

Bean Machine Untuk Menunjukkan Teorema Limit Pusat dan Distribusi Normal

Dea Rahmatia (18209022)
Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
dea.rahmatia@gmail.com

Makalah ini membahas tentang aplikasi dari teorema peluang dan statistika. Teorema yang dibahas adalah Teorema Limit Pusat dan Distribusi Normal. Aplikasi yang dibahas pada makalah ini adalah Bean Machine yang juga dikenal dengan *Quincunx* atau Kotak Galton. Pendistribusian bola-bola pada Bean Machine membentuk kurva lonceng yang merupakan bentuk dari kurva distribusi normal. Pada perkembangannya, mesin ini dipakai dalam pembuatan banyak game. Mesin ini juga dapat dimanfaatkan sebagai media pembelajaran ilmu peluang dan statistika agar lebih mudah dipahami.

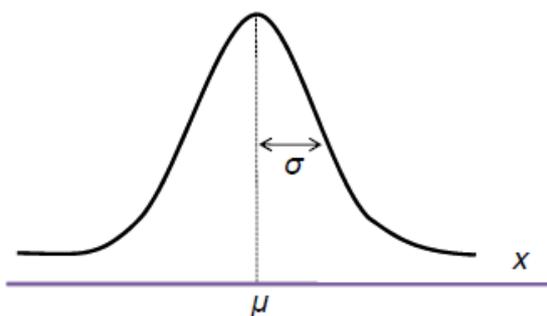
Kata kunci—Teorema Limit Pusat, Distribusi Normal, Bean Machine, Galton

I. PENDAHULUAN

Untuk dapat memahami suatu pembelajaran, alangkah lebih baiknya jika terdapat suatu bentuk fisik yang merepresentasikan pembelajaran yang dipelajari.

Pada sekitar tahun 1870-1880, seorang ilmuwan dari Inggris yang bernama Sir Francis Galton menjadi pelopor dalam penggunaan distribusi normal untuk menyesuaikan histogram dari data aktual yang ditabulasi. Ia menemukan *Quincunx* yang juga dikenal sebagai *Bean Machine*, sebagai alat untuk menunjukkan teorema limit pusat dan distribusi normal.

Distribusi normal adalah distribusi yang paling penting di antara distribusi yang lain. Kurva dari distribusi normal mempunyai bentuk setangkup seperti lonceng.



Gambar 1.1 Distribusi normal yang menyerupai lonceng

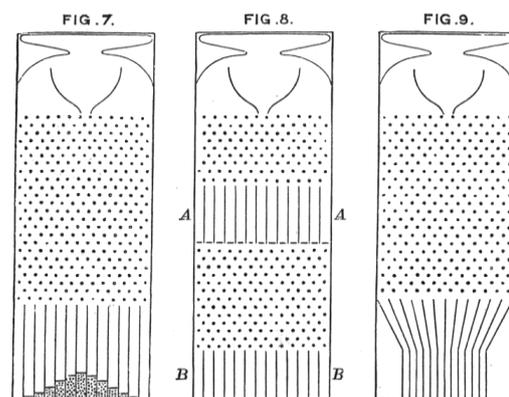
II. BEAN MACHINE

Sir Francis Galton (1822-1911) adalah seorang ilmuwan Inggris yang dianggap berjasa dalam mempopulerkan konsep korelasi dan regresi dalam statistik. Penelitian Sir Galton merupakan rintisan dalam studi modern pewarisan sifat genetik, misalnya penelitian tentang IQ sebagai berikut: 68,2% manusia memiliki kecerdasan normal (IQ 90-110); 13,6% agak bodoh (80-90); 13,6% pintar (110-120); 0,1% jenius (>120), dan 0,1% idiot (<80). Sir Galton menggunakan prinsip distribusi normal Gauss dalam penelitiannya tentang hereditas (pewarisan sifat genetik).

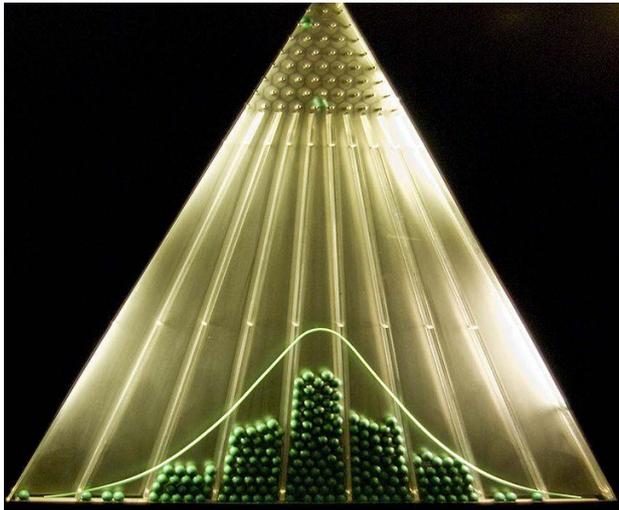
Ternyata Sir Galton tidak hanya berkecimpung dengan bidang genetika saja. Sir Galton menciptakan sebuah mesin untuk menunjukkan teorema limit pusat dan distribusi normal. Mesin tersebut bernama *Bean Machine* yang juga dikenal dengan *Quincunx* atau Kotak Galton.

Mesin tersebut terdiri dari papan vertikal dengan pin-pin yang disusun selang-seling. Ketika bola-bola dijatuhkan ke bawah, bola-bola tersebut akan memantul ke kiri dan kanan saat menyentuh pin. Di bagian bawah pin-pin terdapat kapiler untuk mengalirkan bola-bola dari bagian atasnya. Pada akhirnya, setelah melewati pin-pin, bola-bola tersebut akan masuk ke dalam kapiler-kapiler dan menumpuk hingga menjadi suatu bentuk. Tinggi dari kapiler-kapiler bola tersebut menyerupai suatu kurva lonceng. Bentuk yang dihasilkan ini yang disebut sebagai kondisi distribusi normal dalam statistik.

Cara kerja mesin ini dapat dilihat di *Museum of Science*, Boston dalam pameran Matematika.



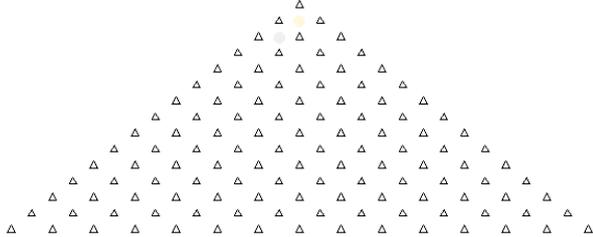
Gambar 2.1 Bean Machine



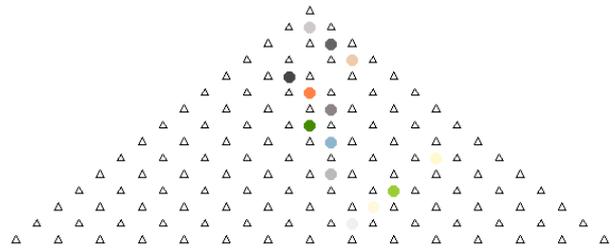
Gambar 2.2 Sebuah replika kerja mesin (sesuai dengan desain yang sedikit dimodifikasi.)

III. PENDISTRIBUSIAN BOLA PADA MESIN

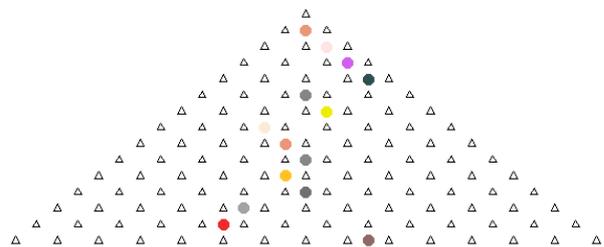
Agar dapat lebih memahami cara kerja mesin ini, lihatlah beberapa gambar pendistribusian bola yang didapat dari animasi cara kerja *Bean Machine* ini.



Gambar 3.1 Keadaan mesin ketika belum dimasukkan bola-bola

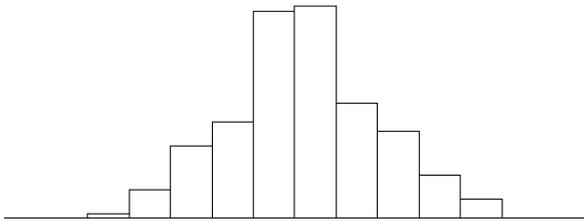
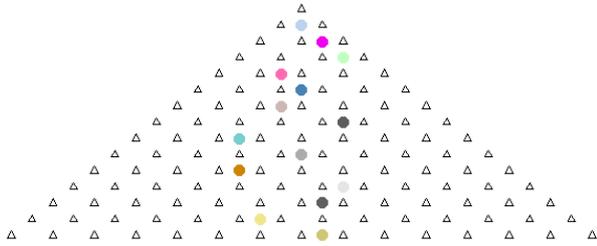


Gambar 3.2 Keadaan mesin ketika bola-bola mulai dimasukkan dan sedang melewati pin-pin. Mereka terpantul tak beraturan ke kanan dan kiri ketika menyentuh pin.



Gambar 3.3 Keadaan mesin ketika bola-bola sudah ada yang melewati pin-pin dan mulai membentuk tumpukan ketika sudah sampai bawah.





Gambar 3.4 Keadaan mesin ketika bola-bola yang masuk sudah sangat banyak dan kapiler-kapiler bola membentuk kurva seperti kurva lonceng

A. Probabilitas Bola Terjatuh pada Kapiler Tertentu

Probabilitas bahwa bola berakhir pada kapiler tertentu tentunya dapat dihitung. Mari lihat gambar di bawah ini. Jika bola memantul ke kanan k kali dan semua sisa pantulannya ke kiri ketika ia jatuh, ia akan berakhir di kapiler yang berbeda sebanyak k dari kiri saat di bawah. Begitu pula sebaliknya, jika bola memantul ke kiri k kali dan semua sisa pantulannya ke kanan ketika ia jatuh, ia akan berakhir di kapiler yang berbeda sebanyak k dari kanan saat di bawah.



Gambar 3.5 Contoh pergerakan bola

Pada gambar tersebut, bola telah memantul ke kiri sebanyak 2 kali dan semua sisa pantulannya ke kanan. Ia berakhir pada kapiler yang berbeda sebanyak 2 dari kanan.

Dengan menunjukkan jumlah baris pin pada mesin dengan n , maka jumlah jalan menuju kapiler ke- k pada bagian bawah diberikan dengan koefisien binomial $\binom{n}{k}$.

Jika probabilitas bola memantul ke kanan pada pin adalah p (yang sama dengan 0,5 pada mesin yang setimbang), maka probabilitas bahwa bola berakhir pada kapiler ke- k adalah $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ini adalah fungsi probabilitas massa dari distribusi binomial.

Menurut teorema limit pusat, distribusi binomial mendekati distribusi normal dengan ketentuan bahwa n (jumlah baris pin pada mesin) berjumlah besar.

B. Banyaknya Jalan yang Ditempuh Bola

Pada kenyataannya, *Bean Machine* ini adalah seperti Segitiga *Pascal* dengan penahan sebagai pengganti angka pada Segitiga *Pascal*. Jumlah dari setiap pin memperlihatkan seberapa banyak jalan yang berbeda yang dapat ditempuh untuk melalui pin-pin tersebut.

Dapat juga menggunakan rumus Kombinasi :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rumus di atas dapat juga dikatakan “dari sejumlah n diambil sejumlah k ” atau dapat ditulis $C(n, k)$. ini adalah perhitungan berapa banyak jalan untuk mendistribusi k dari sejumlah n .

Dengan menggabungkan semuanya, hasil perhitungan menjadi :

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dapat dilihat bahwa rumus tersebut merupakan rumus untuk distribusi binomial.

Sebagai contoh :

Untuk 10 baris pin dan probabilitas bola memantul ke kiri 0,5, dapat dihitung probabilitas bola tersebut berakhir di kapiler yang berbeda sebanyak 3 dari kanan. Perhitungannya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ p &= 0,5 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

$$f(3; 10, 0.5) = \binom{10}{3} 0.5^3 (1 - 0.5)^{(10-3)} = \binom{10}{3} 0.5^3 0.5^7$$

$$\text{karena } \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ ,}$$

$$\text{maka } f(3; 10, 0.5) = 120 \times 0.5^3 0.5^7 = 0.1171875$$

Dari perhitungan di atas dapat dilihat bahwa terdapat 120 jalan berbeda yang dapat ditempuh oleh bola untuk berakhir pada kapiler yang berbeda sebanyak 3 dari kanan, dan probabilitasnya adalah 0,1171875.

Dapat juga dibuat tabel untuk kondisi di atas dengan jumlah bola yang terdistribusi sebanyak 10 buah.

Dari Kanan	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilitas	0.001	0.01	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.01	0.001
Contoh: 100 bola	0	1	4	12	21	24	21	12	4	1	0

Tabel 3.1 Tabel distribusi bola pada setiap kapiler

IV. KEGUNAAN MESIN

Pada perkembangannya, *Bean Machine* ini sering dijadikan sebagai inspirasi dalam pembuatan *game*. Namun penulisnya, selain sebagai sarana hiburan, *game* yang dibuat ini kebanyakan dijadikan fasilitas untuk berjudi. Tentunya kejadian ini banyaknya terjadi di luar negeri. Sedangkan di Indonesia, *game* yang sering dimainkan adalah *game* dalam bentuk digitalnya sehingga dapat dimainkan di layar komputer atau handphone dan digunakan hanya sebagai hiburan saja, tidak digunakan untuk berjudi seperti di luar negeri.

Selain untuk membuat *game*, *Bean Machine* juga dapat menjadi salah satu alternatif metode pembelajaran statistika.

A. Pinball

Pinball adalah jenis *game* arcade dimana seorang pemain mencoba mencetak poin sebanyak-banyaknya dengan menjaga bola pada permainan selama mungkin agar tidak melewati sirip penghalang.

Pada zaman dahulu, *Pinball* masih berbentuk mesin besar yang menggunakan koin.

Seiring dengan perkembangan zaman, *game Pinball* ini juga mengalami perkembangan. Saat ini, *game Pinball* sudah marak juga di Indonesia. Namun dalam bentuk digital sehingga dapat dimainkan di komputer atau handphone.



Gambar 4.1 Mesin *Pinball* elektronik



Gambar 4.2 *Game Pinball* yang sering dimainkan pada layar komputer.

B. Pachinko

Pachinko ini adalah *game* yang berada di Jepang yang sering digunakan untuk berjudi atau hanya hiburan saja. Mesin Pachinko berbentuk seperti mesin *Pinball* yang berbentuk vertikal.



Gambar 4.3 Gambar mesin Pachinko

Pachinko menggunakan prinsip *Bean Machine* dimana bola dilemparkan ke arah pin-pin yang diletakkan pada posisi tertentu.

C. Bagatelle

Bagatelle adalah sejenis permainan seperti bilyard.



Gambar 4.3 Game Bagatelle

Prinsip kerjanya sama dengan *Bean Machine*, yaitu bola dimasukkan ke dalam lubang tetapi harus melewati pin-pin yang dikondisikan sebagai penghambat.

D. Metode Pembelajaran

Selain dimanfaatkan untuk pembuatan *game*, *Bean Machine* ini juga dapat digunakan sebagai metode pembelajaran ilmu Peluang dan Statistika. Menurut penulis, belajar dengan contoh yang konkrit seperti mesin ini membuat para pembelajar lebih tertarik dan lebih mudah mencerna materi.

V. KESIMPULAN

Bean Machine yang juga dikenal dengan *Quincunx* atau Kotak Galton yang diciptakan oleh Sir Francis Galton ini merupakan salah satu aplikasi teori peluang dan statistika, khususnya menunjukkan teorema limit pusat dan distribusi normal.

Mesin ini mempunyai beberapa manfaat, yaitu menjadi dasar dalam pembuatan banyak *game*. Namun penulisnya pembuatan *game* ini tidak sepenuhnya baik, karena kebanyakan dari *game* yang dibuat ini dipergunakan untuk berjudi. Selain untuk pembuatan *game*, mesin ini juga bermanfaat sebagai metode pembelajaran ilmu Peluang dan Statistika.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur ke hadirat Allah SWT atas selesainya pembuatan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing, Bapak Rinaldi Munir atas kesempatan yang telah diberikan untuk penulis mengembangkan pengetahuan melalui tulisan di makalah ini. Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih kepada Orang Tua, teman-teman seperjuangan STI, dan semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis dalam pembuatan makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Bean_machine diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [2] <http://www.mathsisfun.com/data/quincunx-explained.html> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [3] http://animation.yihui.name/prob:bean_machine diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [4] <http://windowssecrets.com/images/wsn/W071206-3D-Pinball.jpg> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [5] <http://pingmag.jp/images/article/pachinko05.jpg> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Bagatelle> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [7] <http://en.wikipedia.org/wiki/Pachinko> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/Pinball> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00
- [9] <http://pratolo.com/2009/10/21/false-fundamental-of-finance-and-market-forecasting/> diakses tanggal 16 Desember 2010 pukul 09.00

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang penulis tulis ini adalah tulisan penulis sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2010

Dea Rahmatia (18209022)