

# IF4058 Topik Khusus Informatika I (Topik: Metode Numerik)

Kuliah ke-1 (Pengantar Metode Numerik)

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

# Apa itu Metode Numerik?

- **Numerik**: berhubungan dengan angka
- **Metode**: cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan
- **Metode numerik**: cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka (+, -, \*, /)

Contoh beberapa persoalan matematika:

1. Tentukan akar-akar persamaan polinom

$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

2. Tentukan harga  $x$  yang memenuhi persamaan:

$$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = \cos^{-1} \frac{(120x^2 + \sqrt{2x})}{17x - 65}$$

3. Hitung nilai integral-tentu berikut:

$$\int_{1.2}^{2.5} \left( \sqrt{\left(45.3e^{7x} + \frac{100}{x}\right)^4 + \frac{4}{(x^2 + 1)}} \right) dx$$

4. Diberikan persamaan differensial biasa (PDB) dengan sebuah nilai awal:

$$150y'' + 2y't = \frac{\sqrt{\ln(21t + 40)}y}{t^2} + 120; y(0) = 1$$

Hitung nilai  $y$  pada  $t = 1.8$ .

5. Selesaikan sistem persamaan lanjar (*linear*):

$$1.2a - 3b - 12c + 12d + 4.8e - 5.5f + 100g = 18$$

$$0.9a + 3b - c + 16d + 8e - 5f - 10g = 17$$

$$4.6a + 3b - 6c - 2d + 4e + 6.5f - 13g = 19$$

$$3.7a - 3b + 8c - 7d + 14e + 8.4f + 16g = 6$$

$$2.2a + 3b + 17c + 6d + 12e - 7.5f + 18g = 9$$

$$5.9a + 3b + 11c + 9d - 5e - 25f - 10g = 0$$

$$1.6a + 3b + 1.8c + 12d - 7e + 2.5f + g = -5$$

- Cara penyelesaian persoalan matematika ada dua:
  1. Secara analitik
  2. Secara numerik
- *Secara analitik*: menggunakan rumus dan teorema yang sudah baku di dalam matematika → metode analitik

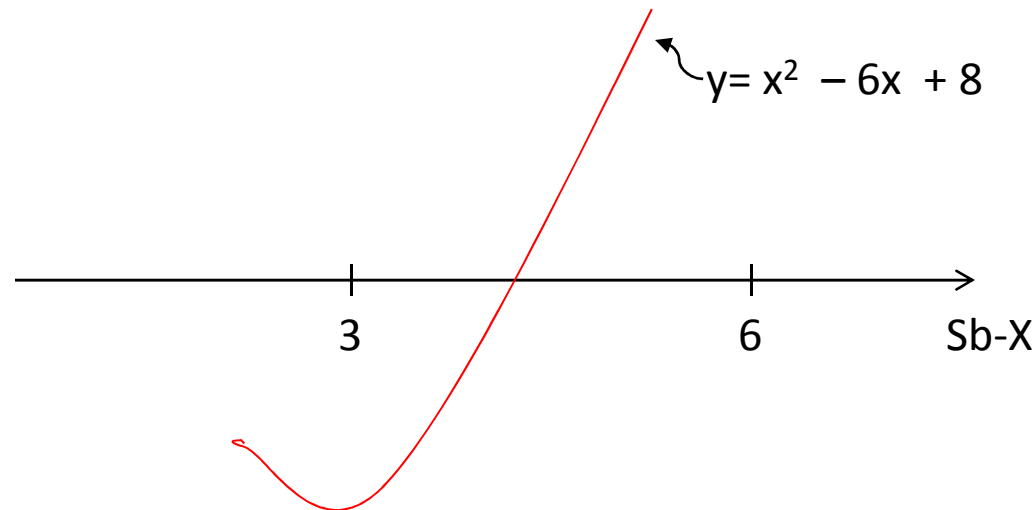
Contoh 1:  $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow$  Carilah akar-akarnya!

Metode analitik: faktorkan menjadi  $(x - 4)(x - 2) = 0$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2$$

- *Secara numerik*: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmetika biasa → metode numerik.
- Contoh: carilah sebuah akar  $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$   
Metode numerik: diketahui sebuah akar terletak di dalam selang  $[3, 6]$  → mengapa???????



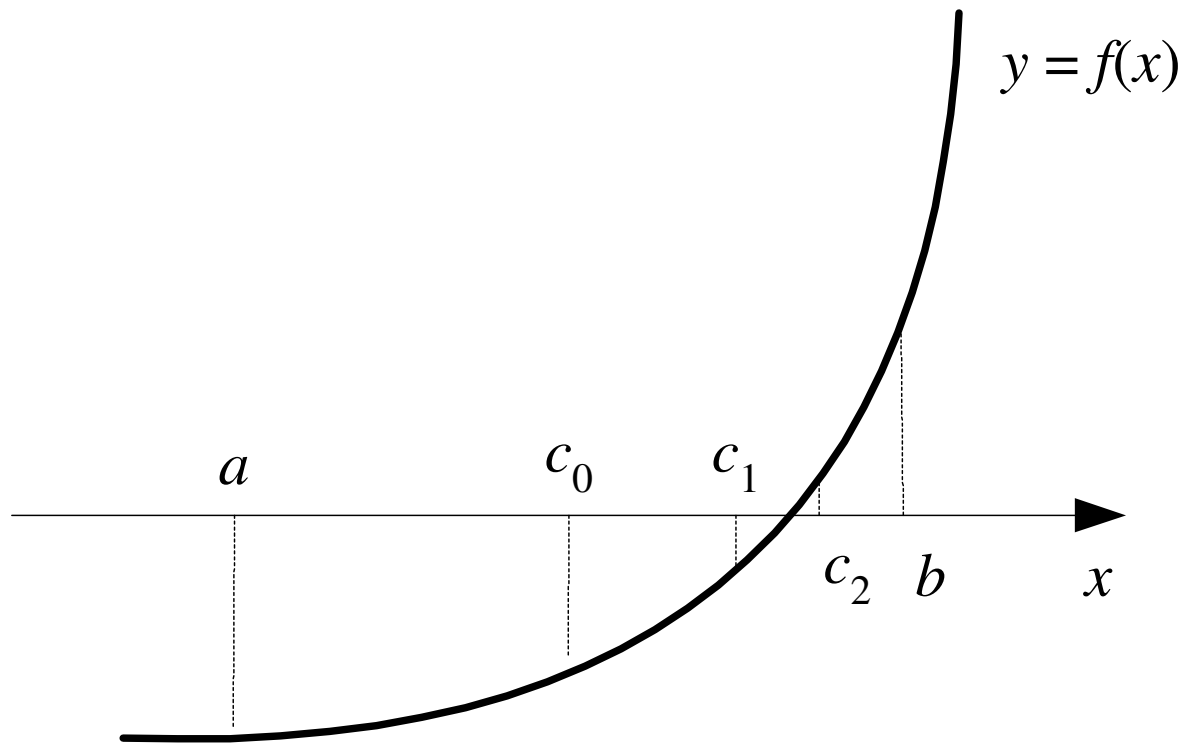
Pendekatan sederhana mencari akar adalah secara iteratif dengan **metode titik tengah** (*bisection*):

1. bagi selang  $[a,b]$  menjadi dua dengan titik tengah

$$c = (a + b) / 2$$

2. ada dua sub-selang:  $[a, c]$  dan  $[c, b]$ . Pilih selang iterasi yang baru dengan syarat nilai fungsi di ujung selang berbeda tanda.

3. ulangi langkah 1 dan 2 sampai ukuran selang  $< \varepsilon$  (epsilon adalah nilai yang sangat kecil yang menyatakan toleransi kesalahan akar yang diinginkan, misalnya  $\varepsilon = 0.001, 000001, \text{ dsb}$ )





- Contoh mencari akar  $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$  di dalam selang  $[3, 6]$  dengan  $\varepsilon = 0.0005$

Iterasi	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	Selang baru	Lebar
1	3	4.5	6	-1	1.25	8	[a,c]	1.5
2	3	3.75	4.5	-1	-0.4375	1.25	[c,b]	0.75
3	3.75	4.125	4.5	-0.4375	0.265625	1.25	[a,c]	0.375
4	3.75	3.9375	4.125	-0.4375	-0.12109	0.265625	[c, b]	0.1875
5	3.9375	4.03125	4.125	-0.12109	0.063477	0.265625	[a,c]	0.09375
6	3.9375	3.984375	4.03125	-0.12109	-0.03101	0.063477	[c, b]	0.046875
7	3.984375	4.007813	4.03125	-0.03101	0.015686	0.063477	[a, c]	0.023438
8	3.984375	3.996094	4.007813	-0.03101	-0.0078	0.015686	[c, b]	0.011719
9	3.996094	4.001953	4.007813	-0.0078	0.00391	0.015686	[a, c]	0.005859
10	3.996094	3.999023	4.001953	-0.0078	-0.00195	0.00391	[c, b]	0.00293
11	3.999023	4.000488	4.001953	-0.00195	0.000977	0.00391	[a,c]	0.001465
12	3.999023	3.999756	4.000488	-0.00195	-0.00049	0.000977	[c, b]	0.000732
13	3.999756	4.000122	4.000488	-0.00049	0.000244	0.000977	[a, c]	0.000366

Stop

- Aproksimasi akar = 4.000122

- Contoh 2: hitung integral  $\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

*Metode analitik:*

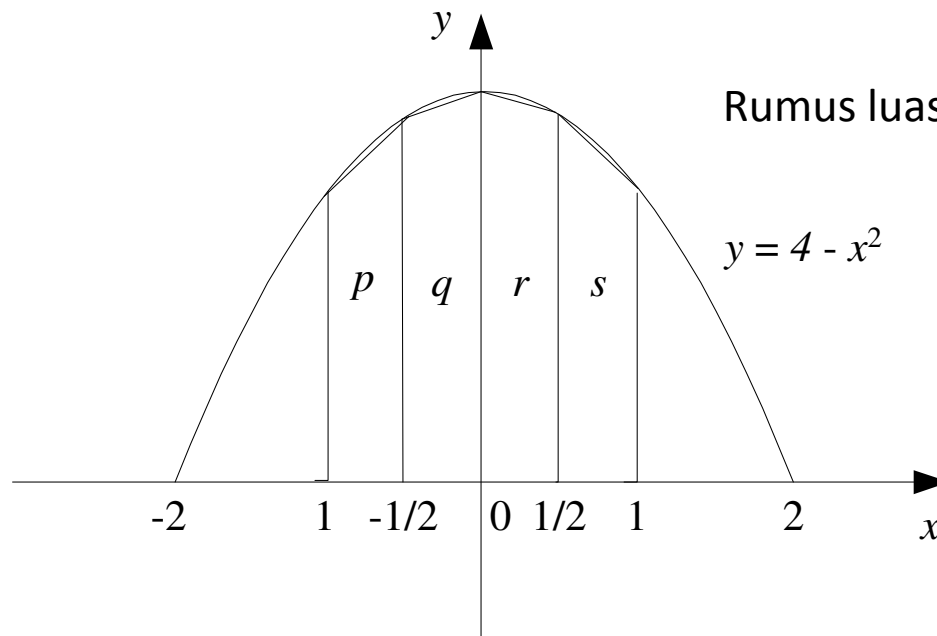
Rumus:  $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C$

$$\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \left[ 4(1) - \frac{1}{3}(1) \right] - \left[ 4(-1) - \frac{1}{3}(-1) \right] = 22/3 = 7.33$$

- *Metode numerik*

Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Rumus luas trapesium = (jumlah sisi sejajar x tinggi )/2

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &\approx p + q + r + s \approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \\
 &\quad \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\} \\
 &\approx 0.5/2 \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\} \\
 &\approx 0.5/2 \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\
 &\approx 7.25
 \end{aligned}$$

- Perbedaan solusi antara metode analitik dengan metode numerik:
  - solusi dengan metode analitik: **eksak** (tepat tanpa ada kesalahan)
  - solusi dengan metode numerik: **hampiran** atau aproksimasi (tidak tepat sama dengan solusi eksak, selalu ada kesalahan)
- Kesalahan dalam solusi numerik disebut **galat** (*error*)
- Galat dapat diperkecil dengan mengubah parameter di dalam metode numerik (misalnya  $\varepsilon$ , lebar trapesium, dsb)

- Kelebihan metode numerik: dapat menyelesaikan persoalan matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik.

Contoh: metode analitik apakah yang mampu mencari akar persamaan di bawah ini:

$$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = \cos^{-1} \frac{(120x^2 + \sqrt{2x})}{17x - 65}$$

atau mencari nilai integral berikut ini:

$$\int_{1.2}^{2.5} \left( \sqrt{\left(45.3e^{7x} + \frac{100}{x}\right)^4 + \frac{4}{(x^2 + 1)}} \right) dx$$

Metode numerik mampu menyelesaikan persoalan di atas!

- Metode numerik membutuhkan banyak operasi aritmetika yang berulang
- Oleh karena itu, komputer berguna untuk membantu perhitungan. Komputer menjadi kebutuhan yang penting dalam metode numerik.
- Metode numerik pada dasarnya adalah suatu algoritma sehingga dapat diprogram.
- Peranan orang Informatika adalah pada fase pemrograman numerik.

- Tahapan penyelesaian persoalan secara numerik:
  1. **Pemodelan**
  2. **Penyederhanaan model**
  3. **Formulasi numerik**
    - menentukan metode numerik yang dipakai
    - membuat algoritma penyelesaian
  4. **Pemrograman**
    - coding
  5. **Pengujian**
    - tes dengan data uji
  6. **Evaluasi**
    - menganalisis hasil numerik
- Tahap 1 dan 2 adalah pekerjaan ahli yang sesuai dengan bidangnya;  
Tahap 3 dan 4 adalah tugas informatikawan;  
Tahap 5 dan 6 melibatkan informatikawan dan ahli yang sesuai dengan bidangnya

- **Contoh 4:** Sebuah bola logam dipanaskan sampai pada suhu  $100^{\circ}\text{C}$ . Kemudian, pada saat  $t = 0$ , bola itu dimasukkan ke dalam air yang bersuhu  $30^{\circ}\text{C}$ . Setelah 3 menit, suhu bola berkurang menjadi  $70^{\circ}\text{C}$ . Tentukan suhu bola setelah 22.78 menit. Diketahui tetapan pendinginan bola logam itu adalah 0.1865.

Pemodelan oleh ahli fisika: Dengan menggunakan hukum pendinginan Newton, laju pendinginan bola setiap detiknya adalah

$$dT/dt = -k(T - 30); T(0)=100$$

Ditanya:  $T(22.78) = ?$

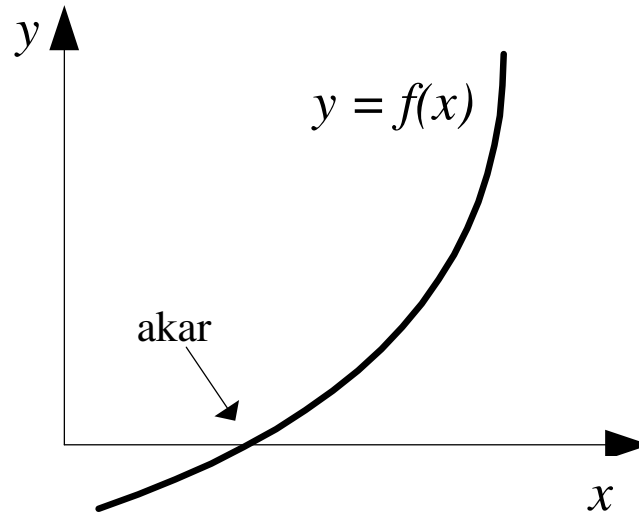
Formulasi numerik: menggunakan metode Runge-Kutta 9salah satu metode numerik untuk penyelesaian PDB)



# Apa yang Dipelajari di dalam Metode Numerik

## 1. Solusi persamaan nirlanjar

Temukan  $x$  sehingga  $f(x) = 0$



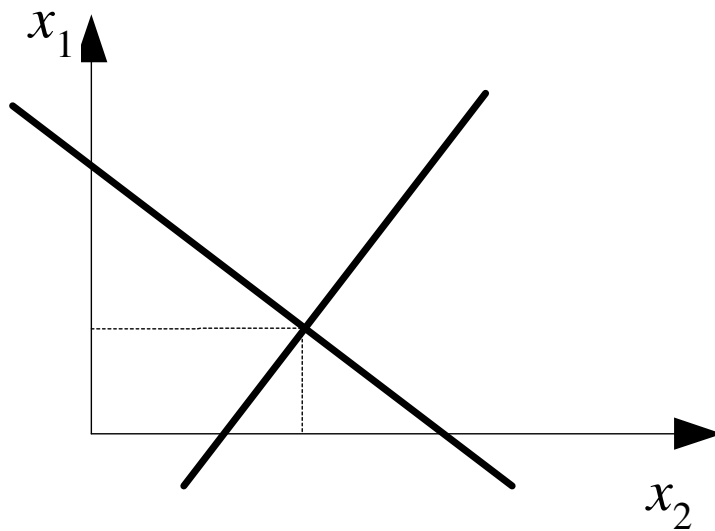
## 2. Solusi sistem persamaan linjar

Selesaikan sistem persamaan linjar seperti

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

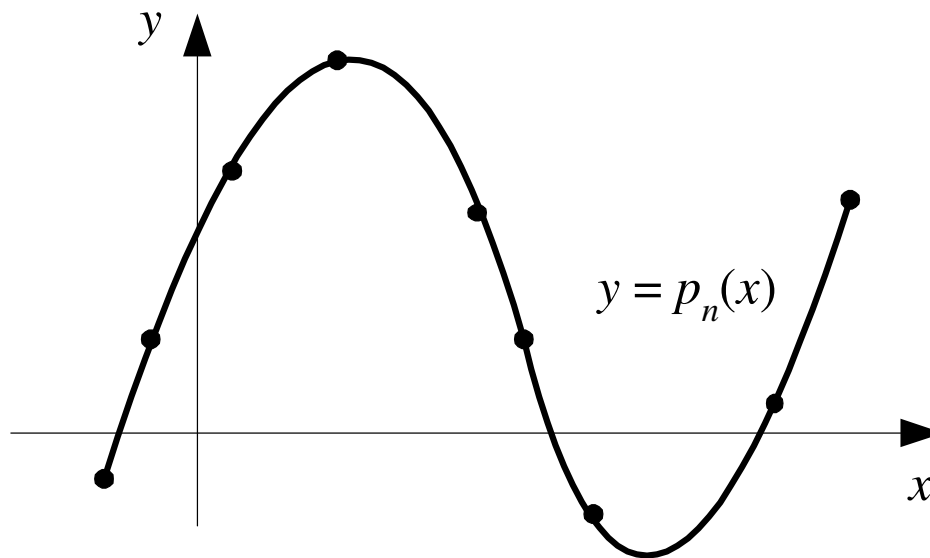
untuk harga-harga  $x_1$  dan  $x_2$ .



### 3. Interpolasi polinom

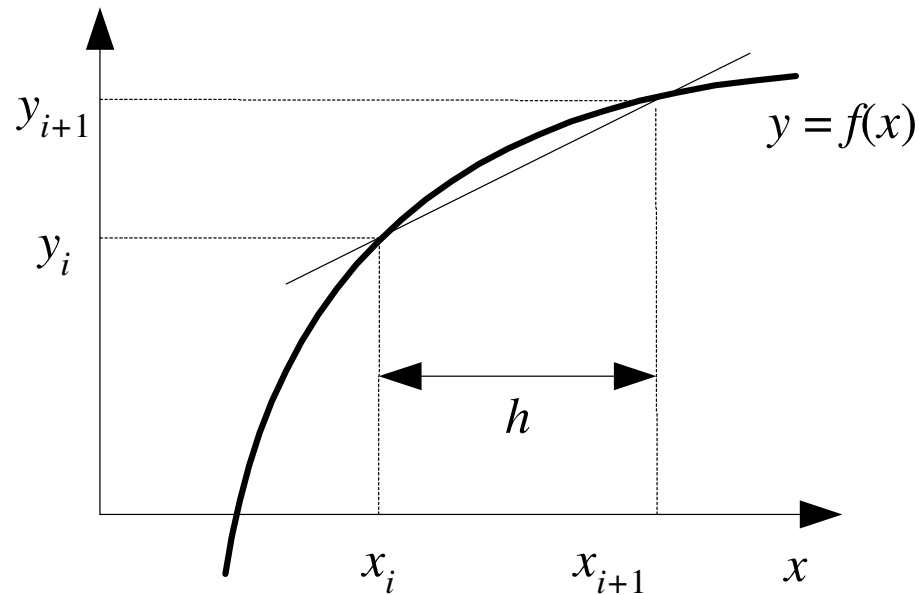
Diberikan titik-titik  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

Tentukan polinom  $p_n(x)$  yang melalui semua titik tersebut



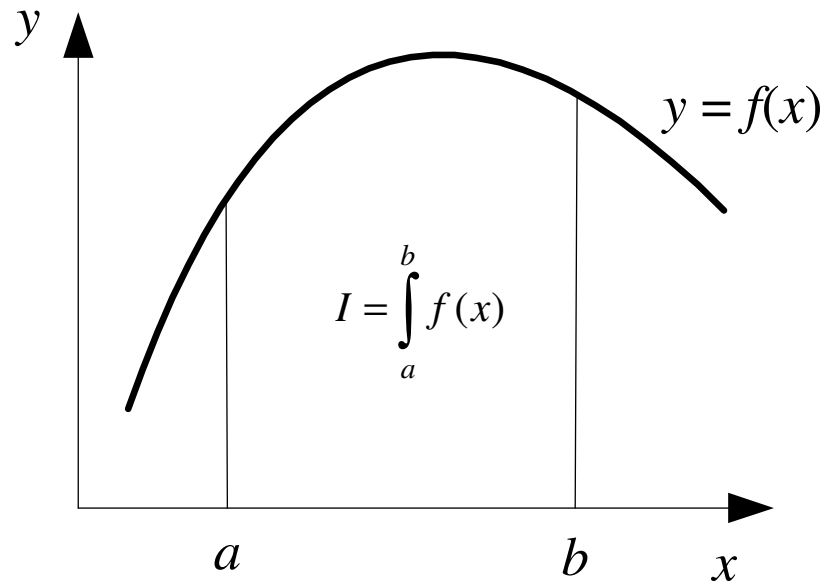
## 4. Turunan numerik

Misalkan diberikan titik  $(x_i, y_i)$  dan titik  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ .  
Tentukan  $f'(x_i)$ .



## 5. Integrasi numerik

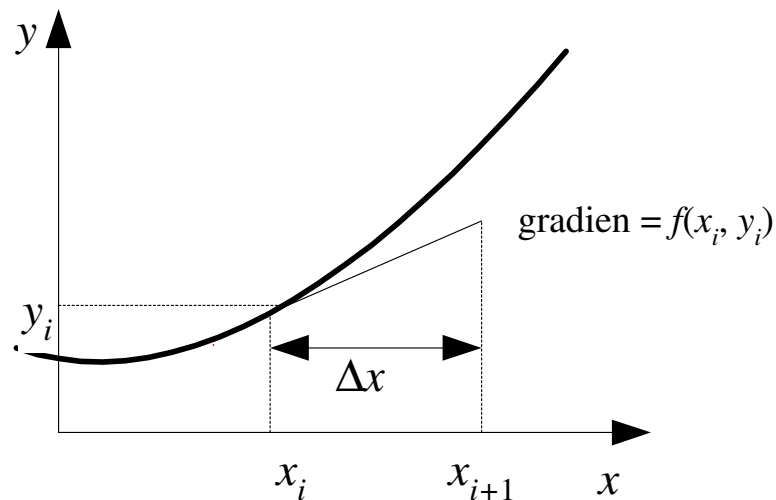
Hitung integral  $I = \int_a^b f(x)dx$



## 6. Solusi persamaan diferensial biasa dengan nilai awal

Diberikan  $dy/dx = f(x,y)$  dan nilai awal  $y_0 = y(x_0)$

Tentukan nilai  $y(x_t)$  untuk  $x_t \in R$



# Tujuan Kuliah IF4058

1. Mempelajari berbagai metode penyelesaian persoalan matematika secara numerik.
2. Mengimplementasikan metode numerik ke dalam program komputer untuk persoalan di bidang sains dan rekayasa

# Prasyarat Kuliah

1. Kalukulus I dan II
2. Algoritma dan Pemrograman / Strukyur Data



# Penilaian Kuliah

1. Kehadiran
2. UTS (closed book)
3. UAS (open book)
4. PR
5. Tugas pemrograman (menggunakan Bahasa C#, Bahasa FORTRAN, dan Matlab)
6. Makalah perorangan

# Buku Teks

1. Rinaldi Munir, *Diktat Kuliah Metode Numerik untuk Teknik Informatika Edisi Kedua (Revisi)*, Departemen Teknik Informatika ITB, 2002
2. Curtis F. Gerald dan Patrick O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis, 5rd Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
3. Steven C. Chapra dan Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications*, MacGraw-Hill Book Company, 1991

Buku 1, 2, dan 3 di atas sebaiknya dimiliki.

*Buku tambahan:*

1. John. H. Mathews, *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, 2nd Edition*, Prentice-Hall International, 1993
2. Shoichiro Nakamura, *Applied Numerical Methods in C*, Prentice-Hall Int. Series, 1993
3. Samuel D Conte dan Carl De Boor, *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach, 3rd Edition*, MacGraw-Hills, Inc, 1992.