

# Pengaplikasian Solusi Persamaan Diferensial Biasa pada Lotka Volterra dan Goodwin Model

Kevin Tirtawinata / 13507097  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganessa 10 Bandung 40132, Indonesia  
kevin.tirtawinata@gmail.com

**Abstract**—Sistem persamaan diferensial merupakan salah satu persamaan yang banyak dijumpai di berbagai bidang ilmu pengetahuan. Tidak adanya penjelasan mengenai fungsi yang membuat persamaan diferensial itu membuat persamaan diferensial harus dikerjakan dengan metode numerik. Beberapa persamaan diferensial yang menjadi model dasar dan merupakan batu loncatan dari perkembangan permodelan adalah Lotka Volterra dan Goodwin. Kedua permodelan ini terkenal di bidangnya masing-masing yaitu biologi dan ekonomi. Dan memicu perkembangan persamaan diferensial ke tempat yang lebih lanjut, yang membuat permodelan 3 variabel menjadi suatu hal yang dapat dianalisis.

**Kata Kunci**— Lotka Volterra, Goodwin, Model Populasi, Model Ekonomi.

## I. PENDAHULUAN

(Ince 1956) Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi yang tidak diketahui. Fungsi ini dapat memuat sebuah variabel atau lebih yang tidak diketahui nilainya namun memiliki keterkaitan nilai fungsi dengan perubahan nilai fungsi tersebut. Persamaan diferensial ini banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu pengetahuan seperti bidang ekonomi, tehnik dan juga biologi. Persamaan diferensial berkembang terutama pada hubungan yang bersifat deterministik yang melibatkan jumlah yang terus berubah bergantung pada variabel lain secara kontinu pada ruang tertentu seperti kontinu pada waktu atau luas.

Persamaan diferensial dipelajari pada berbagai bidang matematika. Pembelajaran persamaan diferensial difokuskan pada solusi, nilai, atau kumpulan fungsi yang dapat memenuhi persamaan diferensial tersebut. Sebagian permasalahan diferensial yang tergolong mudah, memiliki bentuk fungsi yang pasti untuk penyelesaian persamaan tersebut. Sebaliknya, untuk persamaan diferensial yang memiliki tingkat kerumitan yang tinggi, pencarian fungsi yang memenuhi persamaan tersebut adalah hal yang mustahil, namun pencarian nilai dapat dilakukan dengan berbagai metode numerik yang sudah dikembangkan oleh beberapa orang, seperti Euler, Taylor, Runge-Kutta dan juga Adams-Bashforth-Moulton. Beberapa topik yang bergantung pada metode numerik untuk pemecahan permasalahan adalah permodelan populasi dan juga permodelan ekonomi. Pada permodelan

populasi, perubahan populasi bergantung kepada populasi yang ada, hal ini bergerak seiring berjalannya waktu, namun penambahan populasi juga memiliki batas, yaitu ruang dan konsumsi, sehingga persamaan juga melibatkan adanya beberapa faktor lain yang mempengaruhi pertumbuhan penduduk. Pada permodelan bidang ekonomi, pertumbuhan ekonomi di suatu negara bergantung kepada keadaan berbagai aspek pada negara tersebut. Sedangkan sebagian besar aspek pada negara tersebut dipengaruhi oleh perubahan ekonomi dan keadaan ekonomi itu sendiri. Pada dua buah permodelan ini, diperlukan metode numerik penyelesaian persamaan diferensial untuk menganalisis kedua masalah dan mencari solusi ataupun melihat pergerakan model-model tersebut.

Beberapa permodelan yang sangat terkenal pada bidang matematika ada Lotka Volterra Model yang memiliki keunikan tersendiri dan diterapkan untuk berbagai hal. Permodelan Lotka Volterra merupakan salah satu permodelan yang sangat penting pada ilmu pengetahuan dan juga penerapan dari penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode numerik. Model lain yang terkenal adalah Goodwin model.

## II. TEORI SINGKAT

### *Model Populasi*

(Renshaw 1991) Permodelan populasi adalah pengaplikasian permodelan matematika kepada pembelajaran pada dinamika populasi. Permodelan populasi dilakukan dengan tujuan agar kita dapat mengerti lebih jauh mengenai kompleksitas interaksi dan juga proses yang ada pada sebuah populasi mempengaruhi populasi tersebut. Hasil dari permodelan ini dapat digunakan sebagai dasar pemahaman bagaimana perubahan pada sebuah populasi. Permodelan populasi secara ekologi membuat permodel yang memperhatikan perubahan pada jumlah populasi yang merupakan akibat dari interaksi antara organisme dengan organisme lain sejenis dan tidak sejenis serta keadaan lingkungan sekitar seperti makanan, mangsa, ataupun pemangsa.

Permodelan populasi bermula pada akhir abad ke-18 pada saat ilmuwan biologi mencoba memahami dinamika pertumbuhan dan pengurangan populasi pada makhluk hidup. Thomas Malthus adalah orang pertama yang mengemukakan mengenai pertumbuhan populasi memiliki pola geometri. Loncatan besar pada permodelan ini terjadi

pada tahun 1838 ketika Pierre Francois Verhulst berhasil menuangkan permodelan biologi pada Logistic model of population growth. Pada tahun 1921 Raymond Pearl mengikutsertakan A.J Lotka pada proyek permodelan populasi. A.J Lotka mengembangkan persamaan differensial parasit pada mangsa. Vito Volterra seorang matematikawan lalu membuat persamaan hubungan antara 2 spesies yang berhubungan pada differensial A.J Lotka. Bersama, mereka berdua membentuk Lotka-Volterra Model yang memodelkan kompetisi, predatorisasi dan parasitisasi pada makhluk hidup secara logis.

### Model Ekonomi

(Baumol 1982) Permodelan pada bidang ekonomi adalah pembangunan model secara teoritis yang merepresentasikan proses ekonomi berdasarkan set variabel, logika dan juga hubungan kuantitatif dari variabel-variabel dan logika-logika yang ada. Model ekonomi adalah framework simple yang dibuat untuk menggambarkan proses kompleks yang tidak selalu berdasar pada perhitungan dengan tehnik matematika. Pada permodelan ekonomi, sebuah model bergantung pada sebuah parameter yang dapat berubah bergantung kepada berbagai keadaan parameter lain.

Secara umum, kegunaan dari model ekonomi adalah sebagai simplifikasi dan pengilustrasian proses ekonomi yang kompleks pada sebuah data observasi dan sebagai kumpulan data contoh yang berbasiskan paradigma dari studi ekonomi.

Simplifikasi merupakan salah satu yang penting pada permasalahan ekonomi yang terdiri dari berbagai proses yang kompleks. Kompleksitas ini dapat disimplifikasi menjadi atribut yang membedakan aktivitas ekonomi. Beberapa faktor yang sering disimplifikasi adalah kooperatif dan individual proses pengambilan keputusan, keterbatasan sumber daya, keterbatasan lingkungan dan geografis, keperluan legal dan juga institusi, serta fluktuasi yang murni tidak dapat diprediksi. Para pakar ekonomi harus jeli dalam melihat faktor dan hasil simplifikasi agar analisis dapat menjadi mudah namun merepresentasikan keadaan yang sesuai.

Seleksi pada permodelan ekonomi sangat penting karena hasil daripada seleksi itu sendiri merupakan informasi yang akan dikompilasi untuk menganalisis keadaan ekonomi yang ada. Salah satu contoh yang perlu dianalisis dengan baik adalah inflasi, dengan berbagai perlakuan variabel yang ada, dengan permodelan yang baik, akan dapat memperkirakan terjadinya inflasi sehingga pakar ekonomi dapat mempersiapkan diri sebelum hal tersebut terjadi.

Penggunaan model ekonomi antara lain :

- Perkiraan aktivitas ekonomi dengan berbagai asumsi pakar ekonomi
- Dasar pembuatan keputusan ekonomi untuk aktivitas ekonomi yang akan datang
- Memberikan alasan berupa hasil analisis dari keadaan ekonomi yang digunakan untuk pengambilakn berbagai
- Perencanaan dan alokasi kegiatan ekonomi termasuk logistik dan manajemen bisnis

- Spekulasi *trading* dan juga investasi.

## III. PEMBAHASAN

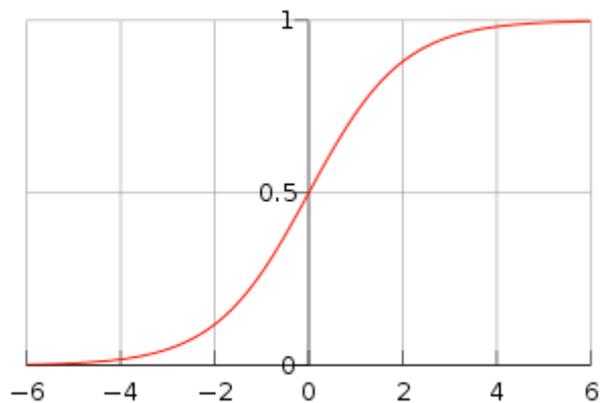
### Model Logistik Pertumbuhan Populasi

Permodelan pertama oleh Verhulst pada tahun 1838 didasarkan pada teori yang mengatkan bahwa pertambahan populasi pada suatu lingkungan bergantung kepada jumlah populasi yang ada pada saat itu dan juga ketersediaan sumber daya lingkungan pada saat itu. Berdasarkan hal itu, persamaan yang dikemukakan sebagai model populasi pertama adalah sebagai berikut :

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

dengan P merepresentasikan populasi pada saat itu, r merupakan faktor pertumbuhan pada berbagai makhluk hidup bergantung kepada rutinitas reproduksi dan K sebagai kapasitas dari lingkungan untuk menampung spesies yang ada.

Persamaan sebuah spesies merupakan sebuah persamaan standar yang dapat diselesaikan secara analitik dan memiliki kurva seperti berikut



Permodelan dengan sebuah spesies dapat diselesaikan dan dianalisis tanpa menggunakan metode numerik. Hal ini karena hanya beberapa variabel yang mempengaruhi spesies dalam sebuah persamaan.

### Lotka Volterra Model

Model yang dikemukakan oleh Verhulst yang merupakan hasil permodelan dari sebagian teori yang diungkapkan oleh Thomas Malthus pada essay "*An Essay on the Principle of Population*". Permodelan itu lalu dikembangkan dengan teori lain pada Essay yang sama oleh A.J Lotka dan Vito Volterra. Lotka Volterra Model merupakan model yang memperhitungkan interaksi spesies pada sebuah lingkungan. Interaksi spesies merupakan sebuah kunci penting pertumbuhan populasi yang dan hal ini terus berubah secara dinamik seiring dengan perubahan populasi yang ada.

Permodelan Lotka Volterra adalah permodelan antara populasi pemangsa dan populasi mangsa pada sebuah lingkungan yang bergantung satu sama lain berdasarkan hubungan interaksi saling memangsa dan kebiasaan dari kedua spesies. Persamaan permodelan ini adalah :

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x)$$

y merupakan simbol dari jumlah pemangsa  
 x merupakan jumlah mangsa  
 dx/dt dan dy/dt merupakan pertumbuhan pemangsa dan mangsa.  
 α, β, γ and δ merupakan parameter yang menunjukkan interaksi antara kedua spesies.  
 Contoh interaksi yang mungkin antara dua spesies yang berhubungan adalah antara kelinci sebagai mangsa dan serigala sebagai pemangsa:

- α merupakan pertumbuhan alami kelinci tanpa memperhitungkan adanya pemangsa, memperhitungkan jumlah kematian alami dan kelahiran alami
- β merupakan konstanta kematian dari kelinci bergantung kepada jumlah serigala dan jumlah kelinci yang ada.
- γ merupakan konstanta jumlah kematian serigala pada saat ketidakterediaan mangsa
- δ merupakan konstanta yang memperhitungkan pertumbuhan serigala dengan adanya jumlah kelinci sebagai mangsa

Beberapa persyaratan yang diasumsikan pada persamaan ini adalah :

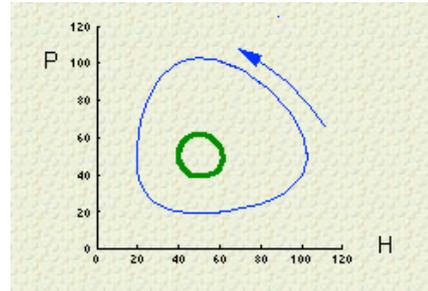
- Populasi mangsa memiliki makanan yang tersedia setiap saat untuk setiap jumlah populasi
- Pemangsa bergantung kepada populasi mangsa sebagai sumber makanan
- Pertambahan populasi alami proporsional untuk setiap ukuran populasi
- Lingkungan tidak berubah terhadap populasi.

Solusi dari persamaan diatas adalah sebuah data periodik antara mangsa dan pemangsa. Pencarian solusi dapat dilakukan dengan metode numerik yang menghitung keadaan di setiap titik yang ada dan memperhitungkan perubahan jumlah dengan menggunakan Solusi Persamaan Differensial.

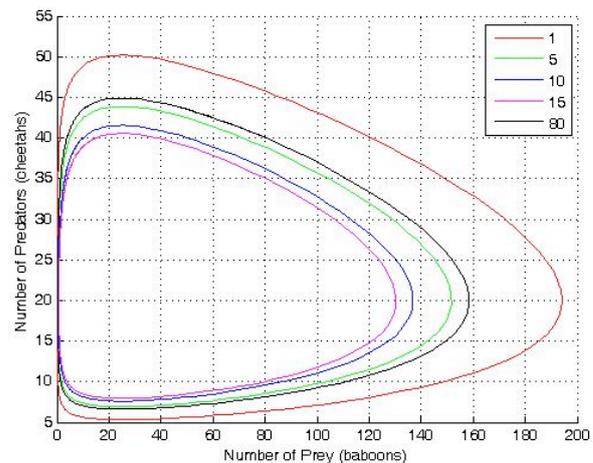


Permodelan Lotka Voletraa menghasilkan solusi secara periodik yang linear, dengan harmonik sederhana.

Populasi pemangsa berkembang mengikuti populasi mangsa dengan jeda 90°. Penyelesaian dapat juga berupa hubungan antara mangsa dan pemangsa dengan bentuk kurva



panah menunjukkan pergerakan waktu, P adalah populasi pemangsa dan H adalah populasi mangsa. Tidak realistiknya permodelan ini membuat permodelan ini masih dikembangkan dan dengan menambahkan berbagai konstanta yang ada menghubungkan berbagai interaksi antar speies maka permodelan akan lebih nyata dan perhitungan dilakukan dengan menggunakan penyelesaian persamaan differensial dengan metode numerik. Berikut contoh analisis yang menggunakan permodelan Lotka Volterra dan menggunakan penyelesaian sistem persamaan differsial dengan menggunakan metode numerik.



Gambar di atas memperhitungkan nilai yang batasan pada hubungan antara babooon dan juga cheetah. Kondisi seperti ini masih dianggap kurang merepresentasikan model walaupun sudah menggunakan persamaan differensial dan juga berbagai konstanta yang mewakili interaksi.

Berbeda dengan persamaan differensial biasa, permodelan Lotka Volterra memiliki beberapa nilai yang penting yang digunakan untuk mempermudah perhitungan analisis dengan menggunakan metode numerik yang ada. Permodelan Lotka Volterra dapat dinyatakan sebagai matriks jacobbi :

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

Dengan dievaluasi pada titik sekitar (0,0) matriks akan menjadi

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

dan memiliki eigenvalues :

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\gamma.$$

eigenvalues adalah faktor yang menyebabkan matriks menjadi sebuah eigenvector. Dimana eigenvector sebuah matriks merupakan vektor tidak nol yang membuat sebuah matriks proporsional terhadap matriks awal.

Pada permodelan Lotka Volterra  $\alpha$  dan  $\gamma$  selalu lebih besar daripada nol, sehingga membuat persamaan ini tidak akan menemukan sebuah nilai eigenvalues yang membuat persamaan ini tidak dapat diselesaikan atau tidak menemukan hasil dengan penyelesaian persamaan differensial.

Adanya eigenvalues pada sebuah persamaan akan mengakibatkan persamaan akan menemui sebuah jalan buntu bila dikerjakan secara numerik tahap demi tahap. Hal ini dikarenakan adanya faktor perubahan yang membuat nilai tidak terdefinisi. Sedangkan pada kenyataan permodelan, kejadian ini diakibatkan karena ada sebuah interaksi yang menyebabkan perubahan pada sebuah spesies secara ekstrim namun memiliki kemungkinan terjadi yang sangat kecil, sehingga tidak perlu diikutsertakan dalam sebuah permodelan. Permodelan Lotka Volterra juga dibuat untuk menganalisis keadaan populasi dalam kondisi yang tidak ekstrim.

Evaluasi yang penting berikutnya adalah Titik Pasti Keuda dengan menghitung

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

maka akan didapatkan persamaan berikut

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}.$$

$$K = y^\alpha e^{-\beta y} x^\gamma e^{-\delta x},$$

$$y^\alpha e^{-\beta y} x^\gamma e^{-\delta x} = \frac{y^\alpha x^\gamma}{e^{\delta x + \beta y}} \longrightarrow \max_{x,y>0}.$$

$$K^* = \left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^\alpha \left(\frac{\gamma}{\delta e}\right)^\gamma,$$

Hasil analisis dari titik titik penting yang ada digunakan untuk mempermudah pembuatan grafik

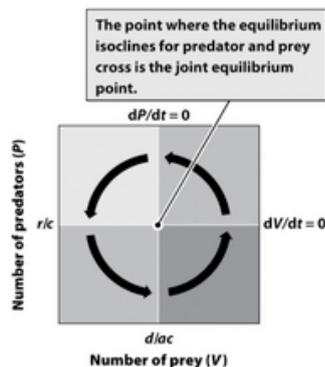


Figure 15.14  
The Economy of Nations, Sixth Edition  
© 2010 W. H. Freeman and Company

### Goodwin Model

Goodwin model, atau yang sering disebut dengan Goodwin's class struggle model, adalah model ekonomi yang menggambarkan fluktuasi dari keadaan ekonomi. Pertama kali dikemukakan oleh Richard M. Goodwin. Permodela ini merupakan penggabungan aspek pada Harrod Domar model dan Kurva Philips untuk memodelkan aktifitas ekonomi

Permodelan Harrod Domar digunakan untuk menjelaskan pertumbuhan ekonomi bergantung kepada besar penyimpanan dan produktifitas pada suatu negara. Pada hal itu diungkapkan bahwa tidak ada alasan alamiah untuk ekonomi berkembang secara seimbang.

Kurva Philips merupakan hubungan balik antara jumlah pengangguran dan inflasi ekonomi. Semakin sedikit jumlah pengangguran semakin tinggi rasio inflasi dapat terjadi.

Kedua model ini menggambarkan mengenai keadaan ekonomi yang terus berubah erdasarkan faktor-faktor di dalamnya. Salah satu penerapan permodelan Lotka Volterra pada bidang ekonomi, dengan menggabungkan Permodelan Harrod Domar dan Kurva Philips adalah Permodelan Goodwin. Permodelan Goodwin adalah permodelan pertama pada bidang ekonomi yang membutuhkan metode numerik dalam menyelesaikannya, hal itu memicu berkembangnya berbagai model lain yang digunakan dalam dunia ekonomi

Hasil produksi sebuah negara diberikan dengan fungsi produksi :

$$q = \min\left(\ell, \frac{k}{\sigma}\right)$$

$q$  adalah hasil produksi agregat yang ada

$\ell$  adalah rasio dari pengerjaan buruh yang ada bergantung kepada produksi sebuah negara

$k$  adalah rasio kesamaan industri

$a$  adalah produktifitas dari industri sebuah negara

$\sigma$  adalah rasio hasil produksi negara dan bernilai konstan

Menggambil persamaan dari permodelan Harrod Domar mengenai pertumbuhan ekonomi

$$a\ell = \frac{k}{\sigma} = q$$

yang mengasumsikan keadaan ini terjadi pada setiap waktu, dan rasio pengerjaan karyawan

$$v = \frac{\ell}{n}$$

dimana n merupakan nilai total pegawai industri yang ada, bertambah dengan ratio tetap  $\beta$ , dan produktifitas dengan ratio  $\alpha$  maka persamaan dapat diubah menjadi

$$\frac{dv/dt}{v} = g_v = g_\ell - \beta.$$

$$\frac{d\ell/dt}{\ell} = g_\ell = g_q - \alpha$$

dan dengan persamaan pada kurva philips mengenai kedua hal tersebut dapat dihitung bahwa

$$\frac{dw/dt}{w} = g_w = \rho v - \gamma.$$

$$u = \frac{w\ell}{q} = \frac{w}{a}.$$

$$\frac{du/dt}{u} = g_u = g_w - \alpha$$

sehingga persamaa dapat menjadi

$$\frac{dk/dt}{k} = g_k = g_q = s(1-u)(q/k) - \delta.$$

$$\frac{dv/dt}{v} = g_v = \frac{s(1-u)}{\sigma} - (\delta + \alpha + \beta).$$

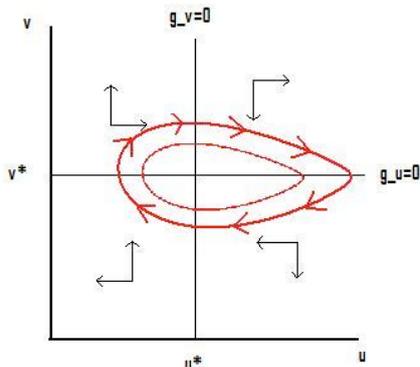
Persamaan akhir dari model Goodwin adalah

$$\frac{dv/dt}{v} = g_v = \frac{s(1-u)}{\sigma} - (\delta + \alpha + \beta)$$

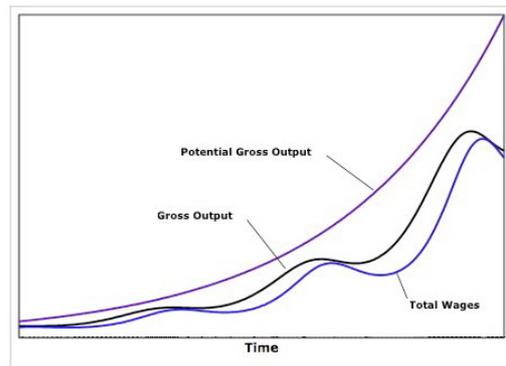
$$\frac{du/dt}{u} = g_u = \rho v - \gamma - \alpha$$

Dengan metode penyelesaian yang sama dengan Lotka Volterra dapat dihasilkan sebuah analisis dalam bentuk grafik sebagai berikut.

Figure 1



Grafik perubahan output potensial terhadap jumlah pekerjaan pada saat seluruh pekerjaan optimal.

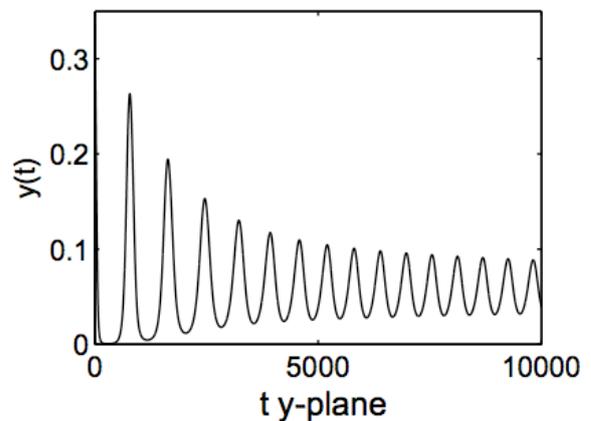
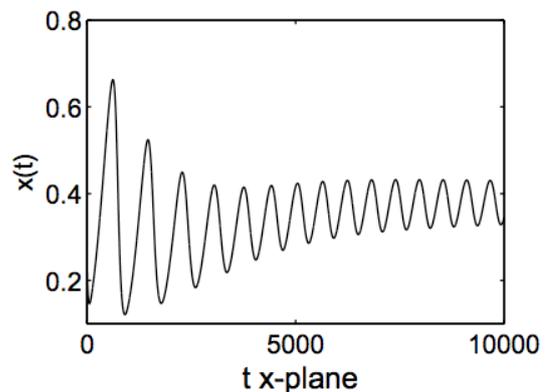


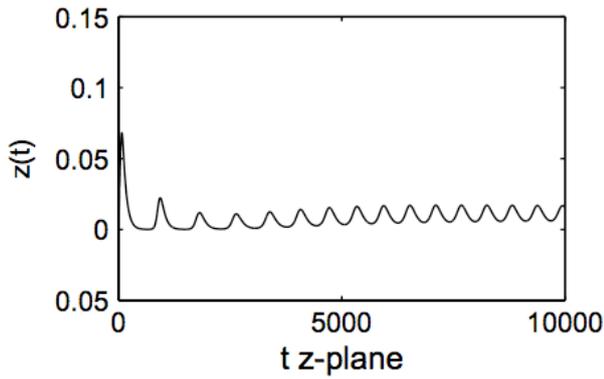
Hasil dari permodelan goodwin yang dapat mengestimasi pergerakan ekonomi yang ada, namun tidak memperhitungkan fluktuasi yang ada.

### Perkembangan Lotka Volterra Model

Lotka Volterra Model terus berkembang dengan memperhitungkan berbagai interaksi antar spesies, salah satu yang sering dipelajari adalah interaksi lebih dari 2 spesies. Dan mempertimbangkan adanya proses adaptasi dari spesies tertentu.

Hasil analisis pengerjaan metode numerik pada kasus tersebut antara lain :





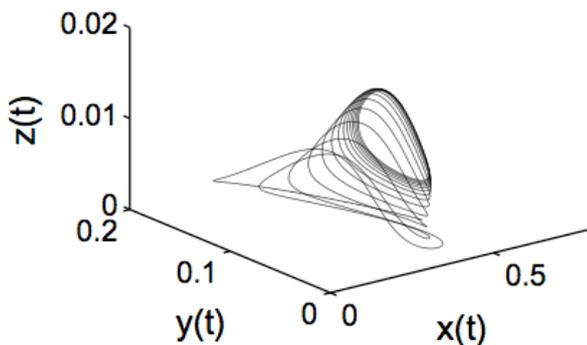
## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 13 Mei 2011 \

Kevin Tirtawinata 135 07 097

dan menghasilkan sebuah model 3 dimensi yang menghubungkan ketiga spesies menjadi



## KESIMPULAN

Persamaan differensial yang banyak digunakan pada berbagai bidang mulai berkembang sejak adanya metode numerik untuk penyelesaian persamaan differensial. Permodelan semakin berkembang dan membutuhkan perhitungan yang semakin rumit.

Hal ini memacu perkembangan berbagai ilmu pengetahuan yang berguna untuk mengetahui berbagai hal dan mencegah pergerakan ekonomi maupun ekosistem ke arah tertentu.

Perubahan pada penyelesaian persamaan tersebut dapat dihindari dengan menambahkan beberapa parameter pada lingkungan asli, sehingga sangat dibutuhkan dalam pengontrolan ekonomi dan juga lingkungan.

## REFERENSI

- Unknown. *NRE509*. <http://nre509.wikidot.com/lecture-15-nov-4> (accessed May 13, 2011).
- Baumol, William & Blinder, Alan. *Economics: Principles and Policy (2nd ed.)*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1982.
- Ince, E.L. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1956.
- Renshaw, Eric. *Modeling Biological Populations in Space and Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.