

Regresi Fungsi Sinus pada Bentuk Lapisan Tanah dalam Borehole Image

Dimas Gilang Saputra (23515027)

Magister Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

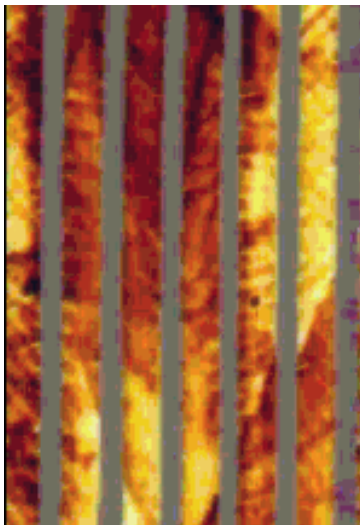
Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

23515027@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Borehole image adalah citra yang dihasilkan dari pencatatan data pada dinding sumur. Citra ini selanjutnya akan diproses dan dianalisis oleh geonalis untuk mendapatkan informasi yang diinginkan. Salah satu yang biasa dianalisis oleh geonalis adalah bentuk lapisan tanah. Pada borehole image, bentuk lapisan tanah ini membentuk kurva sinus. Regresi dapat digunakan untuk mendapatkan fungsi sinus yang mendekati bentuk lapisan tanah ini. Tulisan ini mengkaji salah satu cara melakukan regresi fungsi sinus untuk kasus lapisan tanah pada borehole image.

Keywords—regresi; sinus; lapisan tanah; borehole image

I. BOREHOLE IMAGE



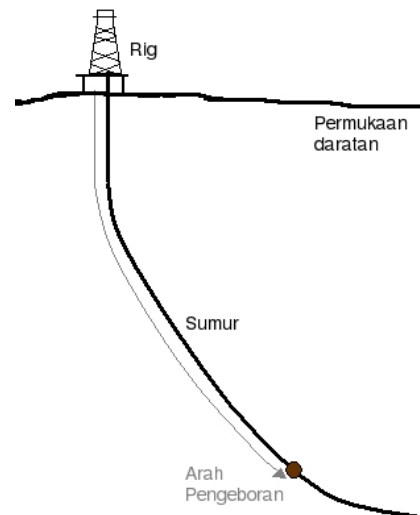
Gambar 1. Contoh borehole image.

Borehole image adalah data yang didapatkan dari pencatatan sekeliling dinding sumur pengeboran minyak atau gas [5]. Data ini bisa didapatkan dengan alat yang memiliki sensor untuk mencatat data dinding sumur. Sensor yang digunakan dapat berupa sensor optik, akustik (suara), listrik, atau gabungannya [6]. Representasi data yang didapat, sesuai dengan nama “borehole image”, adalah citra. Jika menggunakan sensor optik berarti citra yang didapat adalah foto dan jika akustik atau listrik berarti citra yang dihasilkan

adalah representasi dari angka-angka yang didapat oleh sensor menjadi nilai piksel. Contoh borehole image dapat dilihat pada Gambar 1.

Borehole image selanjutnya akan diproses dan dianalisis oleh geonalis untuk didapatkan informasi-informasi yang diinginkan. Beberapa pemrosesan dan analisis yang biasa dilakukan pada borehole image yaitu analisis struktur dan tekstur tanah di sekitar dinding sumur pengeboran pada setiap kedalamannya, geosteering, analisis geometri bentuk sumur, serta dapat digunakan juga untuk keperluan geomekanik.

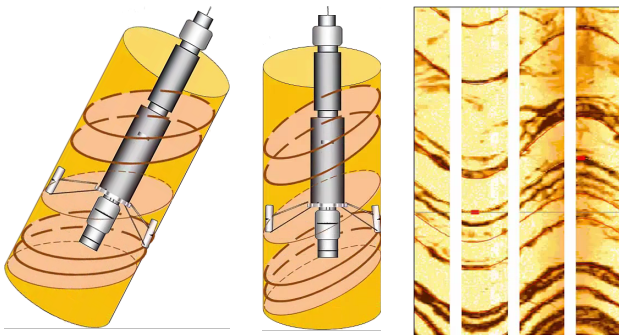
Pengeboran sumur tidak selalu arahnya lurus ke bawah. Sumur dapat dibor miring diagonal atau bahkan sampai horizontal (miring 90° di sumbu vertikal). Sumur juga dapat dibor berbelok-belok sehingga kemiringannya berbeda-beda antara di satu kedalaman dengan kedalaman lain. Arah belok sumur biasanya ditentukan dengan mengukur berapa derajat dari arah utara. Gambar 2 menunjukkan sumur yang dibor berbelok.



Gambar 2. Sumur yang berbelok.

Pencatatan data dinding sumur dilakukan dengan cara memasukkan alat yang memiliki sensor ke dalam sumur dari lubang sumur sampai ke kedalaman yang diinginkan. Ketika

sumur berbelok, maka sensor juga masuk mengikuti kemiringan sumur sehingga data yang ditangkap bukan data yang lurus pada sumbu horizontal. Sehingga, jika sensor menangkap perbedaan lapisan tanah, citra lapisan tanah yang didapatkan akan miring.



Gambar 3. Ilustrasi sumur.

Gambar 3 [4] menunjukkan ilustrasi sumur. Tabung/silinder berwarna kuning menunjukkan sebuah potongan sumur. Dapat dilihat pada gambar sebelah kiri bahwa sumur tersebut miring, tidak lurus ke bawah. Gambar tersebut ditampilkan lurus relatif terhadap lapisan-lapisan tanah yang ditandai oleh lingkaran-lingkaran merah muda. Gambar tengah adalah gambar kiri yang dibuat lurus relatif terhadap kemiringan sumur. Di gambar ini sumur menjadi lurus dalam arah vertikal, namun lapisan tanahnya menjadi miring. Di kedua gambar tersebut terdapat alat yang berwarna abu-abu. Dapat dilihat bahwa alat ini miring mengikuti kemiringan sumur. Kedua sensor yang ada pada alat ini membaca dinding sumur dengan kedalaman yang tidak sama, sensor kanan lebih bawah (lebih dalam) dari sensor kiri. Jika tabung/silinder tersebut dibuka (dibelekan dengan memotong memanjang ke bawah di sebuah sisi), hasilnya adalah borehole image yang bisa dilihat pada gambar kanan. Gambar tersebut adalah hasil pemotongan dari sisi depan silinder (sisi yang menghadap ke pembaca). Di borehole image tersebut terlihat bahwa terdapat gelombang-gelombang yang merupakan lapisan tanah sesuai dengan yang ditangkap sensor.

II. GELOMBANG SINUSOIDAL

Borehole image pada Gambar 3 memperlihatkan gelombang-gelombang permukaan tanah yang membentuk gelombang sinus. Hal ini dapat dimengerti karena satu garis yang mengelilingi tabung akan menghasilkan gelombang sinus jika tabung tersebut dibuka. Gelombang sinus ini, seperti yang dapat dilihat pada borehole image, adalah gelombang sinus satu periode. Garis gelombang, dari paling kiri ke paling kanan, dimulai dari satu titik, lalu bergelombang sesuai dengan gelombang sinus, lalu selesai di titik yang sama. Dalam kasus sumur pengeboran ini, titik yang dimaksud adalah kedalaman.

Gambar 4 memperlihatkan grafik gelombang sinusoidal satu periode dalam fungsi

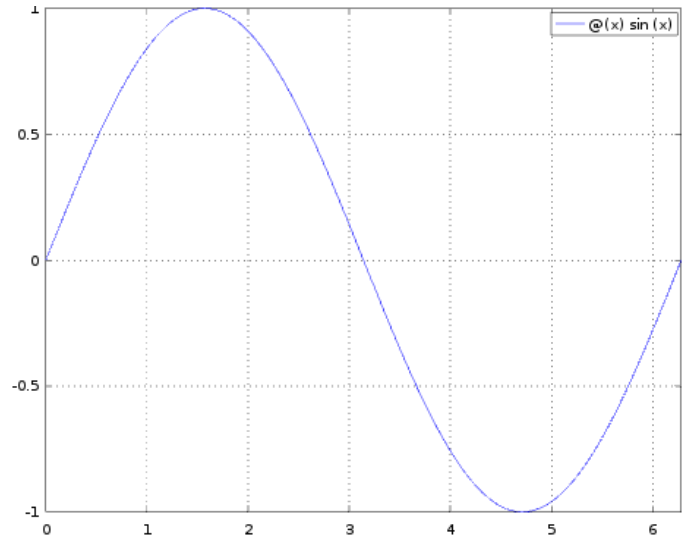
$$y = \sin(x) \quad (1)$$

Untuk fungsi sinus pada lapisan tanah di borehole image, yang menjadi y adalah kedalaman dan yang menjadi x adalah posisi pada silinder.

Formula fungsi sinus yang general adalah [7]

$$y = a + b \sin(cx + d) \quad (2)$$

a merupakan rata-rata nilai y pada gelombang (bisa dianggap sebagai tengah gelombang), b menentukan amplitudo (ketinggian/kedalaman) gelombang sinus, c menentukan panjang gelombang, dan d adalah fase atau *shift* gelombang. Pada formula (1), nilai a adalah 0, bisa dilihat pada grafik bahwa titik tengah berada di $y = 0$, nilai b adalah 1 yang bisa dilihat pada grafik bahwa amplitudonya 1 (y maksimum 1 dan y minimum -1), nilai c adalah 1 dan pada grafik terlihat bahwa panjang gelombang satu periode adalah 2π , dan nilai d adalah 0 yang bisa dilihat pada grafik tidak ada *shifting* pada gelombang (tepat pada $x = 0$ dan $x = \pi$ nilai y berada di 0, serta $x = \pi/2$ dan $x = 3\pi/2$ nilai y berada di maksimum dan minimum).



Gambar 4. Grafik fungsi sinusoidal.

Perlu diperhatikan bahwa panjang gelombang ditentukan oleh c dan c bergantung pada π . Penentuan nilai c untuk gelombang sinus satu periode, jika diketahui panjang gelombang l , dapat dihitung dengan fungsi

$$c = \frac{2\pi}{l} \quad (3)$$

Pada borehole image, nilai l tetap, bisa ditentukan dari lebar gambar, sehingga nilai c dapat langsung diketahui. Oleh karena itu x bisa diganti dengan $X = cx$ sehingga formula sinus pada (2) berubah menjadi

$$y = a + b \sin(X + d) \quad (4)$$

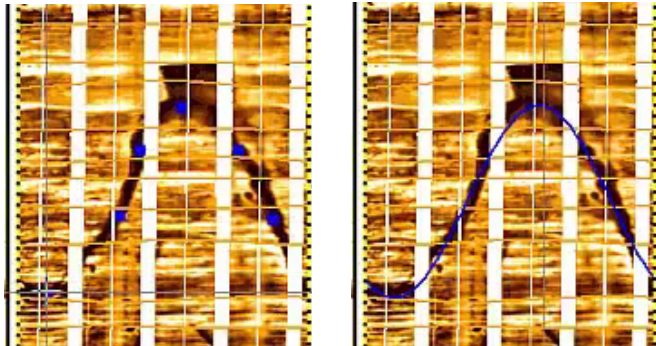
Artinya, yang menentukan fungsi grafik sinus lapisan tanah hanya a , b , dan d .

III. DIP PICKING

Geonalisis akan memerlukan fungsi sinus yang merpresentasikan gelombang masing-masing lapisan tanah karena dapat memberikan informasi mengenai kemiringan sumur dan arah kemiringannya. Dengan menggunakan beberapa perangkat lunak yang ada sekarang, biasanya geonalisis melakukan *dip picking* terlebih dahulu lalu perangkat lunak menghitung fungsi sinus yang sesuai. *Dip picking* adalah kegiatan memberi titik-titik yang merepresentasikan nilai y dari fungsi sinus lapisan tanah. Titik-

titik ini merupakan acuan penentuan grafik sinus yang sesuai. [5]

Gambar 5 [4] memperlihatkan dip picking titik-titik biru yang diperlihatkan di gambar kiri menjadi garis sinus biru pada gambar kanan. Dapat dilihat bahwa garis tidak tepat melewati posisi semua titik. Itu artinya, garis didapat dari fungsi sinus hampiran yang dibuat sedekat mungkin dengan titik-titik *dip picking* yang diberikan oleh geonalis.



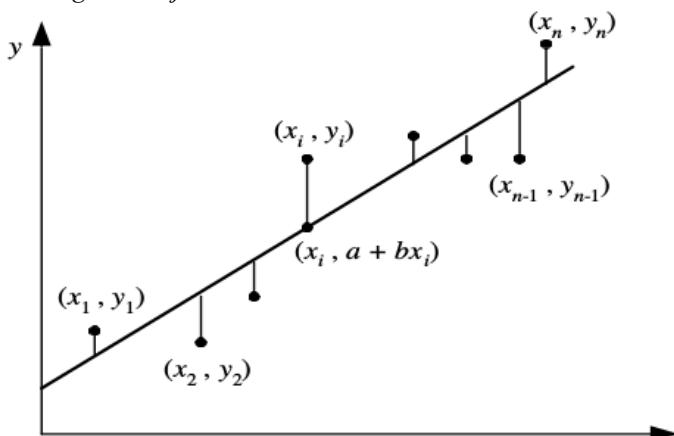
Gambar 5. Dip picking.

Perlu diperhatikan bahwa dalam proses tersebut ukuran yang digunakan adalah posisi piksel pada citra. Panjang gelombang sinus bergantung pada lebar citra borehole image. Posisi titik-titik *dip picking* merupakan posisi pixel yang relatif terhadap ukuran citra. Oleh karena itu, nilai x , y , dan l yang digunakan untuk fungsi sinus adalah posisi dan ukuran piksel relatif terhadap citra.

IV. REGRESI

Regresi adalah teknik pencocokan kurva untuk data yang berketelitian rendah [3]. Regresi cocok digunakan untuk menentukan fungsi sinus dari *dip picking* geonalis karena fungsi sinus dapat didekati dengan pencocokan kurva dan ketelitian titik-titik yang diberikan geonalis tingkat ketelitiannya rendah. Kurva fungsi hampiran tidak perlu melalui semua titik data, namun harus sedekat mungkin dengannya, sesuai dengan yang ditunjukkan pada Gambar 6 [3].

A. Regresi Lanjar



Gambar 6. Regresi lanjar.

Jika kurva yang akan dihampiri adalah fungsi lanjar, maka itu penghampirannya disebut regresi lanjar. Gambar 6

menunjukkan regresi lanjar dari titik-titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Garis diagonal menunjukkan kurva fungsi hampirannya. Garis vertikal pada tiap titik-titik data menunjukkan perbedaan antara nilai sebenarnya dengan nilai yang didapat dari fungsi hampiran. Perbedaan ini adalah galat. Jika e_i adalah galat untuk x_i , maka nilai data sebenarnya $g(x_i)$ dapat ditulis sebagai

$$g(x_i) = y_i + e_i \quad (5)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Target dari regresi adalah fungsi lanjar

$$f(x) = a + bx \quad (6)$$

yang mencocokkan data sedemikian sehingga deviasi

$$r_i = y_i - f(x_i) = y_i - (a + bx_i) \quad (7)$$

minimum. Total kuadrat dari (7) adalah

$$R = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (8)$$

dan agar R minimum, maka haruslah

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (10)$$

Penyelesaian dari (9) dan (10) adalah pertama-tama, masing-masing ruas kedua persamaan dibagi dengan -2 menjadi

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a - \sum_{i=1}^n bx_i = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n a x_i - \sum_{i=1}^n bx_i^2 = 0 \quad (12)$$

Selanjutnya,

$$\sum_{i=1}^n a - \sum_{i=1}^n bx_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n a x_i - \sum_{i=1}^n bx_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (14)$$

atau,

$$na - b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (15)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (16)$$

Kedua persamaan (15) dan (16) dinamakan persamaan normal dan dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

Persamaan ini bisa diselesaikan dengan metode solusi sistem persamaan linier seperti eliminasi Gauss [1].

B. Regresi Sinus

Fungsi yang dihipotesiskan untuk lapisan tanah adalah fungsi sinus yang bukan fungsi linier. Untuk melakukan regresi pada kurva fungsi sinus, terdapat beberapa metode.

Salah satu metodenya yaitu dengan menggunakan metode Gauss-Newton [1]. Metode ini melakukan iterasi terus menerus dengan aturan *update* nilai parameter a , b , dan d sedemikian sehingga galat pada setiap iterasi makin kecil sampai mendekati nilai sebenarnya. Metode ini dirasa kurang mangkus karena perlu banyak melakukan iterasi untuk mendapat fungsi hampiran yang diinginkan.

Selain metode di atas, terdapat metode lain yang fungsinya langsung didapatkan tanpa melakukan iterasi. Metode ini menggunakan persamaan integral sehingga itu mungkin dilakukan [2]. Ada juga metode lain yaitu dengan menggunakan identitas fungsi sinus [7]

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (18)$$

sehingga (2) bisa diubah menjadi

$$y = a + b \sin(cx) \cos(d) + b \cos(cx) \sin(d) \quad (19)$$

Kedua metode tersebut mengubah fungsi nirlinier sinus menjadi linier, lalu menyelesaikannya dengan cara linier seperti yang telah dijelaskan pada IV.A. Metode-metode ini dapat digunakan untuk mendapatkan fungsi hampiran yang diinginkan, namun terlalu kompleks untuk kasus borehole image. Perlu diingat bahwa pada fungsi sinus untuk lapisan tanah bukanlah fungsi sinus general. Fungsi sinus untuk lapisan tanah memiliki periode yang pasti, yaitu satu periode, sehingga c telah diketahui dan bernilai pasti. Oleh karena itu, seharusnya hampiran fungsi sinus untuk lapisan tanah tidak perlu mengikutsertakan c dan memudahkan penghampiran fungsi.

Tinjau kembali persamaan (4). Fungsi sin menerima $X+d$. Dengan mengacu pada salah satu dari titik tertinggi atau titik terendah kurva, d bisa diketahui. Oleh karena itu, asumsi yang digunakan adalah salah satu titik *dip picking* adalah titik tertinggi atau terendah. Dari titik tertinggi $t = (x_i, y_i)$, maka

$$d = \frac{\pi}{2} \left(1 - 4 \frac{x_i}{l}\right) \quad (20)$$

dengan x_i adalah posisi titik terhadap sumbu horizontal dari posisi paling kiri citra dan l adalah lebar citra. Sehingga (4) bisa diubah menjadi

$$y = a + b \sin(k) \quad (21)$$

dengan $k = X+d$.

Pada aplikasinya, lebih baik titik tertinggi dan titik terendah masing-masing digunakan untuk menghasilkan dua fungsi hampiran. Dari kedua fungsi tersebut, pilih salah satu yang menghasilkan galat lebih kecil.

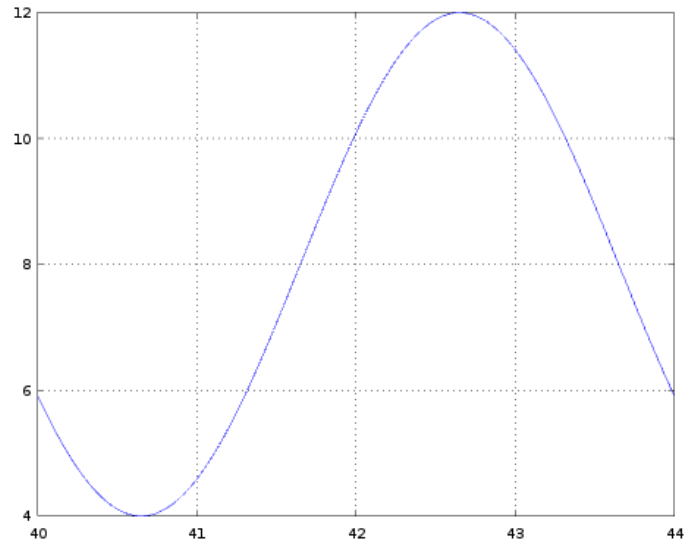
Perhatikan bahwa (21) telah menjadi persamaan linier seperti pada (6). Oleh karena itu, fungsi hampiran (21) dapat dihipotesiskan menggunakan matriks persamaan (17) dengan mensubstitusi x dengan $\sin(k)$.

$$\begin{bmatrix} n & \sum \sin(k_i) \\ \sum \sin(k_i) & \sum \sin(k_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \sin(k_i) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Setelah matriks tersebut diselesaikan, fungsi sinus hampiran regresi dihasilkan.

V. CONTOH

Misalkan terdapat kurva lapisan tanah seperti pada Gambar 7 dan ingin diketahui fungsi sinus hampirannya.



Gambar 7. Contoh kasus.

Gambar 7 menunjukkan bahwa $l = 44 - 40 = 4$. Oleh karena itu c bisa langsung diketahui bahwa $c = 2\pi/4 = \pi/2$.

x_i	y_i
40	5.8239
41	4.6437
42.64	12
43	11.356
44	5.8239

Tabel 1. Contoh dip picking.

k_i	$\sin(k_i)$	$\sin(k_i)^2$	y_i	$y_i \sin(k_i)$
60.2400	-0.5225	0.2730	5.8239	-3.0430
61.8108	-0.8526	0.7270	4.6437	-3.9594
64.3869	0.9999	0.9998	12	11.9985
64.9524	0.8526	0.7270	11.356	9.6826
66.5232	-0.5225	0.2730	5.8239	-3.0430
Σ	-0.0451	2.9998	39.6475	11.6357

Tabel 2.

Lalu, geonalisis melakukan *dip picking* dan didapat titik-titik sebagaimana pada Tabel 1. Dari titik-titik tersebut diketahui bahwa titik tertinggi adalah $y_i = 12$ yang berada kira-kira di $x_i = 42.64$. Oleh karena itu, d bisa langsung diketahui dari $d = \pi/2 (1 - 4((42.64)/4)) = -2.5918$.

Selanjutnya k serta sinus dari k dan kuadratnya dapat diketahui dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2. Dari situ dapat dibentuk matriks persamaan

$$\begin{bmatrix} 5 & -0.0451 \\ -0.0451 & 2.9998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.6475 \\ 11.6357 \end{bmatrix} \quad (23)$$

dan dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss sehingga dihasilkan

$$a = 7.9656$$

$$b = 3.9987$$

dan fungsi hampirannya adalah

$$f(x) = 7.9656 + 3.9987 \sin(x \pi/2 - 2.5918)$$

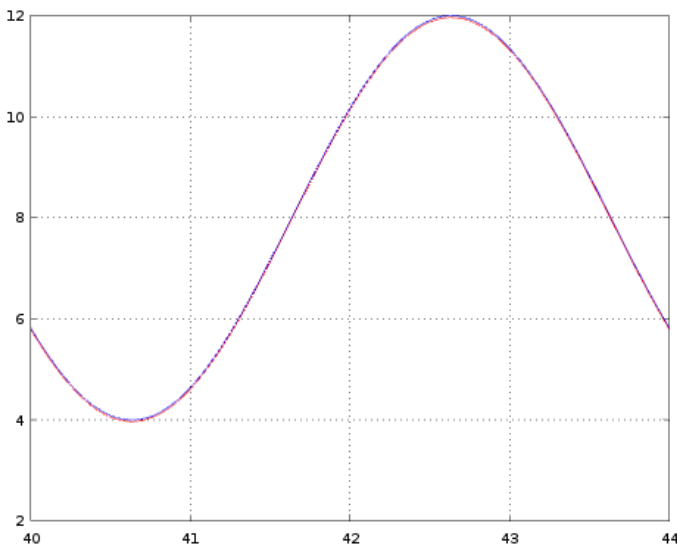
Fungsi hampiran ini mendekati fungsi aslinya yang memiliki parameter

$$a = 8$$

$$b = 4$$

$$d = 10$$

Plot fungsi hampiran ini disandingkan dengan fungsi sebenarnya dapat dilihat pada Gambar 8. Fungsi hampiran ditandai dengan kurva berwarna merah dan fungsi sebenarnya ditandai dengan kurva berwarna biru. Karena sangat dekat, warna kedua kurva bercampur menjadi ungu.



Gambar 8. Sandingan fungsi hampiran dengan fungsi sebenarnya.

VI. PENGHITUNGAN GALAT

Perbedaan antara parameter fungsi hampiran dengan fungsi sebenarnya menghasilkan galat. Untuk menentukan seberapa bagus fungsi hampiran, dapat diukur dengan menghitung galatnya menggunakan galat RMS (*root-mean-square error*).

$$E_{RMS} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Sebagai ilustrasi, tabel galat pada contoh sebelumnya yang menggunakan fungsi hampiran dapat dilihat pada Tabel 3. Galat RMS dari fungsi hampiran tersebut adalah $E_{RMS} = (0.0059013/5)^{\frac{1}{2}} = 0.034355$.

x_i	y_i	$f(x_i)$	deviasi	deviasi ²
40	5.8239	5.7902	0.033700	0.0011357
41	4.6437	4.6104	0.033300	0.0011089
42.64	12	11.964	0.036000	0.0012960
43	11.356	11.321	0.035000	0.0012250
44	5.8239	5.7902	0.033700	0.0011357
			Σ	0.0059013

Tabel 3. Tabel galat.

VII. KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dijelaskan kemungkinan bentuk lapisan tanah yang tergambar pada borehole image. Lapisan tanah yang membentuk kurva sinus lalu dikaji lebih lanjut karakteristiknya dan diketahui bahwa gelombang sinus dari lapisan tanah tersebut adalah gelombang sinus satu periode.

Pengetahuan bahwa gelombang sinus ini satu periode, panjang gelombang telah diketahui dan tetap, dan asumsi cara *dip picking* yang dilakukan oleh geoanalis, yaitu geoanalis selalu menempatkan titik paling tidak di salah satu antara titik tertinggi dan titik terendah, fungsi sinus yang akan didekati bisa dibuat lebih sederhana daripada fungsi sinus general. Penurunan persamaan telah dijelaskan pada tulisan ini dan hasilnya regresi bisa dilakukan dengan cara regresi linier.

Setelah itu, seberapa bagus fungsi hampiran dengan fungsi sebenarnya telah dijelaskan dengan menggunakan galat RMS. Dari contoh dapat dilihat bahwa fungsi sinus yang telah dihipotesis memiliki galat yang cukup kecil dan dalam grafik terlihat kurva fungsi hampiran cukup dekat dengan grafik kurva sebenarnya.

Dari penurunan rumus, dapat diketahui bahwa titik tertinggi atau titik terendah yang ditentukan oleh geoanalis melalui *dip picking* sangat menentukan fungsi hampiran. Oleh karena itu, lebih baik kedua titik ekstrim tersebut masing-masing digunakan untuk mendapatkan fungsi hampiran lalu dipilih satu fungsi yang memiliki galat lebih kecil. Karena fungsi sinus hanya memiliki dua titik ekstrim, tertinggi dan terendah, maka hanya kedua titik itu yang dapat digunakan sebagai bekal alternatif fungsi hampiran. Dengan kata lain, hanya ada dua alternatif.

REFERENSI

- [1] S. Chapra, Applied Numerical Methods with Matlab, 3rd ed, McGraw-Hill, 2011.
- [2] J. Jacquelin, "Regression Sinusoidale", di Regression et Equations Integrales, 2014.
- [3] R. Munir, Metode Numerik, Revisi Ketiga, Penerbit Informatika, 2013.
- [4] Paradigm, "Making the Most of Borehole Images" (Video), https://youtu.be/_pZC9tCASVU diakses tanggal 27 Maret 2016.
- [5] PetroWiki, "Borehole Imaging", http://petrowiki.org/Borehole_imaging diakses tanggal 27 Maret 2016.
- [6] S. Prenskey, "Advances in Borehole Imaging Technology and Applications", di Borehole Imaging: Applications and Case Histories, 1999.
- [7] N. Schaumberger, A Classroom Theorem on Trigonometric Irrationalities, Two-Year College Math, 1974.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 4 Mei 2016

Dimas Gilang Saputra

23515027