

# Studi dan Implementasi Integrasi Monte Carlo

Firdi Mulia - 13507045<sup>1</sup>

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

<sup>1</sup>if17045@students.if.itb.ac.id

**Abstrak**—Dalam matematika, integrasi Monte Carlo adalah integrasi numerik menggunakan angka acak. Integrasi ini digunakan untuk mengevaluasi nilai integral tentu, biasanya yang multidimensi. Berbeda dengan metode-metode integrasi yang lain, integrasi Monte Carlo menggunakan bilangan acak untuk mengambil titik sampel dari daerah yang diintegrasikan. Akan tetapi pembangkit bilangan acak yang sudah ada sekarang tidak ada yang bisa menghasilkan bilangan yang benar-benar acak. Karena itu perlu ditambahkan pemeriksaan agar bilangan yang dihasilkan acak dan diusahakan bilangan acak yang ada berjauhan dengan bilangan acak yang lain. Salah satu yang unik dalam metode integrasi Monte Carlo adalah galat yang diperoleh dari metode integrasi ini bisa berbeda tergantung dari jumlah datanya. Untuk data-data yang sedikit di dimensi yang sedikit, akurasi Monte Carlo lebih rendah dibanding metode-metode integrasi lain. Akan tetapi dengan bila datanya banyak dengan data yang banyak dan multidimensi, integrasi ini jauh lebih cepat dibandingkan metode integrasi yang lain.

**Index Terms**—Integrasi Monte Carlo, multidimensi, pembangkit bilangan acak, galat.

## I. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam ilmu sains yang melibatkan integrasi. Terkadang hasil integrasi ini dapat dihitung secara langsung secara matematis, tetapi seringkali hanya dibutuhkan suatu angka pasti yang mendekati hasil integrasi yang sebenarnya. Cara penghitungan untuk mendapatkan angka yang mendekati hasil integrasi yang sebenarnya disebut dengan integrasi numerik. Ada beberapa metode integrasi yang dikenal, akan tetapi pada makalah ini hanya akan berfokus pada metode Monte Carlo. Semua metode yang berupa prosedur numerik dimana keluarannya tergantung setidaknya pada sebuah variabel bilangan acak bisa disebut sebagai metode integrasi Monte Carlo.

Walaupun menggunakan bilangan acak, Monte Carlo mempunyai akurasi yang cukup tinggi karena mempunyai berdasarkan pada dasar teori probabilitas dan statistik. Untuk menghitung nilai integral dengan menggunakan metode Monte Carlo dibutuhkan suatu pembangkit bilangan acak dimana terdapat masalah juga dalam bagaimana bilangan semu-acak yang dihasilkan oleh komputer dapat memenuhi kebutuhan tersebut. Salah satu penerapan yang paling penting dari Monte Carlo adalah pada fenomena partikel dimana Monte Carlo

menghasilkan titik-titik pada ruang fase multipartikel.

## II. METODE MONTE CARLO

Prosedur integrasi numerik yang terkenal adalah metode *trapezoidal* atau *simpson*. Kedua prosedur tersebut berdasarkan teori limit jumlah Riemann dimana ketebalan dari luas bidang yang kecil mendekati 0, atau bisa dilihat di bawah ini.

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i \simeq \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Permasalahan yang sering ditemui adalah cara memperkirakan nilai integral dari sebuah fungsi  $f$  dari domain tertentu,  $V$ . Nilai integral dapat diperoleh dari rata-rata fungsi dari domain integrasi dengan formula sebagai berikut

$$I = V \cdot \langle f \rangle | V \quad (2)$$

Rata-rata dari fungsi dapat diperkirakan dari jumlah Riemann dari persamaan (1).

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3)$$

Cara selain mengevaluasi fungsi pada poin-poin yang berada pada *grid* adalah dengan menggunakan bilangan acak yang tersebar secara rata pada domain integral,  $V$ . Bilangan-bilangan acak ini dapat digunakan pada persamaan (3) dimana  $N$  merupakan angka poin acak yang dimasukkan ke domain integrasi. Konvergen dari jumlah  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$ , dimana  $x_i$  merupakan angka acak di  $V$ , nilai rata-rata dari fungsi yang ditentukan oleh integralnya. Hal ini sesuai dengan *the law of large number* yang berbunyi

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \rightarrow \frac{1}{V} \int_V f(x) dV \quad (4)$$

Untuk setiap  $x$  elemen dari  $V$ , dimana  $V$  dapat berupa multidimensi. Ruas kiri dari persamaan diatas adalah estimator yang konsisten dari integral di ruas kanan, karena hasil integrasi ini akan konvergen ke nilai yang pasti dari integral dan  $N$  akan mendekati nilai tak hingga. Ada beberapa syarat untuk  $f$  yaitu harus dapat diintegrasikan, integral ini tentu di titik manapun dan kontinu. Dengan persamaan 2 dan 4, bisa didapatkan estimasi integral yang disebut sebagai estimasi Monte Carlo untuk integral yaitu

$$I = V \cdot f \approx \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (5)$$

Sesuai dengan sebutannya yaitu estimasi, maka estimasi dari integral ini pasti akan selalu diikuti dengan sebuah *error*. Dari intuisi, semakin besar  $N$  maka estimasi dari integral akan semakin baik. Tetapi kekonvergenan yang pasti dari Monte Carlo tidak dapat ditentukan.

Teorema Limit Tengah memberikan deskripsi dari sebuah variabel dimana isi dari variabel tersebut merupakan jumlah dari variabel-variabel yang lain. Teorema limit tengah berbunyi :

(1) Distribusi dari  $\sum_{i=1}^N f(x_i)$  mempunyai nilai ekspektasi

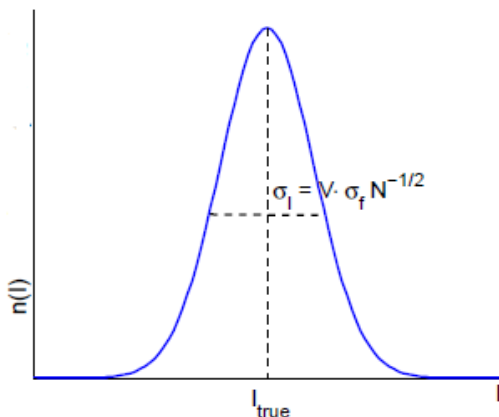
$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle f(x_i) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (6)$$

(2) Variansi didapatkan dari jumlah variansi individual

$$\text{Var} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \right) = \frac{1}{N^2} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^N f(x_i) \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}(f(x_i)) \quad (7)$$

Karena tiap variabel independen terhadap variabel yang lain, maka kovariansinya nol.

(3) Distribusinya adalah distribusi Gaussian dimana  $N$  mendekati tak hingga. Distribusi ini merupakan distribusi perkiraan rata-rata adalah distribusi Gaussian asimptotik (distribusi dari variabel asal tidak mempengaruhi distribusi ini). Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Kekonvergenan dari Metode Monte Carlo

Dari kalkulasi di atas, kesalahan dari estimasi,  $I$ , diberikan sebagai  $\sigma = V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$ , sehingga integralnya dapat didekati sebagai

$$I = V \cdot \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (8)$$

Kekonvergenan akan terjadi  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  untuk bilangan acak yang terdistribusi secara seragam.

### III. BILANGAN-BILANGAN ACAK

Bilangan-bilangan acak dapat dihasilkan dari sebuah proses fisik yang acak. Proses dari bilangan-bilangan yang acak tersebut harus tidak dapat diprediksi dan karena itu tidak dapat dihasilkan ulang. Dalam prakteknya, sangat sulit untuk membuat pembangkitnya yang cukup cepat dan pada waktu yang sama akurat. Pada penghitungan yang sebenarnya, sebuah pembangkit bilangan acak digunakan.

Sebuah pembangkit bilangan acak sebenarnya tidak menghasilkan bilangan-bilangan yang benar-benar acak, sehingga angka-angka ini dikenal dengan angka-angka yang acak semu. Angka-angka yang acak semu dihasilkan menurut formula matematis, karena itu dapat dihasilkan ulang dan tidak selalu acak kalau dilihat dari sisi matematis. Akan tetapi, angka-angka acak semu ini perlu dihasilkan sehingga bila seseorang membandingkan sebuah sekuens acak semu dan sebuah sekuens yang benar-benar acak, maka orang tersebut tidak bisa menebak bahwa angka itu dihasilkan oleh sebuah proses fisik.

Angka-angka acak yang dimasukkan ke suatu bidang tidak menutupi seluruh area secara seragam, sehingga bilangan-bilangan acak mungkin membentuk kelompok-kelompok yang menyebabkan ada ruang yang kosong. Jika tidak begitu penting untuk menutupi semua ruang secara seragam, maka bisa digunakan angka-angka quasi-acak. Angka-angka quasi-acak mengecek angka-angka yang sudah dibangkitkan sebelumnya agar memastikan angka dihasilkan berada cukup jauh dari angka-angka yang sudah dihasilkan, dengan cara seperti ini semua titik didistribusikan ke semua ruang tanpa meninggalkan ruang yang kosong.

Salah satu metode quasi-acak adalah *lattices*, yang dapat dianggap sebagai grid dengan sumbu-sumbu yang non-ortogonal. Misalnya ada  $n$  buah kumpulan bilangan-bilangan irasional, yaitu sebuah daftar dari bilangan prima yang dikuadratkan, maka angka ke  $i$  dihasilkan sebagai himpunan yang terdiri dari hasil perkalian  $i$  dan angka-angka irasional yang ada.

Perkiraan dari integral masih dapat digunakan

walaupun angka-angka quasi-acak dikorelasikan. Perkiraan kesalahan dapat dilihat pada persamaan yang sama, walaupun tidak dapat digunakan (kovariansinya tidak nol karena poin-poin berkorelasi). Metode-metode untuk mendapatkan estimasi dari *error* ini adalah sebagai berikut : integral-integral dikalkulasikan dua kali dengan setengah dari angka-angka acak yang ada pada setiap putaran. *Error* ini dapat diperkirakan sebagai perbedaan dari jumlah-jumlah yang diperoleh di setiap putaran.

#### IV. METODE PENGAMBILAN SAMPEL

Metode pengambilan sampling untuk integrasi Monte-Carlo adalah dengan mengambil sampel pada poin-poin yang acak, kemudian mengambil rata-rata dari poin-poin tersebut. Misalnya diambil  $N$  buah poin-poin  $x_i$  pada interval  $[a,b]$  pada bidang berdimensi satu. Maka integralnya berupa

$$A = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (9)$$

Misalnya dalam dimensi  $M$ , terdapat vektor

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM}) \quad (10)$$

Acak pada interval  $([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_m, b_m])$  yang dapat dilakukan secara mudah dengan menggunakan angka acak yang seragam untuk setiap dimensi pada waktu yang sama. Bila ada  $N$  dari titik-titik seperti itu, maka perkiraan Monte Carlo pada volume berdimensi  $(M+1)$  dibawah fungsi dimensi  $M$  dari  $f(\mathbf{x})$  adalah

$$V^{(M+1)} \approx V^{(M)} \frac{\sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i)}{N} = V^{(M)} \langle f \rangle \quad (11)$$

Dimana ruas kanan menekankan kesamaan dengan integrasi numerik.

Terdapat juga metode lain dalam mengambil sampel, salah satunya adalah metode adaptif. Bila diberikan sekumpulan sampel, variansi yang lebih rendah biasanya berarti perkiraan yang lebih baik dari rata-rata. Bila batas atas dari variansi sampel diperbaiki, dapat diiterasi untuk mendapatkan sampel baru dan dihitung ulang sampai di bawah batas yang telah ditetapkan. Ketika ini terjadi, kita dapat menggunakan rata-rata sampel sebagai perkiraan yang bagus dari rata-rata yang sebenarnya, dimana pada kasus ini adalah nilai dari integral.

Ada beberapa kesulitan yang muncul dari metode ini. Untuk memperbaiki batas atas dari variansi dibutuhkan pengalaman yang baik dari persoalan yang dihadapi, tidak ada batas universal dimana perkiraannya akan selalu bagus di semua kasus. Sampel yang diambil juga tidak boleh terlalu sedikit dimana tidak ada jaminan bahwa

rata-rata sampel adalah estimasi yang bagus dari nilai integral karena metode yang digunakan adalah metode non-deterministik. Akan tetapi, pada prakteknya metode pengambilan sampel adaptif efektif dalam mengambil sampel sebanyak-banyaknya sesuai dengan kebutuhan dalam memperkirakan nilai integral.

Metode pengambilan sampel yang kedua adalah metode pengambilan bertingkat-tingkat. Bila ukuran domain dari variabel acak dikurangi ukurannya maka sampel acak yang dihasilkan akan semakin dekat sehingga variansi dari sampel tersebut akan berkurang.

Karena itu, terdapat cara lain untuk mengurangi variansi adalah dengan membagi domain awal dari integrasi  $D$  menjadi subset yang tidak saling *overlap*. Kemudian sampel bilangan acak dihasilkan sedemikian rupa sehingga dijamin setidaknya ada satu sampel di tiap subset.

Untuk variabel-variabel yang independen (seperti pada sampel acak) total variansi dari distribusi yang dihasilkan adalah jumlah dari variansi distribusi dari subset yang lebih kecil. Secara umum, semakin kecil suatu daerah, maka fungsinya akan semakin konstan pada daerah tersebut, sehingga variansinya akan berkurang dengan sangat banyak. Karena itu, ketika variansi dijumlahkan untuk mendapatkan total variansi dari kumpulan sampel, hasilnya seharusnya lebih kecil dari variansi kumpulan sampel yang diambil dari seluruh domain.

Teknik ini menjamin subdaerah yang lebih kecil dari daerah secara keseluruhan memiliki jumlah sampel tertentu sehingga disebut dengan metode sampel bertingkat. Keuntungan utama dari sampel bertingkat adalah tidak adanya kesalahan yang fatal : integral memperkirakan berdasarkan sampel yang bertingkat tidak akan lebih jelek secara probabilistik dibandingkan perkiraan dari sampel yang tidak bertingkat.

Permasalahan dari metode ini adalah pada setiap subset dari domain harus memiliki setidaknya satu sampel. Sehingga walaupun subset yang banyak dapat mereduksi variansi dari sampel, tetapi juga membutuhkan lebih banyak sampel untuk diambil. Jumlah subset yang ideal tergantung dari permasalahan yang dihadapi, tidak ada nilai global untuk semua kasus.

#### V. ANALISIS GALAT INTEGRASI MONTE CARLO

Pada studi apapun dimana statistik dikumpulkan (dimana termasuk kebanyakan ilmu eksperimental dan komputasional), sangat penting untuk dapat menghitung tidak hanya suatu rerata, tetapi juga ketidakpastian dari rerata. Untuk metode simulasi Monte Carlo yang dideskripsikan di atas dapat dilakukan sebagai berikut.

##### A. Metode Sampling

Untuk metode sampling, kesalahan dapat diperoleh dengan cara yang mudah. Perlu diingat bahwa volume kalkulasi dianggap sebagai kalkulasi dari rata-rata fungsi  $f$ . Maka galat dapat dihitung sebagai galat rata-rata dari nilai sampel dari  $f$ , seperti yang biasanya dilakukan.

Persamaan umum untuk galat rata-rata  $\sigma$  dari kumpulan titik  $x$  adalah

$$\sigma_x \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (11)$$

Dimana variansi  $\sigma^2$  didapatkan dari

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - N(\bar{x})^2 \right] \quad (12)$$

Bila hasil-hasil ini digabungkan dan diasumsikan  $N$  jauh lebih besar dari 1

$$\sigma_x \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} \quad (14)$$

Sekarang untuk integrasi MC titik  $x_i$  merupakan nilai dari fungsi  $f$ ! Dengan menggunakan notasi yang sama seperti diatas untuk rata-rata

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N} \quad \text{dan} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f^2(x_i)}{N} \quad (15)$$

Karena itu didapatkan galat dari integral Monte Carlo adalah

$$\sigma_{V(f)} \approx V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (16)$$

Dan bila diiterasi ulang, persamaan integral Monte Carlo menjadi

$$\int f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (17)$$

Persamaan ini akan memberikan galat sebesar satu sigma yang artinya bila data didistribusikan dalam distribusi Gauss, peluang bahwa nilainya akan bernilai *true* dalam satu galat sigma adalah sebesar 2/3 (atau 68.3%). Interval yang lebih besar dapat diberikan misalnya  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  dan lain-lain dengan peluang yang semakin bertambah besar bahwa nilai *true* dalam nilai yang diukur adalah sumbu galat. Dari isini dapat terlihat mengapa integral Monte Carlo sangat berguna pada multi dimensi – keakuratannya bertambah sesuai dengan  $\sqrt{N}$ , tetapi tidak ada dependensi terhadap jumlah dimensi di sini. Jadi untuk mendapatkan akurasi yang lebih dapat dibandingkan, diperlukan kumpulan angka-angka yang sama dari titik-titik  $N$  yang tidak tergantung pada dimensinya. Ini sangat berbeda bila dibandingkan dengan integral numerik langsung dimana jumlah titik diperlukan

sebagai  $N_1^d$  dimana  $d$  merupakan dimensi dan  $N_1$  merupakan jumlah titik yang diperlukan dalam satu dimensi.

Tetapi ada dua permasalahan dalam perkiraan galat ini. Yang pertama adalah tidak ada jaminan bahwa titik  $f$  mempunyai distribusi Gauss, dan karena itu kesalahan yang diberikan harus dipahami sebagai ide yang “kasar” dimana tingkatan ketidakpastian dibutuhkan. Jika distribusi yang dipakai bukanlah distribusi yang dikenalo, maka selalu mungkin untuk menggunakan simulasi Monte Carlo dari distribusi data untuk mendeduksi bagaimana galat seharusnya dihitung.

Masalah yang kedua adalah jika data mempunyai distribusi Gauss, maka persamaan Monte Carlo tidak akurat untuk  $N$  yang sangat rendah. Galat yang sebenarnya diperoleh dengan menghitung fungsi rata-rata dengan menggunakan  $N-1$  dibandingkan menggunakan  $N$  di nyebut

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N-1} \quad \text{dan} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f^2(x_i)}{N-1} \quad (19)$$

Karena itu dalam menghitung galat rata – rata :

$$\sigma_{V(f)} \approx V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (20)$$

Dengan mengkuadratkan galat didapatkan faktor dilatasi *student* yang bisa dilihat di tabel 1.

Tabel 1. Faktor Dilatasi *Student*

N :	2	3	4	6	11
Faktor Dilatasi <i>Student</i>	1.84	1.32	1.20	1.11	1.05

Koreksi ini mungkin sangat dibutuhkan tidak hanya ketika  $N < 10$  (galat dimana galat lebih kecil dari 5% hampir pasti tidak penting di kebanyakan konteks). Karena pada kebanyakan simulasi MC,  $N$  lebih besar dari 10, maka ini bukanlah sebuah masalah. Akan tetapi pada interval yang besar ( $2\sigma, 3\sigma$ , dan seterusnya), koreksi menjadi lebih besar secara signifikan pada  $N$  yang semakin besar.

Akan tetapi pada banyak kasus dimana bentuk dari fungsi  $f$  tidak diketahui, maka pengevaluasiannya menjadi sangat lambat dan dapat diambil pada beberapa titik (sekitar 10 atau bahkan lebih kecil) sehingga tidak mungkin untuk mendeduksi distribusi apa yang dimiliki fungsi tersebut. Pada kasus-kasus tersebut, cara yang paling umum adalah menggunakan persamaan galat umum dan berharap hasil yang didapat benar.

Pada prakteknya, kecenderungan umum menunjukkan bahwa bila tidak dijelaskan bagaimana galat dihitung, maka secara implisit galat yang diberikan adalah  $1\sigma$  atau

standar deviasi dihitung dengan statistik Gaussian. Dan kasus dimana galat atau standar deviasikan tidak dispesifikasikan terjadi dengan sangat banyak. Dan bahkan kebanyakan ilmuwan tidak peduli dengan kesalahan-kesalahan yang mungkin muncul dengan penggunaan statistik Gaussian.

**B. Metode Tebak Salah**

Pada metode tebak salah, volume dari area yang akan diintegrasikan adalah

$$V = V_e f = V_e \frac{N_h}{N} \tag{21}$$

Dimana n merupakan jumlah tebakan, dan N merupakan jumlah percobaan. Untuk menemukan galat dari metode tebak salah, dapat dilihat dari observasi dimana metode tebak salah ini sebenarnya adalah sebuah variasi dari metode pengambilan sampel.

$$V = V_e f_h = V_e \langle f \rangle \tag{22}$$

Dimana f merupakan fungsi yang bernilai 1 jika x berada di dalam volume dan 0 bila di luar volume. Jadi galatnya adalah :

$$\sigma_{V_e(f)} \approx V_e \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \tag{23}$$

Dengan

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N} \quad \text{dan} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f^2(x_i)}{N} \tag{24}$$

Tetapi perlu dipertimbangkan bahwa bentuk sederhana dari f yang ditunjukkan di atas dapat disederhanakan menjadi  $N_h/N$ , begitu juga dengan fungsi f yang dikuadratkan, sehingga galatnya menjadi

$$\sigma_{V_e(f)} \approx V_e \sqrt{\frac{(N_h/N) - (N_h/N)^2}{N}} = V_e \sqrt{\frac{N_h - N_h^2/N}{N^2}} = V_e \frac{\sqrt{N_h - N_h^2/N}}{N} \tag{26}$$

Dan persamaan untuk volume yang diintegrasikan dan galatnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$V = V_e \frac{N_h}{N} \pm V_e \frac{\sqrt{N_h - N_h^2/N}}{N} \tag{27}$$

Untuk  $N_h$  jauh lebih kecil dari N, persamaan tersebut dapat disederhanakan lebih jauh sehingga didapatkan :

$$V = V_e \frac{N_h}{N} \pm V_e \frac{\sqrt{N_h}}{N} \tag{28}$$

Ini merupakan galat “akar kuadrat” yang digunakan dalam statistika Poisson.

**VI. KEUNGGULAN MONTE CARLO**

Dapat dilihat dari persamaan (5) bahwa integral Monte Carlo hanya membutuhkan 1 buah penjumlahan saja, sangat berbeda dibandingkan integral lain yang membutuhkan banyak penjumlahan. Karena itu integral Monte Carlo sangat penting di banyak dimensi. Pada dimensi 1 tidak ada perbedaan yang signifikan, dan menggunakan metode seperti metode integral numerik yang konvensional seperti Simpson lebih akurat dan lebih efisien dari integral MC. Tetapi dengan bertambahnya jumlah dimensi M, menjumlahkan sebanyak M membutuhkan komputasi yang besar. Karena itu pendekatan Monte Carlo yang hanya menggunakan satu penjumlahan jelas lebih sederhana.

Untuk penjelasan mengenai komputasi yang lebih besar, untuk integral numerik diperlukan setidaknya beberapa poin N per dimensi untuk mendapatkan suatu hasil, jadi jumlah langkah penjumlahan bertambah sejumlah  $N_i^M$ . Bila  $N_i = 5$  untuk semua i (yang berarti nilai yang sangat kecil), maka dalam 10 dimensi dibutuhkan  $5^{10} \approx 10$  juta poin untuk mendapatkan suatu hasil yang diperlukan. Tetapi dalam integrasi Monte Carlo digunakan jumlah poin yang sama untuk semua dimensi.

Untuk lebih memperjelas hal ini, ada sebuah percobaan. Volume bola di dimensi M dihitung dengan integrasi numerik yang langsung (menggunakan metode titik tengah) dan dengan menggunakan metode Monte Carlo. Jumlah interval adalah 20 di setiap integrasi di tiap dimensi, dan jumlah percobaan untuk simulasi Monte Carlo selalu  $10^5$ . Hasil yang didapat kemudian dibandingkan, dan sekitar 0.5% akurat.

Hasilnya dapat dilihat pada tabel 2. Kolom pertama merupakan jumlah dimensi M, sedangkan kolom berikutnya adalah waktu eksekusi numerik, dua kolom berikutnya merupakan hasil dari integrasi Monte Carlo, sedangkan kolom terakhir merupakan jawaban yang benar (yang dihitung secara analitik). Satuan waktu yang digunakan adalah detik.

Tabel 2. Hasil Percobaan Integral Monte Carlo

M	Waktu	Hasil	Waktu MC	Hasil MC	Hasil Pasti
2	0.00	3.1524	0.01	3.1435	3.1415
3	0.00	4.1737	0.07	4.1896	4.1887
4	0.00	4.9023	0.08	4.9330	4.9348
5	0.02	5.2381	0.10	5.2787	5.2637
6	0.30	5.1451	0.13	5.1748	5.1677
7	5.02	4.6704	0.15	4.7098	4.7247
8	89.9	3.9595	0.17	4.0479	4.0587
9	1320	3.3998	0.20	3.3191	3.2985

## VII. IMPLEMENTASI

Dari teori di atas, saya mengimplementasikan metode Monte Carlo ini ke dalam bentuk aplikasi dengan bahasa C#. Saya juga mengimplementasikan metode-metode integral yang lain sehingga hasilnya bisa dibandingkan. Hasil eksekusi programnya dapat dilihat pada lampiran.

Fungsi yang ditest adalah

$$\int_1^{100} 53.3904 * (1 - e^{-\left(\frac{12.5}{68.1}\right)*x}) \quad (29)$$

Dengan jumlah pias 100. Dari hasil eksekusi tersebut, terlihat bahwa tingkat keakuratan Monte Carlo lebih rendah dibanding metode yang lain. Hasilnya dikarenakan dimensi pada percobaan adalah hanya berdimensi 2, pada dimensi-dimensi yang kecil keunggulan dari Monte Carlo belum terlihat. Akan tetapi ketika dimensinya banyak, kecepatan Monte Carlo jauh lebih cepat dibanding metode integral yang lain, keakuratannya pun relatif tetap walaupun harus menangani data yang banyak.

## VIII. KESIMPULAN

1. Integrasi Monte Carlo adalah salah satu metode integrasi terbaik untuk menangani kasus dimana data-data berdimensi banyak
2. Keakuratan dari integrasi Monte Carlo relatif tetap walaupun dimensi data bertambah banyak.
3. Kelemahan dari metode ini adalah bila dimensi data kecil atau jumlah data yang kecil maka keakuratannya lebih rendah dibandingkan metode integrasi lain.
4. Penghitungan galat dari metode integrasi Monte Carlo bisa bermacam-macam tergantung dari data.
5. Integrasi Monte Carlo menggunakan bilangan acak sebagai sampel data sehingga dibutuhkan pembangkit bilangan acak.

## REFERENSI

- B. F. Jensen, *Monte Carlo Integration*. <http://www.phys.au.dk/~bfj/numeric/MonteCarloInt.pdf>. Tanggal akses : 11 Mei 2011.
- D. Edwards, *Monte Carlo Integration*. <http://www.cs.utah.edu/~edwards/research/mcIntegration.pdf>. Tanggal akses: 10 Mei 2011.
- K. Nordlund, *Monte Carlo Integration*. <http://beam.acclab.helsinki.fi/~knordlun/mc/mc5nc.pdf>. Tanggal akses : 10 Mei 2011.
- R. Kleiss, *Monte Carlo Integration*. [www.hef.ru.nl/~kleiss/mcnotes.pdf](http://www.hef.ru.nl/~kleiss/mcnotes.pdf). Tanggal akses : 13 Mei 2011.
- S. Nam, *Monte Carlo Integration*. [www2.hawaii.edu/~sejinnam/lab6/lab6.pdf](http://www2.hawaii.edu/~sejinnam/lab6/lab6.pdf). Tanggal akses : 12 Mei 2011.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

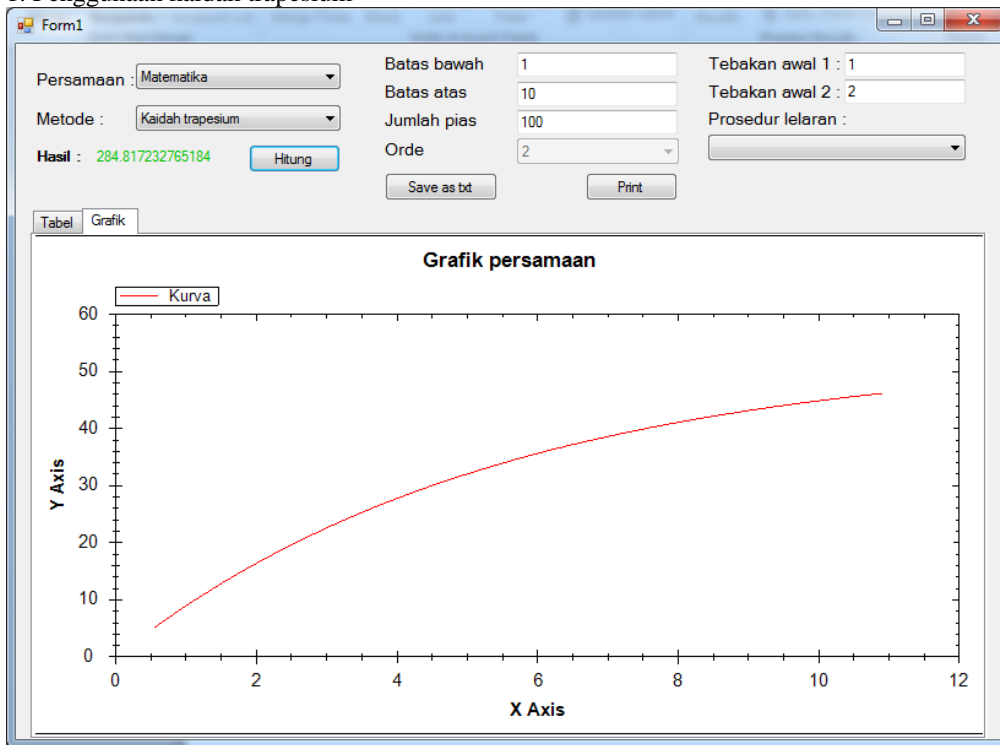
Bandung, 13 Mei 2011



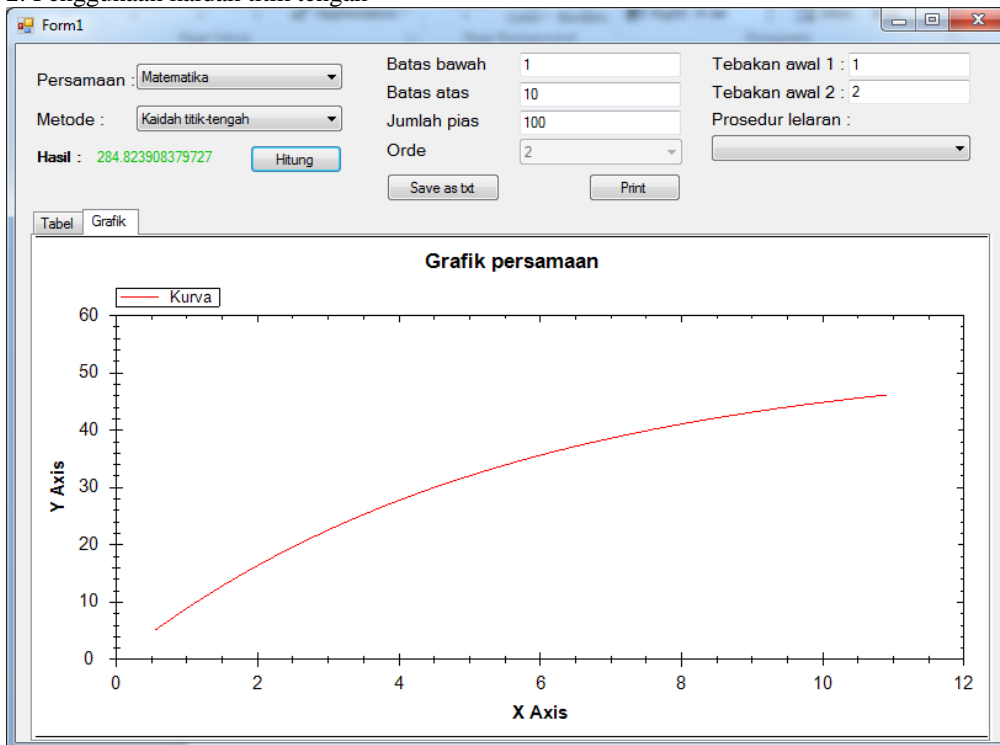
Firdi Mulia  
13507045

# LAMPIRAN

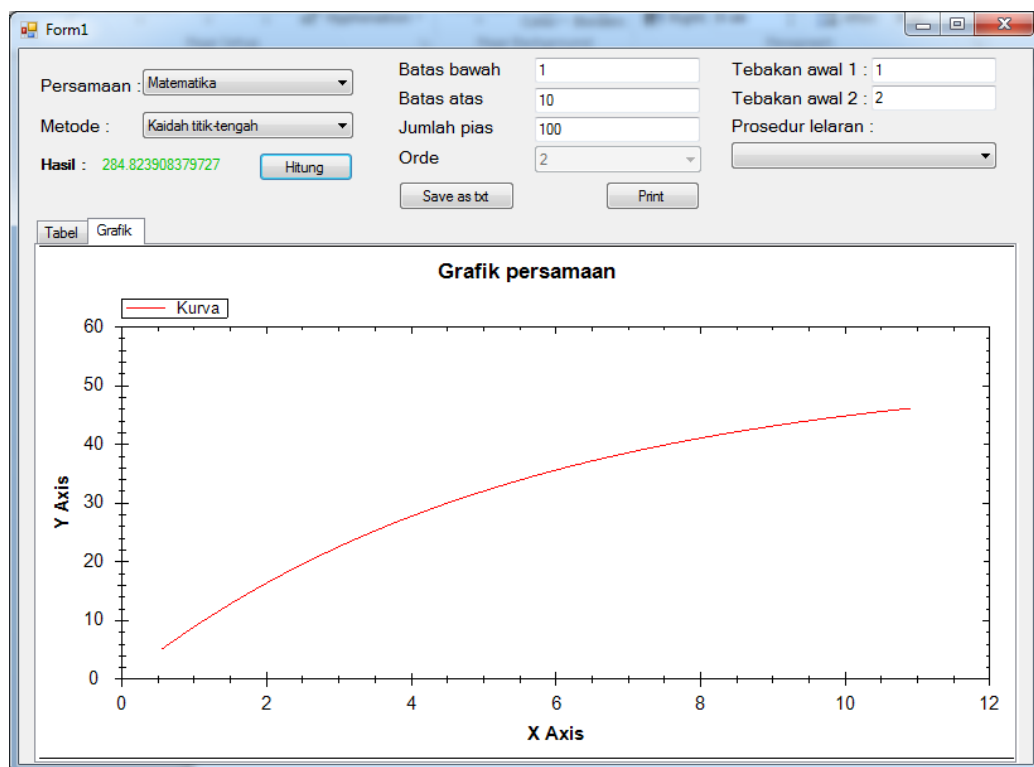
## 1. Penggunaan kaidah trapesium



## 2. Penggunaan kaidah titik tengah



### 3. Penggunaan kaidah Simpson 1/3



### 4. Penggunaan kaidah Monte Carlo

