Perbandingan Metode Kuadratur Gauss-Legendre dengan Metode Kuadratur Clenshaw-Curtis untuk Mencari Solusi Permasalahan Integral

M. Pasca Nugraha – 13507033
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
mpascanug@yahoo.co.id

Abstract—*Persoalan integral banyak ditemukan dalam sains dan rekayasa. Untuk persoalan integral yang rumit, yang tidak bisa dipecahkan dengan cara analitis, dibutuhkan cara numeric untuk menyelesaikannya. Cara yang cukup terkenal adalah metode kuadratur Gauss. Metode ini cukup sering digunakan. Terdapat beberapa metode lain, salah satunya adalah metode Clenshaw-Curtis. Metode ini cukup jarang digunakan, namun ternyata memiliki tingkat presisi dan kemangkusan yang cukup tinggi. Pada makalah ini akan dibahas perbandingan antara metode kuadratur Gauss dengan metode kuadratur Clenshaw-Curtis.*

Kata kunci—integral, metode numeric, metode kuadratur Gauss, metode Clenshaw-Curtis, perbandingan.

I. PENDAHULUAN

Persoalan integral merupakan persoalan yang sangat penting dalam metode numeric. Hal ini karena integral mempunyai banyak terapan dalam bidang saisn dan rekayasa, misalnya di bidang fisika, kimia, transportasi, dan lain-lain. Sering kali fungsi yang harus diintegralkan merupakan fungsi-fungsi kompleks yang sangat sulit bahkan tidak mungkin dipecahkan dengan analitis. Oleh karena itu, untuk kasus yang demikian, dilakukan pendekatan numerik untuk memecahkannya.

Persoalan integrasi numeric adalah menghitung secara numeric integral tentu :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang dalam hal ini a dan b diketahui dan f adalah fungsi yang diberikan baik secara eksplisit dalam bentuk persamaan maupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai.

Berbagai penelitian terus dilakukan oleh para ahli numeric untuk menemukan metode yang lebih presisi dan lebih mangkus dari yang sudah ada sebelumnya. Oleh karena itu, hingga saat ini telah ditemukan berbagai metode dengan berbagai pendekatan yang berbeda untuk menentukan solusi persoalan integral dengan menggunakan metode numeric.

Salah satu pendekatan metode numeric adalah berdasarkan tafsiran geometri integral tentu. Daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Aturan ini dinamakan metode pias. Pendekatan lain adalah berdasarkan polinom interpolasi. Pada pendekatan ini, fungsi *integrand f(x)* dihampiri dengan polinom $p_n(x)$. Selanjutnya integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena suku-suku polinom lebih mudah untuk diintegrasikan. Aturan ini disebut metode Newton Cotes.

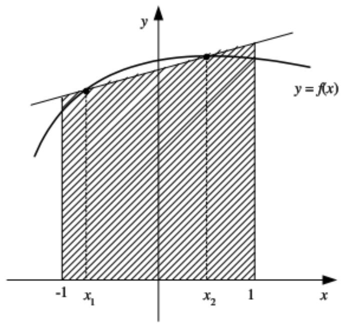
Pendekatan lain yang dilakukan adalah dengan menghilangkan batasan-batasan yang terdapat pada metode Newton Cotes. Metode ini tidak perlu menentukan titik-titik farik yang berjarak sama seperti pada metode-metode sebelumnya, tetapi nilai integrasi numeric cukup diperoleh dengan menghitung nilai fungsi f(x) pada beberapa titik tertentu. Metode ini dikembangkan oleh Gauss dan dinamakan metode kuadratur Gauss. Satu lagi pendekatan lain dilakukan oleh Clenshaw dan Curtis pada tahun 1960, yaitu metode yang dinamakan metode kuadratur Clenshaw-Curtis.

Berbagai metode masing-masing memiliki kekurangan dan kelebihan tersendiri, terutama jika dilihat dari kemangkusan algoritma dan ketepatan solusi yang dihasilkan. Hal ini membuat pada ahli dan orang-orang terkait sering membandingkan antara satu algoritma dengan algoritma lain untuk digunakan ataupun untuk penelitian selanjutnya.

Pada makalah ini akan sedikit dibahas mengenai perbandingan dua aturan kuadratur, yaitu kuadratur Gauss dan kuadratur Clenshaw-Curtis.

II. METODE KUADRATUR GAUSS-LEGENDRE

Seperti dijelaskan sebelumnya, metode kuadratur Gauss menghitung nilai integral dengan cara mengambil nilai fungsi di beberapa titik tertentu yang dapat mewakili perhitungan luas dengan menyeimbangkan galat positif dan negatif. Gambaran metode ini dapat dilihat pada gambar :



Gambar 1. Integral dihampiri dengan kuadratur Gauss

Gambar di atas menyatakan persamaan integral f(x) dari x=-1 hingga x=1. Metode Gauss menghampiri nilai integral dengan dua buah titik x_1 dan x_2 sedemikian sehingga luas daerah yang diarsir dapat dinyatakan dengan :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

dengan c_1, c_2, x_1, dan x_2 adalah sembarang nilai yang dapat mewakili. Persamaan di atas dinamakan persamaan kuadratur Gauss dua titik. Persamaan ini dapat diperluas menjadi 3 titik, 4 titik, dan seterusnya.

Persamaan di atas memiliki empat buah variabel yang tidak diketahui. Variabel-variabel tersebut harus diisi sedemikian sehingga galat yang dihasilkan minimum. Oleh karena itu dicari empat persamaan simultan yang mengandung c_1, c_2, x_1, dan x_2.

Dengan mengambil fungsi yang memiliki galat = 0 jika dihitung dengan aturan trapezium, dalam hal ini adalah f(x) = 1 dan f(x) = x, maka kita dapatkan :

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} 1\, dx = x|_{-1}^{1} = 2 = c_1 + c_2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^{1} = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Kemudian ditambahkan lagi dua persamaan dengan asumsi f(x) = x^2 dan f(x) = x^3 juga menghasilkan nilai yang sejati (galat = 0) jika dihitung dengan metode trapesium. Sehingga diperoleh 4 persamaan, yaitu :

$$c_1 + c_2 = 2$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$
$$c_1 {x_1}^2 + c_2 {x_2}^2 = \frac{2}{3}$$
$$c_1 {x_1}^3 + c_2 {x_2}^3 = 0$$

yang apabila dipecahkan menghasilkan :

$c_1 = c_2 = 1$

$x_1 = 0.5773502$

$x_2 = -0.5773502$

Jadi, diperoleh persamaan :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f(0.5773502) + f(-0.5773502)$$

Persamaan di atas dinamakan metode Gauss-Legendre 2 titik. Dengan metode ini, menghitung integral f(x) dalam selang [-1.1] cukup hanya dengan mengevaluasi fungsi f di x = 0.5773502 dan di x = -0.5773502

Untuk menghitung integral secara umum, misalnya kita mempunyai integral :

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

maka kita harus melakukan transformasi menjadi bentuk umum Gauss-Legendre, dalam hal ini yang harus ditaransformasi adalah selang [a,b] menjadi [-1,1], variable x menjadi variable t, serta dx menjadi dt.

Dengan melakukan perbandingan garis, maka diperoleh:

$$x = \frac{(a+b) + (b-a)t}{2}$$

sehingga diperoleh persamaan diferensialnya :

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Maka setiap persamaan integrasi dapat ditransformasi ke dalam bentuk Gauss-Legendre dengan mengganti selang [a,b] menjadi [-1,1] serta menggunakan dua persamaan di atas untuk mengganti variabelnya.

Untuk Gauss-Legendre n titik dapat diturunkan dengan cara yang sama dengan menambahkan asumsi bahwa kuadratur Gauss bernilai sejati untuk f(x) = x^n, sesuai jumlah variable yang diperlukan untuk diketahui. Untuk menentukan nilai variable pada Gauss-Legendre hingga 6 titik dapat dilihat pada table berikut :

Metode Gauss-Legendre n-titik $\int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$			
n	**Faktor bobot**	**Argumen fungsi**	**Galat pemotongan**
2	$c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$	$x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$	$\approx f^{(4)}(c)$
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0$ $x_1 = 0.774596669$	$\approx f^{(6)}(c)$
4	$c_1 = 0.347854845$ $c_2 = 0.652145155$ $c_3 = 0.652145155$ $c_3 = 0.347854845$	$x_1 = -0.861136312$ $x_2 = -0.339981044$ $x_3 = 0.339981044$ $x_4 = 0.861136312$	$\approx f^{(8)}(c)$
5	$c_1 = 0.236926885$ $c_2 = 0.478628670$ $c_3 = 0.568888889$ $c_4 = 0.478628670$ $c_5 = 0.236926885$	$x_1 = -0.906179846$ $x_2 = -0.538469310$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0.538469310$ $x_5 = 0.906179846$	$\approx f^{(10)}(c)$
6	$c_1 = 0.171324492$ $c_2 = 0.360761573$ $c_3 = 0.467913935$ $c_4 = 0.467913935$ $c_5 = 0.360761573$ $c_6 = 0.171324492$	$x_1 = -0.932469514$ $x_2 = -0.661209386$ $x_3 = -0.238619186$ $x_4 = 0.238619186$ $x_5 = 0.661209386$ $x_6 = 0.932469514$	$\approx f^{(12)}(c)$

Tabel 1. Daftar koefisien Gauss-Legendre

III. METODE KUADRATUR CLENSHAW-CURTIS

Metode Clenshaw-Curtis, sesuai namanya, dikembangkan oleh Clenshaw dan Curtis pada tahun 1960. Metode ini sebenarnya merupakan modifikasi dari metode yang sudah ada sebelumnya, yaitu metode kuadratur Fejer. Namun ada beberapa perbedaan yang akan dijelaskan nanti.

Metode kuadratur Clenshaw-Curtis adalah metode untuk mencari solusi persoalan integral dengan pendekatan numeric yang didasarkan pada perluasan atau pengembangan fungsi integrand menurut polinom Chebyshev. Dengan kata lain, fungsi integrand akan diubah menggunakan perubahan variable x=cos θ, sehingga f(x) akan menjadi f(cos θ), kemudian fungsi akan diproses menggunakan pendekatan deret kosinus.

Selain memiliki konvergensi yang cukup cepat, metode kuadratur Clenshaw-Curtis dikatakan memiliki akurasi yang sebanding dengan kuadratur Gauss. Metode ini akan mengarah kepada metode kuadratur bersarang (*nested quadrature*). Singkatnya, metode ini akan mentransformasi fungsi yang akan diintegralkan menjadi fungsi polinomial Chebyshev yang berbentuk deret kosinus.

Secara simpel, aturan metode ini dapat ditulis :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

dimana f(cos θ) adalah fungsi deret kosinus :

$$f(\cos\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta)\, d\theta$$

Sehingga, jika disubstitusikan ke dalam persamaan integral di atas akan menjadi :

$$I = \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2}$$

dengan

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)(\cos k\theta)\, d\theta$$

Jika persamaan tersebut terus diturunkan secara matematis, maka akan didapat persamaan akhir untuk menentukan pendekatan hasil pengintegralan sebagai berikut :

$$\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2} + \frac{a_n}{1-N^2}$$

IV. PERBANDINGAN KUADRATUR GAUSS-LEGENDRE DENGAN KUADRATUR CLENSHAW-CURTIS

Berdasarkan pemaparan singkat di atas mengenai dua metode kuadratur, yaitu metode kuadratur Gauss-Legendre dan metode kuadratur Clenshaw-Curtis, maka dapat dilihat bahwa kedua metode menggunakan persamaan yang berbeda. Metode kuadratur Gauss-Legendre mewakilkan pendekatan pengintegralan kepada dua atau lebih titik yang bisa merepresentasikan hasil sejati integral. Sedangkan metode Clenshaw-Curtis mentransformasi fungsinya menjadi deret fungsi kosinus.

Untuk melakukan perbandingan kedua metode ini, penulis menggunakan kakas MATLAB untuk menghitung integral beberapa persamaan matematika dengan kedua metode tersebut. Berikut ini adalah daftar hasil perhitungan yang penulis buat :

No	Integral	Gauss-Legendre	Clenshaw-Curtis
1	$\int_0^2 x^2 - 2x + 4\ dx$	6.6666667	6.6666667
2	$\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos x} dx$	1.57119366	1.57202960
3	$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx$	0.86751846	0.86738267
4	$\int_1^2 \frac{1}{e^x - 1} dx$	0.313236201	0.313261687
5	$\int_0^2 \frac{sin^2 x}{1+\cos x} dx$	0.001573949	0.00160289

Tabel2. Hasil perbandingan metode Gauss Legendre dengan Clendhaw-Curtis

Metode Gauss-Legendre yang digunakan adalah metode 3 titik, sedangkan metode Clenshaw-Curtis yang digunakan adalah metode 5titik. Masih ada beberapa persamaan integral yang penulis buat sebagai alat pembanding antara metode Gauss-Legendre dengan Clenshaw-Curtis. Namun lima persamaan di atas cukup menjadi contoh.

Metode Gauss-Legendre dan metode Clenshaw-Curtis jika jika dilihat dari hasil pengintegrasian tidak jauh berbeda. Galat keduanya berdasarkan statistik yang penulis buat paling besar adalah 0.01. Sedangkan jika dibandingkan dengan nilai sejatinya, metode kedua metode ini juga memiliki ketelitian yang cukup tinggi. Kadang metode Gauss-Legendre lebih teliti daripada metode Clenshaw-Curtis, kadang sebaliknya, tergantung fungsi yang diintegralkan.

Dari segi kemangkusan algoritma, dari hasil perbandingan yang penulis lakukan juga tidak berbeda. Waktu yang diperlukan untuk menghitung integral yang diberikan hampir sama.

V. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari perbandingan yang dilakukan antara metode kuadratur Gauss-Legendre dengan metode kuadratur Clenshaw-Curtis adalah bahwa keduanya memiliki ketelitian dan kemangkusan yang hampir sama untuk masalah integral yang diberikan. Namun metode Gauss-Legendre cenderung lebih sederhana dan lebih mudah dimengerti. Oleh karena itu sangat wajar jika metode Clenshaw-Curtis lebih kurang dikenal daripada metode Gauss-Legendre karena kekompleks-an metode tersebut.

VI. ACKNOWLEDGMENT

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas selesei dibuatnya *paper* ini dalam rangka memenuhi tugas mata kuliah IF4058 Metode Numerik. Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada Bapak Rinaldi Munir selaku dosen mata kuliah ini yang telah mengajarkan ilmu yang bermanfaat bagi penulis. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak, yang mohon maaf tidak dapat ditulis satu persatu, yang telah mendukung penulis dalam mengerjakan *paper* ini.

REFERENCES

Aziz, Imran, dkk, *A Quadrature Rule for Numerical Integration based on Haar Wavelets and Hybrid Functions*. 2010. Department Mathematics, University of Peshawar, Pakistan.

Dash, Rajani B, and Debasish Das, *A Mixed Quadrature Rule by Blending clenshaw-Curtis and Gauss-Legendre Quadrature Rules for Approximation of Real Definite Integrals in Adaptive Environment*. 2011. Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists.

Munir, Rinaldi, *Metode Numerik untuk Teknik Informatika*. 1997. Jurusan Teknik Informatika ITB.

Oliver, J, *A doubly adaptive Clenshaw Curtis Quadrature*. 2011. Computing Centre, University of Essex. Wivenhoe Park, Colchester, Essex. The Computer Journal.

Trefethen, Lloyd N., *Is Gauss Quadrature better than Clenshaw Curtis*. 2008. Society for industrial and applied Mathematics.

[1] Slide-slide mata kuliah Metode Numerik, diambil dari http://www.informatika.org/~rinaldi/Metnum/2010-2011/metnum10-11.htm#SlideKuliah (diakses pada tanggal 21 Maret 2011)

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Mei 2011

M. Pasca Nugraha
13507033