Penggunaan Metode Numerik Untuk Mencari Nilai Percepatan Gravitasi

Khaidzir Muhammad Shahih (13512068)[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13512068@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Makalah ini membahas penggunaan metode numerik untuk menghitung nilai percepatan gravitasi bumi. Data yang diambil untuk penghitungan didapat dari data hasil eksperimen dan data yang dibuat menggunakan persamaan gerakan bandul sederhana.**

***Keywords*—percepatan gravitasi, bandul, turunan numerik**

I. Pendahuluan

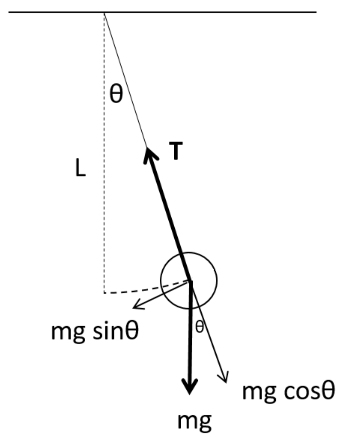
Setiap benda di bumi akan mengalami tarikan gaya gravitasi bumi yang arahnya menuju pusat bumi. Besarnya gaya gravitasi ini berbeda – beda untuk setiap benda bergantung pada massa benda (dan ketinggian). Karena adanya gaya gravitasi ini, setiap benda mengalami percepatan gravitasi yang arahnya menuju pusat bumi (searah dengan gaya gravitasi). Besarnya percepatan gravitasi ini tidak bergantung pada massa benda, melainkan hanya bergantung pada ketinggian benda. Di permukaan bumi, percepatan gravitasi berkisar pada 9,8 m/s^2.

Untuk mencari besarnya percepatan gravitasi di suatu tempat, dapat dilakukan eksperimen bandul sederhana. Dari sistem bandul ini, didapatkan sebuah persamaan diferensial orde 2. Persamaan ini berguna untuk mencari besarnya percepatan gravitasi di suatu tempat. Dalam makalah ini, akan diujikan metode numerik untuk mendapatkan nilai percepatan gravitasi dari data eksperimen bandul sederhana yang ada.

II. Teori Dasar

A. Bandul Sederhana

Bandul sederhana merupakan sebuah sistem mekanik yang menunjukkan gerakan periodik[1]. Sistem bandul sederhana ini terdiri atas sebuah benda yang digantung oleh tali ringan. Berikut diagram gaya dari sistem bandul.



Gaya – gaya yang bekerja pada benda adalah gaya berat *mg* dan gaya tegangan tali *T*. Terlihat benda mengalami gaya sebesar *mg sin θ*. Gaya ini berubah arah dan besarnya setiap saat bersamaan dengan sudut yang dibentuk antara titik pangkal tali dengan posisi benda (pada gambar diatas, θ). Gaya *mg sin θ* inilah yang menyebabkan bandul bergerak bolak – balik (berosilasi).

Karena adanya gaya sebesar *mg sinθ* ini, benda mengalami percepatan *a* sebesar g sinθ. Dengan menerapkan hukum kedua Newton, maka didapat persamaan :

$$\Sigma F = -mg\sin\theta = ma \qquad (1)$$

Karena percepatan *a* merupakan turunan kedua dari jarak *s* terhadap waktu, maka :

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad (2)$$

Dan karena $s = L\theta$, dengan *L* adalah panjang tali, dan *L* konstan, maka didapat :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad (3)$$

Persamaan diatas adalah persamaan diferensial orde 2. Persamaan diatas sulit untuk dicari solusinya secara analitik, sehingga, dilakukan asumsi yaitu sudut θ yang kecil. Dengan sudut θ yang kecil ini, dapat dilakukan pendekatan $\sin\theta \approx \theta$. Sehingga, persamaan (3) diatas menjadi :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \qquad (4)$$

Persamaan (4) diatas memiliki solusi :

$$\theta = \theta_{max}\cos\omega t \qquad (5)$$

Dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dan θ_{max} adalah sudut maksimum bandul.

B. *Turunan Numerik*

Definisi turunan dari fungsi *f(x)* adalah sebagai berikut. [2]

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (6)$$

Jika persamaan *f(x)* diketahui secara eksplisit, maka dapat ditentukan fungsi turunannya, *f'(x), f''(x),* dst. Namun, apabila fungsi *f(x)* memiliki bentuk yang rumit sehingga sulit menentukan fungsi turunannya, ataupun kita tidak mengetahui *f(x)*, namun hanya memiliki titik – titik data yang mewakili *f(x)*, kita dapat menghitung turunan di suatu titik menggunakan metode turunan numerik.

Ada tiga pendekatan dalam menghitung turunan secara numerik [2].

1. Hampiran selisih maju
2. Hampiran selisih mundur
3. Hampiran selisih pusat

Metode – metode diatas akan dijelaskan lebih lanjut pada bagian berikutnya, namun tidak dibahas penurunannya. Penurunannya lebih lanjut dapat dilihat di [2].

1. Hampiran Selisih Maju

Untuk menghitung turunan di titik x_0, metode hampiran selisih maju melihat titik – titik data berikutnya, yakni x_1, x_2, dst. Turunan pertama fungsi *f* menggunakan hampiran selisih maju dapat dihitung sebagai berikut.

$$f'_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h} + O(h) \qquad (7)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h/2\ f''(t)$, $x_i<t<x_{i+1}$. Untuk penghitungan dengan aproksimasi galat yang lebih kecil (tetapi membutuhkan lebih banyak titik data), dapat dihitung sebagai berikut.

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i-2}}{2h} + O(h^2) \qquad (8)$$

Turunan kedua dari fungsi *f* dapat dihitung sebagai berikut.

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h) \qquad (9)$$

Untuk pendekatan galat yang lebih kecil dapat memakai jumlah data yang lebih banyak dan menggunakan rumus berikut.

$$f''_i = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{12h} + O(h^2) \qquad (10)$$

2. Hampiran Selisih Mundur

Untuk menghitung turunan di titik x_0, metode hampiran selisih mundur melihat titik – titik data sebelumnya, yakni x_{-1}, x_{-2}, dst. Turunan pertama fungsi f menggunakan hampiran selisih mundur dapat dihitung sebagai berikut.

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \qquad (11)$$

Turunan kedua menggunakan metode selisih mundur dapat dihitung menggunakan rumus berikut.

$$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \qquad (12)$$

3. Hampiran Selisih Pusat

Untuk menghitung turunan di titik x_0, metode hampiran selisih pusat melihat titik – titik data sebelum dan sesudahnya, yakni x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, dst. Turunan pertama fungsi f menggunakan hampiran selisih pusat dapat dihitung sebagai berikut.

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad (13)$$

untuk penghitungan yang lebih teliti yang membutuhkan lebih banyak titik data, dapat dihitung sebagai berikut.

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + O(h^4) \qquad (14)$$

Turunan kedua menggunakan metode selisih pusat dapat digunakan rumus berikut.

$$f''_i = \frac{-f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \qquad (15)$$

Untuk pendekatan dengan galat yang lebih kecil (membutuhkan lebih banyak titik data) dapat menggunakan rumus berikut.

$$f''_i = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + O(h^4) \qquad (16)$$

III. PEMBAHASAN

Dalam makalah ini akan dibahas penghitungan nilai *g*, yaitu percepatan gravitasi di permukaan bumi menggunakan data hasil eksperimen menggunakan hampiran selisih-maju, selisih-mundur, dan selisih-pusat. Sebagai pembanding, penghitungan nilai *g* juga dilakukan menggunakan data yang dibuat sendiri menggunakan rumus yang sudah ada.

Untuk menghitung nilai *g* menggunakan metode turunan numerik, digunakan persamaan (3) yang diatur menjadi sebagai berikut.

$$g = -\frac{L}{sin\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (17)$$

Nilai turunan kedua dari θ untuk berbagai titik dihitung menggunakan metode numerik yang telah disebutkan diatas menggunakan data yang ada.

Metode turunan numerik diterapkan menggunakan sebuah program yang ditulis dalam bahasa C. Berikut adalah *pseudocode* masing – masing metode.

```
{ a adalah tabel yang menyimpan nilai turunan kedua fungsi θ. t adalah tabel yang menyimpan nilai – nilai θ untuk tiap – tiap titik yang didefinisikan. g adalah tabel yang menyimpan nilai percepatan gravitasi untuk titik – titik data yang berbeda }

prosedur selisih_pusat_o2
  for (i = 1 .. n-1)
    a[i] = t[i+1] – 2*t[i] + t[i-1]
    a[i] = a[i] / (h*h)
    g[i] = (-L * a[i] ) / sin(t[i])


prosedur selisih_pusat_o4
  for (i = 2 .. n-2)
    a[i] = (-t[i+2] + 16*t[i+1] – 30*t[i] + 16*t[i-1] – t[i-2])
    a[i] = a[i] / (12*h*h)
    g[i] = (-L * a[i] ) / sin(t[i])


prosedur selisih_maju_o1
  for (i = 1 .. n-2)
    a[i] = t[i+2] – 2*t[i+1] + t[i]
    a[i] = a[i] / (h*h)
    g[i] = (-L * a[i] ) / sin(t[i])
```

```
prosedur selisih_maju_o2
  for (i = 1 .. n-3)
    a[i] = -t[i+3] + 4*t[i+2] – 5*t[i+1] + 2*t[i]
    a[i] = a[i] / (12*h)
    g[i] = (-L * a[i] ) / sin(t[i])


prosedur selisih_mundur_o1
  for (i = 2 .. n)
    a[i] = t[i-2] – 2*t[i-1] + t[i]
    a[i] = a[i] / (h*h)
    g[i] = (-L * a[i] ) / sin(t[i])
```

A. *Penghitungan Nilai g Menggunakan Data Hasil Eksperimen*

Dalam penghitungan nilai *g* ini, contoh data diambil dari [3]. Data yang digunakan adalah sebagai berikut.

Tabel 1 Data Hasil Eksperimen Pada [3]

No	Massa (kg)	Panjang (m)	Sudut (°)	Periode (s)
1	0.200	0.40	10.0	1.27
2	0.200	0.40	15.0	1.24
3	0.200	0.40	20.0	1.29
4	0.200	0.40	25.0	1.25
5	0.200	0.40	30.0	1.26

Dengan menggunakan data diatas akan dihitung nilai g rata – rata untuk setiap besar sudut maksimum. Namun, besar sudut setiap saat untuk setiap data sudut maksimum yang berbeda tidak dapat diketahui. Namun, kita dapat mengetahui besar sudut pada saat t = 0 (yaitu θ_{max}), saat t = 0.25T (yaitu 0), saat t = 0.5T (yaitu -θ_{max}), saat t = 0.75T (yaitu 0), saat t = T (yaitu θ_{max}), dst sesuai perilaku gerakan osilasi. Oleh karena itu, data diatas diperluas menjadi sebagai berikut.

Tabel 2 Variasi nilai sudut untuk beberapa waktu

Data 1 (Sudut = 10)	
t (s)	Sudut (rad)
0	0.174532925
0.315	0
0.63	-0.174532925
0.945	0
1.26	0.174532925
Data 2 (Sudut = 15)	
0	0.261799388
0.31	0
0.62	-0.261799388

0.93	0
1.24	0.261799388
Data 3 (Sudut = 20)	
0	0.34906585
0.3225	0
0.645	-0.34906585
0.9675	0
1.29	0.34906585
Data 4 (Sudut = 25)	
0	0.436332313
0.3125	0
0.625	-0.436332313
0.9375	0
1.25	0.436332313
Data 5 (Sudut = 30)	
0	0.523598776
0.315	0
0.63	-0.523598776
0.945	0
1.26	0.523598776

Berikut hasil yang didapatkan dari pengolahan data pada Tabel 2 diatas.

Tabel 3 Hasil penghitungan nilai g menggunakan data Tabel 2

Data 1	
Metode	**Nilai *g* (m/s^2)**
Selisih pusat $O(h^2)$	7.97645
Selisih pusat $O(h^4)$	9.305859
Data 2	
Selisih pusat $O(h^2)$	8.420522
Selisih pusat $O(h^4)$	9.823942
Data 3	
Selisih pusat $O(h^2)$	7.850300
Selisih pusat $O(h^4)$	9.158683
Data 4	
Selisih pusat $O(h^2)$	8.457832
Selisih pusat $O(h^4)$	9.867471
Data 5	
Selisih pusat $O(h^2)$	8.443014
Selisih pusat $O(h^4)$	9.850183

Metode selisih maju maupun mundur tidak memberikan hasil, karena adanya pembagian dengan 0. Maka, untuk penghitungan selanjutnya hampiran selisih-maju dan selisih mundur tidak dapat diaplikasikan dengan data yang tersedia. Dari hasil tersebut terlihat bahwa penghitungan menggunakan hampiran selisih-pusat $O(h^4)$ memberikan hasil yang lebih baik.

B. Penghitungan Nilai g Menggunakan Data yang Dibuat Menggunakan Rumus

Penghitungan kali ini akan menguji metode numerik yang digunakan untuk menghitung nilai *g*. Data yang diambil didapat dari penggunaan persamaan (5) untuk mengetahui nilai sudut untuk sebarang waktu. Nilai – nilai konstanta yang digunakan sama seperti data sebelumnya, yaitu L = 0.4 m dan digunakan salah satu nilai sudut yang cukup kecil, yaitu 15^o. Nilai *g* yang digunakan adalah nilai *g* standar, yakni 9.80665 m/s^2.

Berikut data yang digunakan.

Tabel 4 Data penggunaan persamaan (5) dengan h = 0.1

t (s)	**Sudut (rad)**
0	0.261799388
0.1	0.230357526
0.2	0.143584217
0.3	0.022322248
0.4	-0.104301484
0.5	-0.205872194
0.6	-0.257992788
0.7	-0.248143997
0.8	-0.178691481
0.9	-0.066317606
1	0.061985634
1.1	0.175400041
1.2	0.246683686
1.3	0.25871437
1.4	0.208602347
1.5	0.108384429
1.6	-0.017867225
1.7	-0.139827206
1.8	-0.228200953
1.9	-0.261761258
2	-0.232446998

Berikut hasil yang didapatkan

Tabel 5 Hasil penghitungan nilai g menggunakan data Tabel 4

Metode	**Nilai *g* rata - rata (m/s^2)**	**Beda nilai (*g standar – g hasil perhitungan)***
Selisih pusat $O(h^2)$	9.663040	0.14361
Selisih pusat $O(h^4)$	9.851307	-0.04466
Selisih maju O(h)	9.344089	0.462561
Selisih maju $O(h^2)$	0.099018	9.707632
Selisih mundur O(h)	7.651596	2.155054

Terlihat metode yang paling baik adalah hampiran selisih pusat $O(h^4)$. Selanjutnya diujikan kembali dengan membuat data baru dengan h = 0.01 sebagai berikut.

Tabel 6 Data penggunaan persamaan (5) dengan h = 0.01

t (s)	**Sudut (rad)**
0	0.261799388
0.01	0.261478531
0.02	0.260516749
0.03	0.258916398
0.04	0.256681401
0.05	0.253817236
0.06	0.250330924
0.07	0.246231011
0.08	0.241527546
0.09	0.236232057
0.1	0.230357526
0.11	0.223918351
0.12	0.216930316
0.13	0.20941055
0.14	0.201377485
0.15	0.19285081
0.16	0.183851428
0.17	0.174401396
0.18	0.164523877
0.19	0.154243085
0.2	0.143584217

Berikit hasil yang didapatkan.

Tabel 7 Hasil penghitungan nilai g menggunakan data Tabel 6

Metode	**Nilai *g* rata - rata (m/s^2)**	**Beda nilai (*g standar – g hasil perhitungan)***
Selisih pusat $O(h^2)$	9.887564	-0.80914
Selisih pusat $O(h^4)$	9.890420	-0.08377
Selisih maju O(h)	9.621889	0.184761
Selisih maju $O(h^2)$	0.008265	9.798385
Selisih mundur O(h)	10.201704	-0.39505

Dari hasil diatas terlihat terjadi peningkatan akurasi untuk hampiran selisih mundur. Namun untuk metode lainnya tidak terjadi perubahan yang signifikan.

IV. Kesimpulan

1. Metode yang paling baik untuk mencari nilai percepatan gravitasi pada sistem bandul sederhana adalah hampiran selisih-pusat $O(h^4)$.
2. Hasil yang didapatkan pada data yang didapat dari hasil eksperimen lebih buruk daripada data yang dibuat menggunakan persamaan (5). Hal ini dikarenakan adanya galat pada eksperimen (seperti ketelitian, alat yang digunakan, lingkungan eksperimen, dll) pada [3]
3. Hasil yang lebih buruk juga disebabkan nilai h yang besar dibanding data yang dibuat menggunakan persamaan (5). Nilai h yang kecil tidak dapat dicapai karena tidak diketahuinya besar simpangan (sudut) pada eksperimen untuk waktu – waktu tertentu. Oleh karena itu hanya digunakan waktu pada saat 0, 0.25T, 0.5T, 0.75T, T, dst.

Referensi

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. “Fundamentals of Physics”. 9th edition

[2] R. Munir. “Turunan Numerik”. Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

[3] http://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion diakses pada 2 Mei 2016.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 4 Mei 2016

Khaidzir Muhammad Shahih – 13512068