Pencarian Akar pada Polinom dengan Kombinasi Metode Newton-Raphson dan Metode Horner

Hendy Sutanto - 13507011
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
hendysutanto8@gmail.com

***Abstrak*— Metode numerik adalah cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka. Salah satu persoalan matematika yang dapat diselesaikan adalah pencarian akar pada solusi persamaan nirlanjar yang pada umumnya berbentuk polinom. Polinom adalah pernyataan matematika yang melibatkan penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Namun pencarian akar pada polinom membutuhkan banyak operasi perkalian (termasuk pemangkatan). Metode Horner menyediakan cara perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian, polinom p(x) akan dinyatakan sebagai perkalian bersarang.**

***Kata Kunci*—Polinom, Horner**

I. PENDAHULUAN

Metode numerik adalah cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka. Jika dibandingkan dengan metode analitik yang memerlukan pemikiran dan analisa dengan bantuan rumus dan teorema yang sudah baku di bidang matematika, metode numerik menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmatika biasa. Dapat dikatakan, dengan metode numerik berbagai persoalan matematika dapat diselesaikan dengan bantuan komputasi menggunakan komputer karena hanya menggunakan operasi-operasi aritmatika saja.

Polinom adalah pernyataan matematika yang melibatkan penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Pangkat tertinggi pada suatu polinomial menunjukkan orde dari polinomial tersebut. Polinom yang memiliki derajat lebih dari satu akan berbentuk persamaan non linear. Akar pada suatu polinom memiliki arti suatu titik pada sumbu x, yang berpotongan dengan kurva fungsi polinom.

Namun pencarian akar pada polinom membutuhkan banyak operasi perkalian (termasuk pemangkatan). Semakin tinggi derajat polinomnya semakin banyak operasi perkalian yang diperlukan, yang berarti semakin besar rambatan galat pembulatannya. Karena itu, harus dicari suatu metode perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian.

Metode Horner menyediakan cara perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian, dalam hal ini polinom p(x) dinyatakan sebagai perkalian bersarang.

II. DASAR TEORI

A. Polinom

Polinom adalah pernyataan matematika yang melibatkan penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Sebuah polinomial dalam satu variabel dengan koefisien konstan memiliki bentuk seperti berikut:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pencarian akar adalah proses menemukan suatu nilai x di mana nilai fungsi di titik x itu bernilai 0. Pada polinom, jumlah akarnya dapat berjumlah banyak sampai sejumlah orde polinom tersebut. Orde polinom dapat ditentukan dari pangkat tertinggi dalam polinom tersebut.

B. Metode Horner

Pencarian akar pada polinom membutuhkan banyak operasi perkalian (termasuk pemangkatan). Semakin tinggi derajat polinomnya semakin banyak operasi perkalian yang diperlukan, yang berarti semakin besar rambatan galat pembulatannya. Karena itu, harus dicari suatu metode perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian.

Metode Horner menyediakan cara perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian, dalam hal ini polinom p(x) dinyatakan sebagai perkalian bersarang. Dalam metode numerik, metode Horner ditemukan oleh William George Horner yang menciptakan algoritma yang efisien dalam mengevaluasi polinomial dalam bentuk monomial. Metode Horner menjelaskan proses menghampiri nilai suatu akar dari polinom dengan cepat.

Berikut contoh dari pengubahan bentuk polinomial menjadi monomial:

$$P_5(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dapat ditulis dalam bentuk berakar (monomial)

$$P_5(x) = ((((a_5 x + a_4) x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0$$

Jumlah perkalian (dan pemangkatan) dalam bentuk berakar akan lebih sedikit dibanding dalam bentuk polinom biasa.

Contoh :

$p(x) = 8 + 6x + 2x^2 + 5x^3$ (6 buah perkalian)
$= 8 + x(6 + x(2 + 5x))$ (3 buah perkalian)

$p(2) = 8+2(6+2(2+5.2))$
$= 68$

Metode perkalian bersaran untuk menghitung p(t) seringkali dinyatakan dalam bentuk tabel Horner berikut :

x = t	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
		tb_n	…	tb_2	tb_1
	$b_n = a_n$	$b_{n-1} = a_{n-1} + tb_n$	…	$b_1 = a_1 + tb_2$	$b_0 = a_0 + tb_1 = p(t)$

Jadi untuk contoh di atas,

x = 2	5	2	6	8
		10	24	60
	5	12	30	68 = p(2)

dan menghasilkan polinom sisa $5x^2 + 12x + 30$.

Berikut algoritma metode Horner menggunakan MATLAB:

```
function [y b] = horner(a,x)
  % Input a is the polynomial
coefficient vector, x the value to be
evaluated at.
  % The output y is the evaluated
polynomial and b the divided
coefficient vector.
  b(1) = a(1);
  for i = 2:length(a)
    b(i) = a(i)+x*b(i-1);
  end
  y = b(length(a));
  b = b(1:length(b)-1);
end
```

C. Pencarian Akar-Akar Polinom

Proses penghitungan p(x) untuk x = t dengan menggunakan metode Horner sering dinamakan *pembagian sintetis* p(x) : (x-t), menghasilkan q(x) dan sisa b_0,

$$\left[\frac{p(x)}{(x-t)} = q(x)\right] + \text{sisa } b_0$$

atau

$p(x) = b_0 + (x\text{-}t)\, q(x)$

yang dalam hal ini

$q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_3x^2 + b_2x + b_1$

Untuk contoh di atas,

$p(x) = 8 + 6x + 2x^2 + 5x^3$
$= 68 + (x\text{-}2) + (5x^2 + 12x + 30)$

Jika t adalah hampiran akar polinom p(x) maka

$p(t) = b_0 + (t\text{-}t)q(t) = b_0 + 0 = b_0$

(perhatikan, jika t akar sejati, maka $b_0 = 0$)

Akar-akar lain dari p(x) daoat dicari dari polinom q(x) sebab setiap akar q(x) juga adalah akar p(x). Proses reduksi polinom ini disebut *deflasi (deflation)*. Koefisien-koefisien q(x), yaitu b_n, b_{n-1}, …, b_3, b_2, b_1 dapat ditemukan langsung dari tabel Horner.

$b_n = a_n$
$b_{n-1} = a_{n-1} + tb_n$
…
$b_1 = a_1 + tb_2$

D. Metode Newton-Raphson

Dari semua metode pencarian akar yang ada, metode Newton Raphson merupakan yang paling terkenal dan paling banyak dipakai di bidang sains dan rekayasa. Metode ini disukai karena konvergensinya yang paling cepat dibanding metode lainnya. Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Rapson, yaitu dengan tafsiran geometri dan dengan deret Taylor. Pada makalah ini akan digunakan pendekatan dengan deret Taylor.

Rumus metode Newton-Raphson

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

dengan syarat $f'(x_r) \neq 0$

Berikut pseudocode algoritma Newton-Raphson

```
procedure Newton_Raphson(x:real);
{ Mencari akar persamaan f(x) = 0
dengan metode Newton-Raphson
K.Awal : x adalah tebakan awal akar,
nilainya sudah terdefinisi
K.Akhir: akar persamaan tercetak di
layar }

const
   epsilon = 0.000001;

var
x_sebelumnya: real;
```

```
   function f(x:real):real;
   { mengembalikan nilai f(x).
   Definisi f(x) bergantung pada
   persoalan }

   function f_aksen(x:real):real;
   { mengembalikan nilai f'(x).
   Definisi f'(x) bergantung pada
   persoalan }

begin
   repeat
      x_sebelumnya:=x;
      x:=x - f(x)/f_aksen(x);
   until (ABS(x-x_sebelumnya) <
epsilon)
   { x adalah hampiran akar persamaan
}
   write('Hampiran akar x = ',
x:10:6);
end;
```

III. ANALISIS

Pada metode numerik, metode Horner digunakan untuk menyederhanakan suatu polinom, sedangkan untuk mencari akar dari suatu polinomnya ada bermacam metode lagi. Dalam makalah ini kita akan menggunakan metode Newton-Raphson karena metode tersebut paling cepat konvergensinya dibanding metode lain.

Untuk menggunakan metode Newton-Raphson, kita tidak hanya memerlukan polinom tapi kita juga perlu turunan fungsi. Selain untuk mengurangi jumlah operasi perkalian pada polinom, metode Horner juga dapat membantu kita mencari turunan suatu polinom dengan efisien.

A. Turunan menggunakan metode Horner

Dalam pencarian turunan suatu polinom, dapat digunakan metode analitik atau numerik. Dengan metode numerik, kita dapat menghitung turunan suatu polinom menggunakan operasi aritmatika dengan bantuan komputasi komputer. Salah satunya dengan menggunakan metode Horner.

Asumsikan bahwa polinom P(x) :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

dan x=z adalah nilai di mana P(z) dan P'(z) akan dievaluasi. Kita telah melihat P(z) = b_0 dapat dihitung secara rekursif.

$b_n = a_n$ dan
$b_k = a_k + zb_{k+1}$ for k=n-1, n-2, …, 2, 1, 0

Polinom sisa $Q_0(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_3x^2 + b_2x + b_1$ dengan nilai sisa $R_0 = b_0 = P(z)$

$$P(x) = (x-z)Q_0(x) + R_0$$

kita dapat menghitung P'(z) = c_1 dapat dihitung secara rekursif dengan cara berikut:

$c_n = b_n$ dan
$c_k = b_k + z\, c_{k+1}$ untuk k = n-1, n-2, …, 2, 1

Polinom sisa $Q_1(x) = c_x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} + \dots + c_4x^2 + c_3x + c_2$ dan nilai sisa $R_1 = c_1 = P'(z)$ membentuk relasi:

$$Q_0(x)(x) = (x-z)\, Q_1(x) + R_1$$

Tabel Horner yang digunakan untuk menghitung turunan ini berbentuk:

input x = z	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
		zb_n	…	zb_2	zb_1
	b_n	b_{n-1}	…	b_1	$b_0 = P(z)$ output
	b_n	b_{n-1}	…	b_1	
		zc_n	…	zc_2	
	c_n	c_{n-1}	…	$c_1 = P'(z)$ output	

B. Metode Newton-Horner

Kita telah melihat bahwa metode Horner sangat mempermudah penghitung nilai dan turunan suatu polinom di nilai x, sekarang kita dapat memanfaatkan metode Newton-Raphson. Daripada membuat dua fungsi berbeda untuk menghitung nilai dan turunan suatu polinom, kita dapat menggabungkan kedua metode itu menjadi metode Newton-Horner

Asumsikan bahwa polinom P(x) berderajat n ≥ 2 dan terdapat angka r ϵ [a, b], di mana P(r) = 0. Jika P'(r) ≠ 0 maka terdapat δ > 0 seperti $\{r_k\}_{k=0}$ yang didefinisikan pada formula iterasi Newton-Raphson

$$r_{k+1} = r_k - f(r_k) / f'(r_k) \qquad \text{untuk } k = 0,1,\dots$$

dengan penurunan rumus diperoleh rumus Newton-Horner:

$$r_{k+1} = r_k - b_{[1]} / c_{[2]} \qquad \text{untuk } k = 0,1,\dots$$

C. Pencarian akar menggunakan kombinasi metode Newton-Raphson dan metode Horner

Dengan menggunakan skema Horner dikombinasikan dengan pencarian akar Newton-Raphson dimungkinkan pencarian akar sejati dari suatu polinom. Algoritmanya sebagai berikut:

Diberikan sebuah polinom $p_n(x)$ derajat n dengan akar $z_n < z_{n-1} < \dots < z_1$. Lakukan tebakan awal x_0 sehinggan $x_0 > z_1$ dan lakukan langkah-langkah berikut:

1. Menggunakan metode Newton-Raphson, cari akar terbesar z_1 dari $p_n(x)$ menggunakan tebakan awal x_0
2. Gunakan skema Horner untuk membagi $(x-z_1)$ untuk memperoleh p_{n-1} (polinom hasil bagi)
3. Ulangi dari langkah 1 namun menggunakan polinom p_{n-1} dan tebakan awal z_1

Langkah di atas diulang terus hingga semua akar polinom ditemukan. Jika akar yang diaproksimasi masih tidak presisi, nilai yang diperoleh dapat digunakan sebagai tebakan awal untuk metode Newton-Raphson namun menggunakan polinom awal, bukan polinom yang sudah direduksi (dari hasil pembagian)

Berikut contoh pencarian akar menggunakan kombinasi metode Newton-Raphson dan metode Horner:

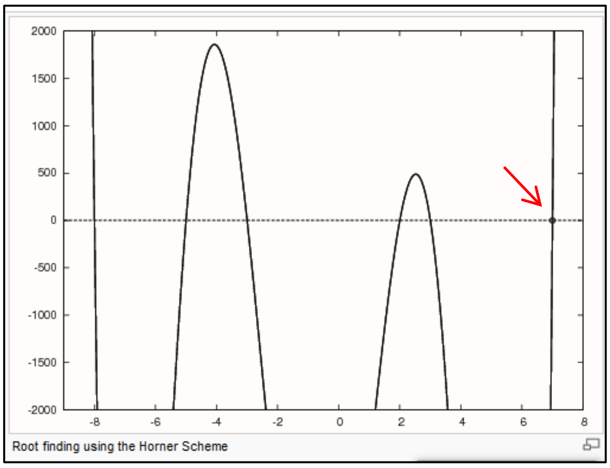
Sebuah polinom

$p_6(x) = (x-3)(x+3)(x+5)(x+8)(x-2)(x-7)$

dapat dikembangkan menjadi

$p_6(x) = x^6 + 4x^5 – 72x^4 – 214x^3 +1127x^2 + 1602x -5040$

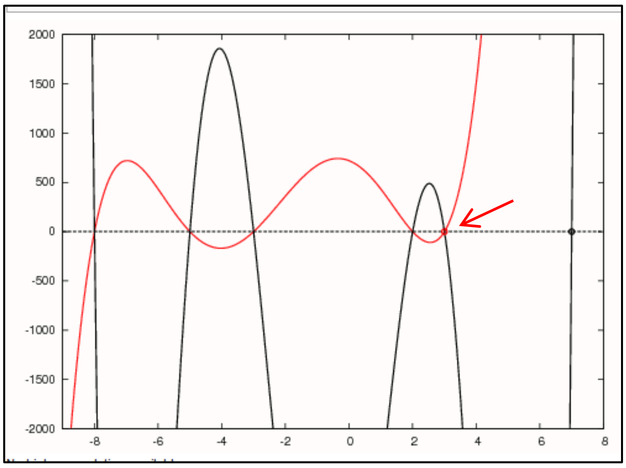
Dari polinom awal kita dapat melihat bahwa akar terbesar adalah 7, jadi kita bisa melakukan tebakan awal 8. Dengan menggunakan metode Newton-Raphson kita dapat memperoleh akar pertama yaitu 7, sesuai yang ditunjukkan dengan titik hitam pada gambar berikut



Selanjutnya p(x) dibagi (x-7) kita memperoleh

$p_5(x) = x^5 + 11x^4 + 5x^3 – 179x^2 -126x + 720$

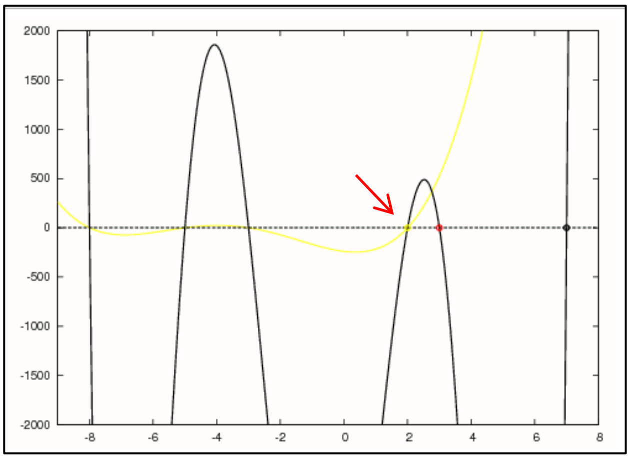
yang digambarkan dengan kurva berwarna merah pada gambar di bawah. Metode Newton-Raphson akan mencari akar terbesar dari polinom p_5 dengan menggunakan tebakan awal 7. Akar terbesar yang merupakan akar kedua terbesar dari polinom awal ditemukan pada titik x=3 yang ditunjukkan dengan titik merah.



Polinom berderajat 5 ini sekarang akan dibagi dengan (x-3) untuk memperoleh:

$p_4(x) = x^4 + 14x^3 +47x^2 -38x – 240$

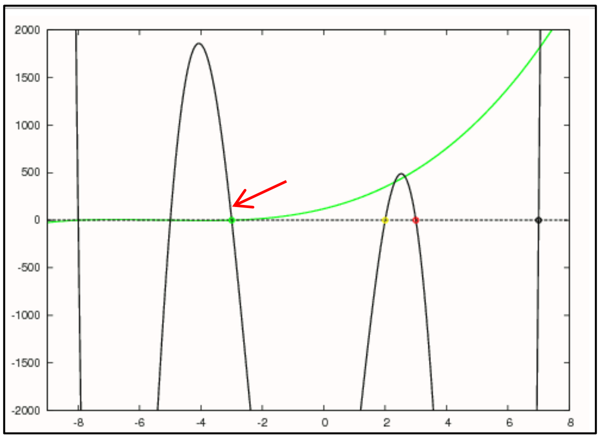
Polinom ini ditunjukan dengan kurva berwarna kuning dan akarnya diperoleh di titik 2 yang ditunjukan dengan titik berwarna kuning



Menggunakan skema Horner, diperoleh polinom p_3

$p_3(x) = x^3 + 16x^2 + 79x + 120$

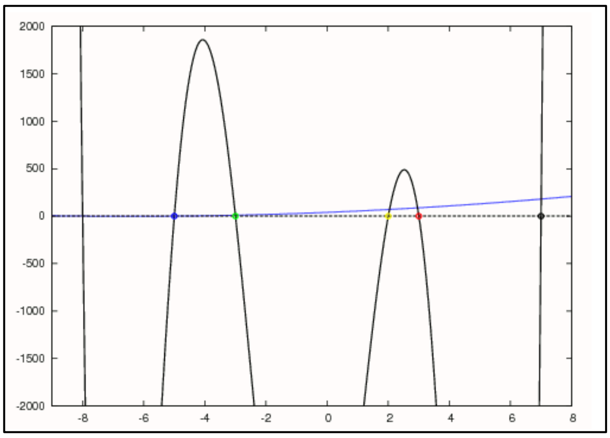
yang ditunjukkan dengan kurva berwarna hijau dan memiliki akar di titik -3



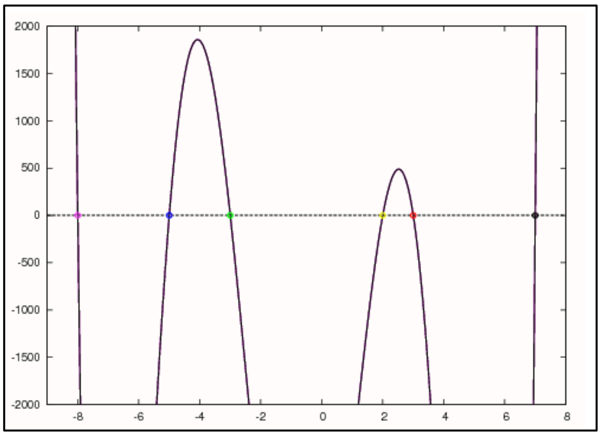
yang kemudian akan direduksi lagi menjadi polinom $p_2(x)$

$p_2(x) = x^2 + 13x + 40$

yang ditunjukan dengan kurva berwarna biru dan memiliki akar -5



Akar terakhir dari polinom awal dapat ditemukan menggunakan akar terakhir sebagai tebakan awal pada Newton Raphson, atau dengan memecah lagi $p_2(x)$ dan menyelesaikan persamaan linear-nya. Seperti yang dapat dilihat di gambar berikut, akar yang ditemukan adalah -8, -5, -3, 2, 3, dan 7.



IV. PENGUJIAN

Pada bab ini akan dilakukan perbandingan metode Newton-Horner dengan metode Newton-Raphson.

Diketahui polinom $P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$, cari nilai akar di titik $x = 3$

dengan Newton-Horner

$$
\begin{array}{llll}
r_0 = & 3.0000000000000000, & P[r_0] = & 17. \\
r_1 = & 2.3200000000000000, & P[r_1] = & 5.62609848320001 \\
r_2 = & 1.9560094736807230, & P[r_2] = & -0.895277042894989 \\
r_3 = & 1.9992543389453250, & P[r_3] = & -0.0149176691755244 \\
r_4 = & 1.9999997777286130, & P[r_4] = & -4.445428135824159 \times 10^{-6} \\
r_5 = & 1.9999999999999800, & P[r_5] = & -3.943512183468556 \times 10^{-13}
\end{array}
$$

$$r = 1.99999999999998$$
$$\Delta r = \pm 2.22271 \times 10^{-7}$$
$$P[r] = -3.943512183468556 \times 10^{-13}$$

dengan Newton-Raphson

$$
\begin{array}{llll}
r_0 = & 3.0000000000000000, & P[r_0] = & 17. \\
r_1 = & 2.3200000000000000, & f[r_1] = & 5.62609848320001 \\
r_2 = & 1.9560094736807230, & f[r_2] = & -0.895277042894993 \\
r_3 = & 1.9992543389453240, & f[r_3] = & -0.01491766917554926 \\
r_4 = & 1.9999997777286130, & f[r_4] = & -4.445428125166018 \times 10^{-6} \\
r_5 = & 1.9999999999999800, & f[r_5] = & -3.979039320256561 \times 10^{-13}
\end{array}
$$

$$r = 1.99999999999998$$
$$\Delta r = \pm 2.22271 \times 10^{-7}$$
$$P[r] = -3.979039320256561 \times 10^{-13}$$

Evaluasi menggunakan mentuk monomal dari polinom derajat n memerlukan paling banyan n buah penjumlahan dan $(n^2 + n)/2$ buat perkalian, jika pemangkatan dihitung dengan perkalian berkali-kali dan setiap monomial dievaluasi masing-masing. Telah ditunjukan bahwa skema Horner optimal, dalam artian setiap algoritma yang melakukan evaluasi polinom harus sesedikit mungkin melakukan operasi aritmatika.

V. KESIMPULAN

Kombinasi metode Horner dan metode Newton-Raphson akan memberikan komputasi yang lebih cepat dan mudah karena jumlah perkalian (dan pemangkatan) telah berkurang dengan adanya perubahan bentuk polinomial menjadi monomial.

REFERENSI

[1] R. Munir, “Metode Numerik untuk Teknik Informatika”. Bandung.1997

[2] http://www.math.pitt.edu/~troy/math2070/lab_05.html. Waktu akses 13 Mei 2011 pukul 02.00

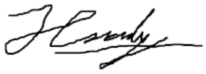
[3] http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/HornerMod.html Waktu akses 12 Mei 2011 pukul 15.37

[4] http://mathworld.wolfram.com/HornersMethod.html Waktu akses 12 Mei 2011 pukul 17.19

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 13 Mei 2011



Hendy Sutanto
13507011