Perbandingan Beberapa Metode Numerik dalam Menghitung Nilai Pi

Aditya Agung Putra (13510010)[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13510010@std.stei.itb.ac.id

Abstrak- Makalah ini membahas hasil perbandingan beberapa metode numerik dalam menghitung hampiran dari nilai pi. Nilai pi sendiri pada dasarnya adalah luas lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Dalam makalah ini, penentuan nilai pi akan ditentukan melalui metode pencarian akar persamaan secara terbuka dan memanfaatkan integrasi numerik. Setelah kita mendapatkan bermacam-macam nilai pi tersebut, yang akan diamati adalah galat hitung dari setiap metode. Dengan begitu kita bisa mengetahui metode mana menghasilkan nilai pi yang lebih akurat.

Kata kunci: Pi, Newton Raphson, integral, Riemann Tengah, Metode Trapesium, Kaidah Simpson, galat

I. Pendahuluan

Dalam menyelesaikan persoalan matematika terdapat dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Dalam metode analitik, kita mengandalkan teorema dan rumus yang sudah baku dalam pelajaran matematika. Contohnya, menyelesaikan persamaan kuadrat dengan rumus $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Solusi yang didapatkan dari metode analitik tentunya berupa jawaban yang eksak. Berbeda dengan metode numerik yang menggunakan pendekatan aproksimasi dan operasi aritmatika dasar dalam pengerjaannya. Walaupun begitu, metode numerik ampuh dalam menyelesaikan persoalan aritmatika yang rumit. Dalam implementasinya, metode numerik disusun berupa algoritma yang terprogram dengan banyak perulangan. Mencari hasil penyelesaian suatu persamaan dan nilai integral tentu termasuk persoalan yang dapat diselesaikan secara numerik terutama saat fungsi yang terlibat sulit untuk dicari akarnya atau diintegrasikan. Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik adalah mencari nilai terdekat dari bilangan-bilangan irrasional seperti $\sqrt{5}$, π, dan e. Langkah awal yang dapat dilakukan dalam mencari nilai-nilai tersebut adalah dengan menyusun persamaan yang memiliki akar berupa nilai-nilai tersebut atau menyelesaikan deret yang jumlahnya konvergen ke angka-angka tersebut.

II. Teori Dasar

A. Metode Newton-Raphson pada Solusi Persamaan Nirlanjar

Dalam mencari penyelesaian pada suatu persamaan nirlanjar, secara garis besar terdapat dua metode. Pertama adalah metode tertutup yang mencari akar suatu persamaan pada selang yang terus menerus diperkecil. Kedua, metode terbuka dimana akar persamaan langsung ditebak dan tebakan senantiasa diperbaharui hingga dekat dengan solusi seharusnya. Pada metode terbuka ini, tidak dibutuhkan selang tempat akar berada. Pada metode terbuka, terdapat metode yang sudah lumayan terkenal dalam mencari akar suatu persamaan nirlanjar, yakni metode Newton-Raphson.

Metode ini dapat diturunkan melalui deret Taylor hingga suku ke-2 sebagai berikut:

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r) f'(x_r)$$

karena $f(x_{r+1}) = 0$, maka persamaan di atas dapat dinyatakan dengan

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \ f'(x_r) \neq 0$$

dengan demikian, kita perlu menghitung turunan dari fungsi yang akan diselesaikan. Pencarian akar ini dihentikan bilamana $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$.

B. Integral Tentu

Konsep integral tentu digunakan untuk merepresentasikan luas daerah dibawah kurva. Secara umum $\int_a^b f(x)dx$ berarti luas daerah yang dibatasi kurva $f(x)$, sumbu-x, dan garis $x=a$ dan $x=b$. Tidak semua fungsi dapat dihitung integralnya. Syarat agar $f(x)$ dapat dihitung integralnya pada interval $[a,b]$ adalah f kontinu pada selang $[a,b]$.

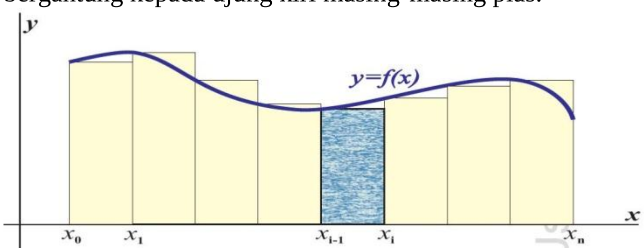
Secara analitik, jika F adalah anti-turunan dari f maka berlaku $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (teorema dasar kalkulus II). Namun dalam konteks luas daerah, integral tersebut dapat dihitung dengan membagi daerah dibawah kurva secara parsial berdasarkan lebar tertentu. Inilah bagian dari integrasi numerik yang akan dibahas pada bagian berikutnya.

C. Integrasi Numerik

Banyak bentuk integral yang tidak dapat diselesaikan dengan teorema dasar kalkulus II. Dalam menyelesaikannya, metode integrasi numerik lah yang diperlukan. Seperti yang sudah dipelajari di kuliah Kalkulus, setidaknya terdapat tiga metode numerik yang dapat digunakan dalam menghitung integral tentu yaitu Penjumlahan Riemann, Aturan Trapesium, dan Aturan Parabola. Metode penjumlahan Riemann dan aturan trapesium diklasifikasikan kedalam metode pias, yaitu daerah integrasi dibagi kedalam pias-pias (strip) kecil dan luasnya dihitung dengan menghampiri jumlah luas semua pias. Sedangkan aturan parabola termasuk kedalam metode Newton-Cotes yang membagi kurva integrasi menjadi beberapa polinom interpolasi dan integrasinya dilakukan terhadap polinom tersebut.

1. Metode Penjumlahan Riemann

Metode penjumlahan Riemann, atau biasa disebut kaidah segiempat kembali terbagi kedalam penjumlahan Riemann kiri, Riemann kanan, dan Riemann tengah. Pada penjumlahan Riemann kiri, daerah integrasi terbagi kedalam beberapa pias dimana panjang setiap pias bergantung kepada ujung kiri masing-masing pias.

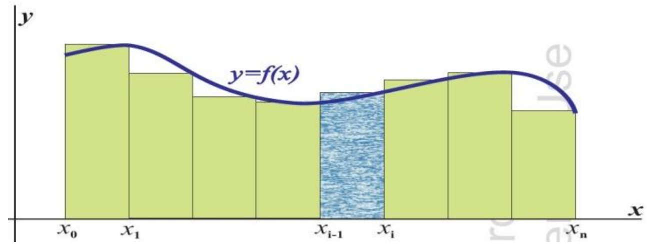


Gambar 2.1 Ilustrasi Metode Penjumlahan Riemann Kiri

Seperti diilustrasikan pada gambar diatas, lebar setiap pias adalah sama dan tinggi pias ke-*i* merupakan $f(x_{i-1})$. Jadi, jika daerah diatas terbagi kedalam *n* pias, dimana lebar tiap-tiap pias adalah $\frac{b-a}{n}$ maka hampiran luas dibawah kurva adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$$

Untuk penjumlahan Riemann kanan, lebar tiap pias bergantung pada ujung kanan masing-masing partisi. Seperti diilustrasikan pada gambar berikut

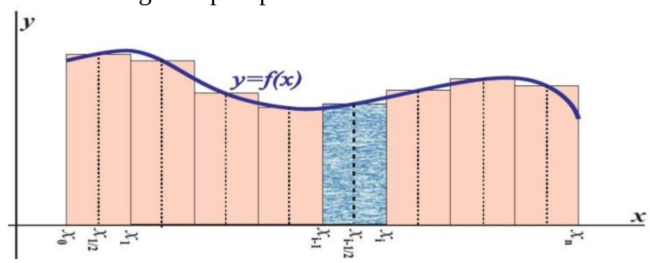


Gambar 2.2 Ilustrasi Metode Penjumlahan Riemann Kanan

hampiran luas dibawah kurva adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$$

Penjumlahan Riemann tengah merupakan bentuk penjumlahan Riemann yang menghasilkan hampiran terbaik. Lebar tiap pias pada metode ini adalah nilai fungsi dari titik tengah tiap-tiap sub-interval.



Gambar 2.3 Ilustrasi Metode Penjumlahan Riemann Tengah

Hampiran luas berdasarkan gambar diatas adalah

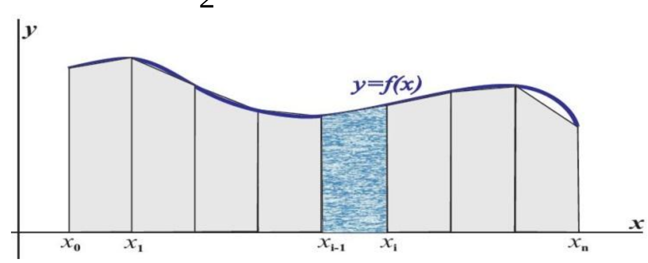
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_{1/2})+f(x_{3/2})+\ldots+f(x_{n-1/2})\right)$$

2. Aturan Trapesium

Pada aturan trapesium, pias-pias yang terbentuk didekati luasnya melalui luas trapesium. Trapesium yang terbentuk memiliki panjang sisi sejajar berupa kedua nilai fungsi pada ujung sub-interval. Kedua titik ujung sub-interval tersbeut dihubungkan oleh garis lurus sehingga membentuk trapesium.

Luas suatu trapesium dengan panjang dua sisi sejajarnya adalah *a* dan *b* dan memiliki tinggi *h* yaitu $\frac{a+b}{2}h$. Sehingga berdasarkan ilustrasi dibawah, luas setiap pias dapat dihitung sebagai

$$A_i = \frac{h}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))$$



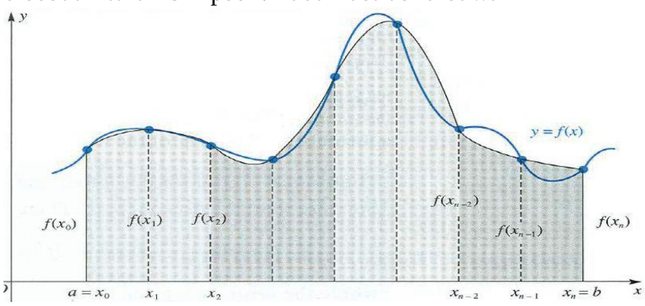
Gambar 2.4 Ilustrasi Aturan Trapesium

Hampiran luas dibawah kurva pun dihitung sebagai

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+f(x_n))$$

3. Aturan Parabola

Berbeda dengan aturan trapesium, pada aturan ini titik-titik ujung pada pias didekati dengan segmen parabola. Pada aturan ini, daerah integrasi dibagi-bagi kedalam sebanyak genap pias. Dekati masing-masing tiga titik terdekat dengan suatu parabola lalu hitung integrasi dari masing-masing parabola. Metode ini juga berikutnya disebut Aturan Simpson. Pada ilustrasi dibawah



Gambar 2.5 Ilustrasi Aturan Parabola

dapat dihitung hampiran untuk satu parabola adalah (diturunkan dari interpolasi polinom)

$$A = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Hampiran luas daerah integrasi pun dapat dituliskan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$

4. Analisis Galat

Untuk setiap metode diatas, berikut adalah aproksimasi galat yang didapat dimana *c* adalah suatu nilai pada interval integrasi

Tabel 2.1 Perkiraan galat dari semua metode yang dibahas

Metode	Galat
Riemann Kiri	$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$
Riemann Kanan	$E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$
Riemann Tengah	$E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$
Aturan Trapesium	$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$
Aturan Simpson	$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$

III. Pembahasan

A. Penentuan Nilai Pi oleh Metode Newton Raphson

Nilai pi merupakan luas lingkaran dengan jari-jari 1 yang lebih kecil dari 4 (luas suatu persegi dengan panjang sisi 2 satuan). Pi juga dapat ditentukan, yaitu sudut dalam radian dimana nilai sinusnya sama dengan 0. Oleh karena itu, dalam mencari nilai pi, kita dapat menggunakan persamaan $\sin x = 0$ dengan tebakan awal yakni $x = 4$. Perlu diketahui juga bahwa turunan fungsi sinus adalah $y' = \cos x$.

Dalam menentukan nilai *x* dari persamaan tersebut, digunakan *source code* bahasa Fortran 90 sebagai berikut dengan asumsi galat 10^{-10}.

```
SUBROUTINE newtonraphson(x)
      IMPLICIT NONE

      DOUBLE PRECISION, INTENT(IN):: x
      DOUBLE PRECISION                ::
xn,eks
      INTEGER
            :: putar = 0
      eks = x
      WRITE(*,*) 'Tabel lelaran metode
Newton-Raphson: '
      DO
            xn = eks
            eks = eks -
(sin(eks)/cos(eks))
            WRITE(*,'(i5,a,f12.10)')
putar,'      |',xn
            putar = putar + 1
            IF (ABS(eks-xn) <
0.0000000001) THEN
                  EXIT
            END IF
      END DO
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Nilai pi
menurut metode Newton Raphson = ',eks
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Galat :
',ABS(eks-4*ATAN(1.D0));
   END SUBROUTINE newtonraphson
```

B. Penentuan Nilai Pi oleh Integrasi Numerik

Nilai pi didapat dari hitungan luas satu lingkaran penuh berjari-jari 1 satuan. Lingkaran satuan ini dapat digambarkan dengan kurva $x^2 + y^2 = 1$. Oleh sebab itu luasnya, pi dapat dinyatakan sebagai $\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Angka 2 disana menyatakan banyaknya setengah lingkaran yang merupakan representasi kurva $y = \sqrt{1-x^2}$ (keduanya dibatasi sumbu-*y*).

Dalam makalah ini, akan dibahas penghitungan nilai pi hanya menggunakan metode Riemann tengah, aturan trapesium, dan aturan Simpson. Metode Riemann kiri dan kanan tidak dibahas karena Riemann tengah (titik tengah) sudah memberikan aproksimasi yang lebih baik disbanding keduanya.

Berikut adalah *source code* prosedur penghitung integrasi dalam ketiga metode dalam bahasa Fortran 90

```
SUBROUTINE titiktengah(pias)
      IMPLICIT NONE

      INTEGER, INTENT(IN)      :: pias
    DOUBLE PRECISION     :: 
panjang,x,res,total
    INTEGER                    :: putar

      panjang = 2.0D0/pias
    x = -1 + panjang/2.0D0
      total = 0
    DO putar = 1, pias
            total = total + fungsi(x)
        x = x + panjang
    END DO
    res = total * panjang
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Nilai pi 
menurut metode Titik Tengah = ',res
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Galat : 
',ABS(res-4*ATAN(1.D0));
END SUBROUTINE titiktengah

SUBROUTINE trapezoid(pias)
      IMPLICIT NONE

      INTEGER, INTENT(IN)      :: pias
      DOUBLE PRECISION  :: panjang, x, 
res, total
      INTEGER                        :: 
putar

      panjang = 2.0D0/pias
      x = -1
      total = 
fungsi(x)+fungsi(x+panjang)
      DO putar = 1, pias-1
            x = x + panjang
            total = total + fungsi(x) + 
fungsi(x+panjang)
      END DO
      res = total*panjang/2.0D0
      write(*,'(a,f12.10)') 'Nilai pi 
menurut metode trapesium = ',res
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Galat : 
',ABS(res-4*ATAN(1.D0));
END SUBROUTINE trapezoid

SUBROUTINE simpson(pias)
      IMPLICIT NONE
```

```
      INTEGER, INTENT(IN)      :: pias
      DOUBLE PRECISION  :: panjang, x, 
res, total
      INTEGER                        :: 
putar

      panjang = 2.0D0/pias
      x = -1
      total = fungsi(x)+fungsi(x+2.0D0)
      DO putar = 1, pias-1
            x = x + panjang
            IF (MOD(putar,2) .EQ. 0) 
THEN
                  total = total + 
2.0D0*fungsi(x)
          ELSE
            total = total + 
4.0D0*fungsi(x)
            END IF
      END DO
      res = total*panjang/3.0D0
      write(*,'(a,f12.10)') 'Nilai pi 
menurut metode Simpson = ',res
      WRITE(*,'(a,f12.10)') 'Galat : 
',ABS(res-4*ATAN(1.D0));
   END SUBROUTINE simpson
```

Terlihat bahwa masing-masing fungsi penghitung memiliki parameter banyak pias yang diinginkan dalam partisi (*pias*). Pada ketiga prosedur, diasumsikan integrasi selalu berada pada selang [-1,1]. Berikutnya pula dilakukan iterasi untuk menghitung luas pias-pias berdasarkan karakteristik masing-masing metode.

Fungsi terintegrasi yang akan dihitung pada program dituliskan sebagai

```
   DOUBLE PRECISION FUNCTION fungsi(x)
      IMPLICIT NONE

      DOUBLE PRECISION, INTENT(IN)   ::x
      fungsi = 2*sqrt(1-(x*x))
   END FUNCTION fungsi
```

C. Hasil Pengujian dan Analisis

Pada program utama, banyak pias yang diinginkan pada partisi adalah 5000. Pada program utama pula dituliskan hasil evaluasi numerik dengan keempat cara diatas dan dibandingkan dengan nilai pi sebenarnya sebanyak 10 digit dibelakang koma. Nilai pi yang sebenarnya dapat didekati dengan ekspresi $\pi = 4\arctan 1$. Dengan demikian, badan dari program utama adalah sebagai berikut:

```
CALL newtonraphson(4.0D0)
CALL titiktengah(5000)
CALL trapezoid(5000)
CALL simpson(5000)
```

```
    WRITE(*,'(a,f12.10)')'Nilai  pi  yang
sebenarnya : ',4*ATAN(1.D0)
```

Hasil dari program ditunjukkan sebagai berikut:

```
Tabel lelaran metode Newton-Raphson:
    0    |4.0000000000
    1    |2.8421787177
    2    |3.1508729397
    3    |3.1415923872
    4    |3.1415926536
Nilai pi menurut metode Newton Raphson =
3.1415926536
Galat : 0.0000000000
Nilai pi menurut metode Titik Tengah =
3.1415954090
Galat : 0.0000027554
Nilai pi menurut metode trapesium =
3.1415832460
Galat : 0.0000094076
Nilai pi menurut metode Simpson =
3.1415889795
Galat : 0.0000036741
Nilai pi yang sebenarnya : 3.1415926536
```

Terlihat bahwa galat terkecil dihasilkan oleh metode Newton Raphson, yaitu sebanyak 0. Hal ini wajar karena galat yang diharapkan memang lebih kecil dari 10^{-10}. Namun tetap ada hal menarik yang dapat dilihat disini yakni dalam menghitung nilai pi yang paling akurat, cukup dilakukan 4 kali iterasi saja.

Sekarang, kita lihat hasil integrasi menggunakan ketiga metode integrasi. Galat integrasi dituliskan pada tabel dibawah ini

Tabel 3.1 Galat integrasi ketiga metode

Metode	Galat di program
Riemann tengah	$2{,}7554\times10^{-6}$
Trapesium	$9{,}4076\times10^{-6}$
Simpson	$3{,}6741\times10^{-6}$

Fungsi yang digunakan pada integrasi adalah $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ dan turunannya hingga turunan keempat dihitung sebagai

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{6x}{(1-x^2)^{5/2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24x^2+6}{(1-x^2)^{7/2}}$$

Maka, galat metode Riemann tengah menurut Tabel 2.1 dengan *b*=1, *a*=-1, dan *n*=5000 adalah

$$E_n = \frac{f''(c)}{24\times5000^2} = 1{,}33\times10^{-8} f''(c)$$

Nilai $f''(c)$ sendiri berkisar diantara -1 dan bilangan negatif yang sangat besar yang dapat disebabkan oleh nilai $1-x^2$ yang sangat mendekati 0. Oleh karena itu galatnya berkisar dari $-\infty$ hingga $-1{,}33\times10^{-8}$. Ternyata, galat yang dicatat program memang berada pada rentang tersebut.

Begitu juga dengan galat dari metode trapesium yaitu

$$E_n = -\frac{f''(c)}{12\times5000^2} = -2{,}67\times10^{-8} f''(c)$$

sehingga kisaran galat seharusnya adalah $2{,}67\times10^{-8}$ dan ∞. Galat yang ditunjukkan program kembali menempati interval tersebut.

Sedangkan untuk galat dari metode Simpson yaitu

$$E_n = -\frac{f^{(4)}(c)}{180\times5000^4} = -7{,}11\times10^{-9} f^{(4)}(c)$$

Nilai turunan tersebut memiliki nilai maksimum -3 dan minimum $-\infty$. Sehingga galatnya berkisar dari $7{,}11\times10^{-9}$ hingga ∞. Lagi-lagi galat yang ditunjukkan program pun termasuk di interval tersebut.

Menurut teori, aturan Simpson akan memberikan hasil integrasi paling akurat dengan menyisakan galat terkecil berdasarkan rumus galatnya. Tetapi pada program yang dibuat, ternyata aturan Riemann (titik) tengah yang memberikan galat terkecil. Hal ini disebabkan jenis fungsi yang menjadi faktor penentu besarnya galat itu pula.

IV. Kesimpulan

Dari uraian sebelumnya mengenai perbandingan penghitungan nilai pi oleh keempat metode numerik yang digunakan kita dapat menarik beberapa kesimpulan, diantaranya adalah:

1. Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan matematika saat persoalan tersebut sudah sulit untuk diselesaikan secara analitik.
2. Nilai pi dapat dihitung dengan pencarian nilai sinus dan pencarian luas lingkaran satuan dengan teknik pengintegralan.
3. Metode Newton Raphson memberikan hampiran terbaik karena galat yang mempengaruhi iterasi dapat diatur sekecil mungkin.
4. Menggunakan ketiga teknik integrasi numerik yang konsepnya dapat dipelajari di kalkulus, metode Riemann tengah (titik tengah) memberikan hampiran terdekat terhadap hitungan nilai pi yang sebenarnya.
5. Galat yang diberikan pada integrasi numerik dipengaruhi oleh besarnya batas integrasi, banyak partisi yang diinginkan pemrogram, dan jenis fungsi yang akan dicari integralnya.

V. Referensi

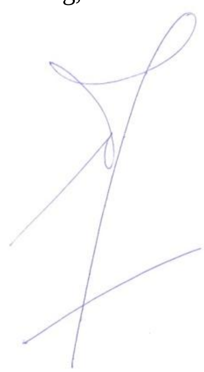
[1] Purcell, Edwin J., *Calculus 9th Edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007. hal 262-265

[2] http://www.wolframalpha.com/input/?i=pi (diakses pada 15 Agustus 2012 pukul 23.08)

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 5 Mei 2013



Aditya Agung Putra/13510010