teori Rantai Markov, yaitu hanya melihat kondisi saat ini saja untuk menentukan kondisi selanjutnya. Tanpa melihat kondisi masa lalu sama sekali.

Probabilitas kondisi cuaca dapat dijelaskan dengan matriks sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks tersebut dapat dilihat bahwa peluang kondisi panas adalah 0.9, peluang kondisi hujan 0.5, peluang cuaca berawan 0.1, dan peluang kondisi

berangin kencang adalah 0.5.

Dari penjelasan pembacaan matriks tersebut maka kita dapat menentukan atau memprediksi cuaca yang akan terjadi dengan melihat kondisi cuaca saat ini (hari pertama). Misalnya cuaca hari pertama adalah hujan. Maka berarti peluang hujannya adalah 1 dan peluang panasnya adalah 0. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x^{(1)} = [1 \ 0]$$

Maka kondisi cuaca hari kedua dapat diprediksi dengan persamaan sebagai berikut.

$$x^{(2)} = x^{(1)} P = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = [0.9 \ 0.1]$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kondisi cuaca hari kedua adalah hujan dengan peluang 0.9 karena peluang cuaca panas hanyalah 0.1.

Ini adalah contoh aplikasi Rantai Markov di bidang ilmu pengetahuan. Selain untuk memprediksi cuaca, di bidang ilmu pengetahuan lain Rantai Markov juga sering digunakan. Misalnya di bidang fisika pada termodinamika dan mekanika statistik, di bidang kimia misalnya pada Michaelis-Menten kinetika, dan masih banyak lagi bidang lain yang menggunakan teori ini.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan semua penjelasan tentang Rantai Markov sebagai ilmu probabilitas, maka dapat disimpulkan bahwa Rantai Markov merupakan suatu bagian dari ilmu probabilitas. Teori ini sangat berguna untuk memprediksi kejadian yang akan terjadi dengan hanya melihat kondisi saat ini tanpa mempedulikan kondisi masa lalu.

Aplikasi dari Rantai Markov ini banyak sekali ditemukan dalam kehidupan kita sehari-hari tanpa kita sadari. Teori ini bisa digunakan untuk menganalisis perpindahan merk yang dilakukan oleh konsumen, kebiasaan seseorang untuk *browsing* dalam jaringan internet, permainan ular tangga, dan juga dalam memprediksi kondisi cuaca.

Rantai Markov ini sangat erat kaitannya dengan ilmu probabilitas. Sehingga teori ini sangat penting untuk dikembangkan untuk membantu setiap orang untuk mengambil sebuah keputusan. Meskipun hanya bisa membantu untuk mendeskripsikan, tidak bisa untuk mengambil keputusan yang sebenarnya.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain#Internet_applications
Tanggal Akses : 16 Desember 2010
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Examples_of_Markov_chains
Tanggal Akses : 16 Desember 2010
- [3] <http://fajarbax89.blogspot.com/2009/10/sejarah-penggunaan-markov-chain.html>
Tanggal Akses : 16 Desember 2010

- [4] http://id.wikipedia.org/wiki/Peluang_%28matematika%29
Tanggal Akses : 16 Desember 2010
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov
Tanggal Akses : 16 Desember 2010
- [6] <http://www.divbyzero.ca/oberman/wiki/File:SnakesAndLadders.jpg>
Tanggal Akses : 16 Desember 2010

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2010



Bagus Pratanggapati Kusumobroto
18209034