Peluang dan Kejadian (Event)

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Kejadian (*event*)

- Kejadian adalah himpunan bagian (*subset*) dari ruang sampel S.
- Dengan kata lain, kejadian adalah himpunan dari hasil-hasil yang mungkin.
- Notasi: A
- Contoh: Kejadian A adalah hasil lemparan dadu yang habis dibagi tiga

  maka A = {3, 6}
- Karena $A \subseteq S$, maka ada 3 kemungkinan:

  1. A = {} → kejadian mustahil

  2. A = S

  3. $A \subset S$

- Misalkan A dan B adalah kejadian, maka:

  1. $A \cup B$: kejadian "salah satu dari A atau B atau keduanya" → gabungan dari dua kejadian
  2. $A \cap B$: kejadian "baik A maupun B" → irisan dari dua kejadian
  3. A' : kejadian "bukan A" → komplemen kejadian A
  4. A – B : kejadian "A tetapi bukan B"

- Jika $A \cap B = \varnothing$, maka kejadian A dan B saling terpisah atau saling meniadakan (*mutually exlusive*).

- $A' = S - A$

- **Contoh 1**: Mahasiswa STI sedang duduk-duduk di dalam ruang Himpunan. Seorang mahasiswa dipilih secara acak. Misalkan A adalah kejadian mahasiswa yang dipilih adalah anggota unit PSM, dan B adalah kejadian mahasiswa yang dipilih berasal dari Bali. Maka,

  S : semua mahasiswa STI yang sedang duduk-duduk

  $A \cap B$: kejadian "mahasiswa yang dipilih adalah anggota unit PSM dan berasal dari Bali"

  $A \cup B$: kejadian "mahasiswa yang dipilih adalah anggota unit PSM atau berasal dari Bali"

  A' : kejadian "mahasiswa yang dipilih bukan anggota unit PSM"

  A – B : kejadian "mahasiswa yang dipilih adalah anggota unit PSM tetapi tidak berasal dari Bali"

- **Contoh 2**: Sebuah koin dilempar dua kali. Sisi permukaan koin adalah angka (A) dan gambar (G). Misalkan P adalah kejadian “setidaknya muncul satu gambar” dan Q adalah “lemparan kedua menghasilkan angka”. Maka:

  $S = \{AG, AA, GA, GG\}$

  $P = \{GA, GG, AG\}$

  $Q = \{AA, GA\}$

  $P \cap Q = \{GA\}$

  $P \cup Q = \{GA, GG, AG, AA\}$

  $P' = \{ AA\}$

  $P - Q = \{GG, AG\}$

  $Q - P = \{AA\}$

Peluang Suatu Kejadiaan

- Semua kalimat di bawah ini adalah ketidakpastian:

  1. Kecil kemungkinan Indonesia lolos masuk babak final.
  2. Peluang Farhan dapat beasiswa tipis sekali.
  3. Kemungkinan besar hujan turun pada awal November

- Derajat ketidakpastian (atau kepastian) dari suatu kejadian dapat dihitung
- Peluang: derajat tingkat kepastian atau keyakinan terjadinya suatu kejadian dari eksperimen acak.

- Nilai peluang adalah dari 0 sampai 1.

- Jika suatu kejadian diyakini pasti terjadi, maka peluangnya adalah 1 atau 100%.
- Jika kita tidak yakin suatu kejadian tidak akan terjadi, maka peluangnya adalah 0.
- Jika suatu kejadian diyakini hanya 50% akan terjadi, maka peluangnya adalah ½.
- Jika hanya 25% kemungkinan terjadinya, maka peluangnya adalah ¼
- Jika hanya 25% peluang suatu kejadian akan terjadi, maka 75% tidak akan terjadi.

- Kita kembali ke topik ruang sampel.
- Untuk ruang sampel yang elemennya diskrit, peluang munculnya suatu elemen di antara titik sampel disebut **peluang diskrit.**

- Misalkan ruang sampel S beranggotakan n elemen:

  $$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

  maka peluang kemunculan x_i di dalam S disimbolkan dengan $P(x_i)$.

- Peluang diskrit memiliki sifat sebagai berikut:

  1. $0 \leq P(x_i) \leq 1$

  2. $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

- **Contoh 3**: Pada pelemparan dadu, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Peluang munculnya setiap angka adalah sama, yaitu 1/6 dan

  $$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 6 \times 1/6 = 1$$

- **Contoh 4**: Sebuah koin dilempar empat kali. Berapa peluang munculnya sisi angka (A) sebanyak tiga kali?

  Jawaban: ruang sampel S berukuran 2 x 2 x 2 x 2 = 16.

  Jumlah kemungkinan munculnya A sebanyak 3 tiga kali adalah C(4, 3) = 4, sehingga peluang munculnya sisi A sebanyak 3 kali adalah 4/16 = ¼.

- Kita kembali ke topik kejadian
- Untuk menentukan peluang kejadian A, peluang semua titik sampel di dalam A dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan peluang A dan disimbolkan dengan P(A).

- **Contoh 5**: Pada percobaan melempar dadu, berapa peluang kejadian munculnya angka ganjil?

  Jawaban: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan A = {1, 3, 5}

  P(1) = 1/6, P(2) = 1/6, P(3) = 1/6

  maka P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½

  Perhatikan bahwa P(S) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1

- Sifat-sifat peluang kejadian A:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$
  2. $P(\emptyset) = 0$ → peluang kejadian mustahil adalah 0
  3. $P(S) = 1$

- **Definisi**: Peluang kejadian A di dalam ruang sampel S adalah: $P(A) = |A|/|S|$

  Ket: $|..|$ adalah simbol kardinalitas atau jumlah elemen

- Pada contoh 5 di atas, $|A| = 3$ dan $|S| = 6$, sehingga $P(A) = 3/6 = ½$.

- **Contoh 6**: Sebuah koin dilempar dua kali. Berapa peluang kejadian paling sedikit muncul sisi angka (A) satu kali?

  <u>Jawaban</u>: S = {AA, AG, GA, GG} → $|S| = 4$

  Misal B adalah kejadian paling sedikit muncul sisi angka (A) satu kali, maka B = {AA, AG, GA} dan $|B| = 3$, maka $P(B) = 3/4$

- **Contoh 7**: Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka dadu yang jumlahnya 8?

  Jawaban: Ruang sampelnya adalah

  S = {(1,1), (1, 2), …, (1, 6), (2, 1), (2, 2), … , (2, 6), …,

  (6, 1), (6, 2), …, (6, 6)}, jumlah titik sampelnya ada sebanyak 6 x 6 = 36 (gunakan kaidah perkalian!).

  Kejadian munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah A = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} sehingga P(A) = 5/36.

- **Contoh 8**: Sebuah dadu dilempar sekali. Misalkan A adalah kejadian angka yang muncul genap dan B kejadian angka yang muncul habis dibagi 3, maka $A \cup B$ adalah kejadian angka yang muncul genap atau habis dibagi 3 dan $A \cap B$ adalah kejadian angka yang muncul adalah genap dan habis dibagi 3.

  A = {2, 4, 6}, B = {3, 6}, maka $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6} dan $A \cap B$ = {6}.

  $P(A \cup B) = |A \cup B|/|S| = 4/6$ dan $P(A \cap B) = |A \cap B|/|S| = 1/6$

Latihan. Sebuah dadu dilempar sekali. Berapa peluang kejadian munculnya angka 2 atau 5?

- Pada contoh-contoh sebelumnya, kita mengasumsikan koin dan dadu adalah *fair*, artinya tidak berat ke salah satu sisi, sehingga peluang kemucculan setiap muka pada koin adalah sama yaitu ½, dan peluang kemunculan setiap angka pada dadu aadalah sama yaitu 1/6.

- Jika dilakukan percobaan yang tidak fair, maka peluang kemunculan setiap angka pada dadu dan setiap muka pada koin tidak lagi sama. Perhatikan contoh berikut.

- **Contoh 9**: Sebuah dadu diberi pemberat sedemikian rupa sehingga peluang munculnya angka genap adalah dua kali peluang munculnya angka ganjil. Berapa peluang kejadian munculnya angka genap?

  Jawaban: angka genap ada tiga buah yaitu 2, 4, 6 dan angga ganjil juga tiga buah yaitu 1, 3, 5. Misalkan peluang tiap angka ganjil adalah x, maka peluang tiap angka genap adalah 2x. Karena jumlah peluang semua titik di dalam ruang sampel adalah 1, maka

  $$3(2x) + 3x = 1 \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = 1/9.$$

  Misalkan A adalah kejadian munculnya angka genap, maka

  $A = \{2, 4, 6\}$, sehingga $P(A) = 2/9 + 2/9 + 2/9 = 6/9 = 2/3$

- **Latihan**. Pada contoh di atas, berapa peluang munculnya angka lebih besar dari 4?

Contoh-contoh tambahan

- **Contoh 10**: Di dalam sebuah ruangan terdapat 5 orang mahasiswa IF, 6 orang mahasiswa STI, dan 7 orang mahasiswa EL. Secara acak dipilih satu orang untuk maju mengambil undian. Berapa peluang mahasiswa yang terpilih adalah:

  (a) dari Prodi STI

  (b) dari prodi IF atau EL

  Jawaban:

  (a) Ada 6 orang mahasiswa STI dari 18 orang di dalam ruangan itu, maka ada 6 kemungkinan hasil terpilihnya mahasiswa STI. Jika A adalah kejadian yang terpilih adalah mahasiswa STI, maka P(A) = 6/18.

  (b) Misal B adalah kejaidan terpilihnya mahsiswa IF dan C adalah kejadian terpilihnya mahasiswa EL, maka $P(B \cup C) = (5 + 7)/18 = 12/18$

- **Contoh 11**. Kartu remi (poker) seluruhnya 52 kartu. Keseluruhan kartu ini terdiri dari 13 jenis kartu, setiap jenis ada 4 kartu Tiga belas jenis kartu itu adalah 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, joker (*jack*), as, ratu, dan raja. Setiap pemain mendapat 5 kartu. Berapa peluang setiap pemain mendapat 3 kartu as dan 2 kartu joker?

  Jawaban: Jumlah cara mengambil 5 kartu adalah

  C(52, 5) = 2.598.960 → jumlah titik sampel S

  Banyaknya cara mendapat 3 dari kartu as adalah C(4, 3) = 4 dan banyaknya cara mendapat 2 dari kartu joker adalah C(4, 2) = 6.

  Dengan kaidah perkalian, maka terdapat 4 x 6 = 24 cara mendapat 3 kartu as dan 2 katu joker.

  Misalkan A adalah kejadian mendapatkan 3 kartu as dan 2 kartu joker, maka P(A) = |A|/|S| = 24/2.598.960 = 0.000009.

- **Contoh 12**. Berapa peluang kartu yang terambil adalah 4 buah kartu as?

  Jawaban: Jumlah cara mendapat 4 kartu dari 4 kartu as adalah C(4, 4) = 1. Satu kartu lainnya diambil dari 48 kartu yang tersisa, dan ini ada sebanyak C(48, 1) cara. Jadi, ada 1 x C(48, 1) cara untuk mendapatkan 4 kartu as dan 1 kartu jenis lainnya

  Misalkan A adalah kejadian mengambil 5 kartu yang 4 diantaranya adalah kartu as, maka

  $$P(A) = |A|/|S| = 1 \times C(48, 1) / C(52, 5) = 0.0000185$$

- **Contoh 13**. Berapa peluang dari 5 kartu itu mengandung 4 kartu dari jenis yang sama?

  Jawaban:Jumlah cara mengambil satu jenis kartu dari 13 jenis adalah C(13, 1).

  Jumlah cara mengambil 4 kartu dari kartu yang sejenis adalah C(4, 4).

  Jumlah cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa adalah C(48, 1).

  Misalkan A adalah kejadian mengambil 5 kartu yang mengandung 4 kartu dari jenis yang sama adalah

  $$P(A) = |A|/|S| = C(13, 1)C(4,4)C(48,1)/C(52,5)$$
  $$= 0.00024$$