Penerapan Integrasi Numerik pada Medan Magnet karena Arus Listrik

Rianto Fendy Kristanto - 13507036[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]if17036@students.if.itb.ac.id, f_nd_x@yahoo.com

Abstrak-Materi kalkulus sering dipakai untuk menyelesaikan perhitungan pada persoalan bidang-bidang ilmu lainnya. Misalnya, persoalan bidang fisika tentang analisis performansi pertukaran udara kompresor. Persoalan tersebut membutuhkan penyelesaian persamaan-persamaan untuk mendapatkan nilai tekanan *P*, volum *V* dan suhu *T*. Persamaan untuk menghitung nilai *T* cukup rumit dan sulit untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, metode numerik pada solusi persamaan nonlinear, misalnya metode *Newton-Raphson*, dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan *T*. Penggunaan metode numerik pada bidang ilmu lainnya masih sangat luas sekali. Persoalan performansi pertukaran udara kompresor hanya salah satu contoh dari penggunaan tersebut.

Medan magnet merupakan salah satu materi pada bidang fisika. Medan magnet merupakan medan vektor, karena memiliki arah dan juga besar/nilai. Perhitungan besar medan magnet karena arus listrik pada sebuah lintasan menggunakan penjumlahan atau integral dari setiap medan $d\vec{B}$ pada elemen diferensial arus-panjang $i\,d\vec{s}$. Makalah ini akan membahas perhitungan medan magnet karena arus listrik pada lintasan-lintasan tertentu dengan menggunakan metode integrasi numerik. Metode integrasi numerik yang akan digunakan adalah metode pias (aturan trapesium dan aturan titik tengah), metode *Newton-Cotes* (aturan Simpson 1/3, aturan Simpson 3/8 dan aturan Boole), ekstrapolasi pada integrasi (metode Romberg), dan kuardatur Gauss.

Hasil perhitungan dengan metode integrasi numerik akan dibandingkan terhadap hasil perhitungan analitik. Hal ini dilakukan untuk melakukan pengecekan terhadap hasil perhitungan dengan metode integrasi numerik. Hasil perhitungan integrasi numerik umumnya memiliki galat dalam perhitungannya. Galat tersebut berasal dari galat total yang merupakan galat hampiran. Galat hampiran akan semakin besar jika jarak antara titik data, *h*, juga semakin besar. Galat hampiran memiliki pengaruh yang besar pada perhitungan besar medan magnet *B* karena arus listrik pada lintasan kawat lurus dan panjang.

Kata Kunci-integrasi, numerik, medan, lintasan

I. PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan pelajaran atau bidang ilmu perhitungan yang sering digunakan untuk membantu penyelesaian persoalan bidang ilmu lainnya. Penyelesaian persoalan dibantu dengan konsep-konsep atau metode-metode yang dibahas pada kalkulus. Bantuan yang diberikan berupa penyelesaian perhitungan yang cukup rumit ataupun metode atau triknya. Materi kalkulus yang umum digunakan untuk penyelesaian perhitungan tersebut adalah solusi persamaan nonlinear, solusi persamaan linear, integral, persamaan diferensial, dan masih banyak lagi.

Medan magnet merupakan salah satu materi atau bahasan pada fisika. Definisi medan magnet dan asal medan magnet dapat dikategorikan menjadi dua, medan magnet karena gaya magnet dan medan magnet karena arus listrik yang mengalir. Dua definisi tersebut merupakan pendekatan untuk menentukan besar dan arah dari medan magnet, hal ini dikarenakan medan magnet merupakan medan vektor, besaran yang memiliki arah dan besar/nilai. Medan magnet memiliki simbol $\vec{B}$, besar medan magnet dituliskan dalam simbol B dan satuan SI medan magnet adalah tesla (T).

Medan magnet yang dibahas pada makalah ini adalah medan magnet yang dihasilkan dari arus listrik yang mengalir pada lintasan tertentu. Bentuk lintasan akan mempengaruhi medan magnet yang dihasilkan. Hal ini disebabkan oleh elemen diferensial arus-panjang $i\,d\vec{s}$ akan berbeda pada setiap lintasan yang berbeda pula. Contoh lintasan yang mungkin adalah lintasan pada kawat lurus dan kawat melingkar. Pada persoalan yang lebih rumit, lintasan dapat berupa gabungan dari lintasan lurus dan melingkar.

Makalah ini akan membahas perhitungan, yang menggunakan metode integrasi numerik, besar medan magnet karena arus listrik pada lintasan-lintasan tertentu. Kemudian, hasil integrasi secara numerik akan dibandingkan terhadap hasil integrasi secara analitik. Perbandingan ini dilakukan untuk mengetahui dan menganalisis metode integrasi numerik mana yang cocok untuk menghitung integrasi pada perhitungan besar medan magnet untuk lintasan tertentu. Selain itu, perbandingan juga dilakukan untuk menemukan kesamaan dan perbedaan, jika memang ada.

II. TEORI MEDAN MAGNET

II.1. MEDAN MAGNET DAN GAYA MAGNET

Medan magnet tidak dapat didefinisikan dari sebuah titik dengan kekuatan magnet yang kemudian memiliki medan magnet disekitarnya. Teori tentang kutub-kutub magnet (titik dengan kekuatan magnet) memang ada, tetapi keberadaan dari kutub magnet masih belum dikonfirmasi [1].

Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan untuk mendefinisikan medan magnet adalah menembakan partikel, yang memiliki muatan *q*, dengan arah dan kecepatan *v* yang berbeda pada sebuah titik *P* [1]. Kemudian, gaya yang bekerja pada titik *P* dihitung dan didefinisikan sebagai gaya magnet, $\overrightarrow{F_B}$. Dari pendekatan yang sudah dilakukan, besar/nilai gaya magnet $\overrightarrow{F_B}$ selalu berbanding lurus dengan $v \sin \theta$, θ adalah sudut antara sumbu gaya nol dan arah dari kecepatan $\vec{v}$. Kemudian, medan magnet $\vec{B}$ dapat didefinisikan sebagai nilai vektor yang memiliki arah pada sumbu gaya nol. Definisi medan magnet $\vec{B}$ tersebut merupakan definisi medan magnet berdasarkan gaya magnet. Jika nilai gaya magnet $\overrightarrow{F_B}$ dihitung pada saat kecepatan $\vec{v}$ diarahkan tegak lurus dengan sumbu gaya nol, nilai medan magnet $\vec{B}$ dapat dihitung dari "persamaan 1".

$$B = \frac{F_B}{|q|v} \tag{1}$$

Nilai *q* pada "persamaan 1" adalah muatan dari partikel. Kemudian, hubungan gaya magnet $\overrightarrow{F_B}$, kecepatan $\vec{v}$ dan medan magnet $\vec{B}$ dapat dilihat pada "persamaan 2" [1]. "Persamaan 2" merupakan kesimpulan dari pendekatan yang dilakukan. "Persamaan 3" merupakan persamaan dari besar/nilai gaya magnet $\overrightarrow{F_B}$.

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2}$$

$$F_B = |q|vBsin\theta \tag{3}$$

Satuan SI untuk medan magnet adalah tesla (T) [1]. Tesla merupakan sebutan dari satuan newton per coulomb-meter per second (N/(A . m)). Satuan non SI untuk medan magnet adalah gauss (G), dimana 1 tesla sama dengan 10^4 gauss.

II.2 MEDAN MAGNET DAN ARUS LISTRIK

Medan magnet dapat dihasilkan dari arus listrik yang mengalir atau melewati pada sebuah lintasan. Misalkan sebuah kawat memiliki arus *i*. Kita ingin mengetahui medan magnet $\vec{B}$ di sekitar titik *P*. Kawat dibagi menjadi elemen-elemen diferensial $d\vec{s}$ yang memiliki besar/nilai *ds* dan arah sesuai dengan arah arus *i* pada *ds*. Kita dapat mendefinisikan diferensial dari elemen arus-panjang adalah $i\,d\vec{s}$. Kemudian, kita dapat menghitung medan $d\vec{B}$ pada titik P berdasarkan elemen arus-panjang $i\,d\vec{s}$ [1].

Besar dari medan $d\vec{B}$ pada titik P dan berjarak *r* yang dihasilkan oleh elemen aru-panjang $i\,d\vec{s}$ dapat dilihat pada "persamaan 4" [1]. Kemudian, medan magnet $\vec{B}$ dihitung dengan penjumlahan atau integrasi setiap $d\vec{B}$ dari elemen arus-panjang $i\,d\vec{s}$.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,sin\theta}{r^2} \tag{4}$$

θ merupakan sudut antara arah $d\vec{s}$ dengan $\hat{r}$, dengan $\hat{r}$ adalah vektor unit dari $d\vec{s}$ kepada titik *P*. $\mu_0$merupakan konstanta permeabilitas (*permeability constants*). Nilai μ_0 adalah $4\pi \times 10^{-7}$ T m/A [1].

Hukum Biot-Savart menjelaskan tentang elektormagnetik, yang mendeskripsikan medan magnet $\vec{B}$ yang dihasilkan arus listrik *i*. Persamaan Hukun Biot-Savart dapat dilihat pada "persamaan 5" [1]. Persamaan Hukum Biot-Savart menjelaskan hubungan antara $d\vec{B}$ dengan elemen arus-panjang $i\,d\vec{s}$ dan vektor unit $\hat{r}$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \tag{5}$$

II.3. MEDAN MAGNET KARENA ARUS LISTRIK PADA BERBAGAI LINTASAN

Arus listrik dapat dilewatkan pada berbagai macam lintasan untuk menghasilkan medan magnet. Contoh lintasan yang mungkin adalah sebuah kawat lurus dan panjang, atau sebuah kawat melingkar.

Medan magnet $\vec{B}$ yang dihasilkan dari sebuah lintasan yang memiliki arus listrik dapat dihitung berdasarkan Hukum Biot-Savart [1]. Medan magnet $\vec{B}$ akan berbeda antara satu lintasan dengan lainnya, karena elemen arus-panjang $i\,d\vec{s}$ pada setiap lintasan juga memiliki nilai yang berbeda. Selanjutnya, pembahasan akan mendeskripsikan persamaan-persamaan besar medan magnet, yaitu *B*, dari arus listrik pada berbagai lintasan. Sedangkan, arah medan magnet dapat ditentukan dengan aturan tangan-kanan (*right-hand rule*) [1].

Besar medan magnet yang dihasilkan dari arus listrik pada kawat lurus dan panjang dapat dilihat pada "persamaan 6" [1]. "Persamaan 6" merupakan bentuk umum dari persamaan besar medan magnet dari arus listrik pada kawat lurus dan panjang. Pada "persamaan 6", panjang kawat diasumsikan tidak terhingga, sehingga batas integral adalah integral 0 sampai tak hingga (∞). Integral dari dB dikalikan dengan 2 karena perhitungan besar medan magnet yang dipengaruhi oleh arus listrik pada setengah ke atas dan setengah ke bawah adalah sama, oleh karena itu integral dB cukup dikalikan dengan 2 untuk mengetahui total dari besar medan magnet yang dipengaruhi arus listrik pada kawat tersebut.

$$B = 2\int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{sin\theta}{r^2}\,ds$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R}{(R^2+s^2)^{3/2}}\,ds \qquad (6)$$

Jika "persamaan 6" dijabarkan lebih lanjut, bentuk sederhana "persamaan 6" dapat dilihat pada "persamaan 7". Jika, kita hanya memperhatikan setengah dari total panjang kawat, baik setengah ke bawah ataupun setengah ke atas, maka besar medan magnetnya adalah setengah dari besar medan magnet pada kawat lurus dan panjang, yang sebesar integral dari dB [1]. Persamaan besar medan magnet pada kawat dengan panjang setengah dari total panjang kawat dapat dilihat pada "persamaan 8".

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \qquad (7)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^\infty \frac{R}{(R^2+s^2)^{3/2}}\,ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \qquad (8)$$

Besar medan magnet yang dihasilkan dari arus listrik pada kawat yang melingkar dapat dilihat pada "persamaan 9" [1]. "Persamaan 9" merupakan bentuk umum dari persamaan besar medan magnet dari arus listrik pada kawat yang melingkar. Nilai Φ dapat diganti sesuai dengan total sudut dari busur lingkaran dari kawat. Jika "persamaan 9" dijabarkan lebih lanjut, bentuk sederhana "persamaan 9" dapat dilihat pada "persamaan 10".

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_0^\Phi d\Phi \qquad (9)$$

$$B = \frac{\mu_0 i\Phi}{4\pi R} \qquad (10)$$

III. TEORI INTEGRASI NUMERIK

III.1 INTEGRAL

Integral merupakan salah satu materi yang dibahas dalam kalkulus. Materi integral terbagi menjadi dua, yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Integral tak tentu biasanya akrab dikenal sebagai integral yang tidak memiliki batas tertentu, sedangkan integral tentu akrab dikenal sebagai integral pada batas-batas nilai tertentu [2] (misalnya dari titik *a* hingga titik *b*). Bentuk umum dari integral tak tentu dan integral tentu dapat dilihat pada "persamaan 11" dan "persamaan 12".

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (11)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (12)$$

III.2 INTEGRASI NUMERIK

Integrasi numerik digunakan untuk menyelesaikan perhitungan pada integral tentu [2]. Pendekatan pada integrasi numerik ada dua, yaitu metode pias dan polinom interpolasi. Pendekatan dengan metode pias akan membagi daerah integrasi menjadi sejumlah pias yang memiliki bentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias, yang dihitung dengan aturan tertentu. Beberapa aturan pada metode pias adalah aturan segiempat, aturan trapesium, dan aturan titik tengah.

Pendekatan dengan polinom interpolasi akan menghampiri fungsi *integrand* $f(x)$ dengan polinom interpolasi $p_n(x)$ [2]. Integrasi dilakukan terhadap polinom interpolasi $p_n(x)$ karena suku-suku polinom lebih mudah diintegralkan daripada fungsi *integrand* $f(x)$. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam metode *Newton-Cotes*. Beberapa aturan integrasi yang diturunkan dari metode *Newton-Cotes* adalah aturan trapesium, aturan Simpson 1/3, aturan Simpson 3/8 dan aturan Boole.

Terdapat dua pendekatan lagi pada integrasi numerik. Namun, dua pendekatan ini tidak lazim jika dibandingkan dengan dua metode yang sudah dijelaskan. Pendekatan yang pertama adalah penggunaan ekstrapolasi pada integrasi [2]. Nilai integrasi akan semakin mendekati nilai integrasi sejati jika jarak antara titik data, *h*, semakin kecil. Pada integrasi numerik, ekstrapolasi pada *h* mendekati 0 ($h \approx 0$) akan membantu untuk memperoleh nilai integrasi yang lebih baik. Dua macam metode ekstrapolasi yang digunakan adalah ekstrapolasi Richardson dan ekstrapolasi Aitken. Ekstrapolasi Richardson yang diterapkan secara terus menerus disebut sebagai metode Romberg.

Pendekatan lain dan merupakan pendekatan terakhir yang diajarkan dalam metode numerik adalah kuardratur Gauss [2]. Metode kuardratus Gauss merupakan metode integrasi yang paling tidak wajar. Metode kuardratus Gauss merupakan metode integrasi yang dikembangkan oleh Gauss. Perhitungan nilai integrasi dari sebuah fungsi $f(x)$ cukup didekati dengan menghitung nilai fungsi $f(x)$ pada titik-titik tertentu saja. Metode kuardratur Gauss dapat juga disebut sebagai metode Gauss-Legendre. Metode Gauss-Legendre dapat diterapkan untuk 2 buah titik, dimana nilai integrasi I akan dihitung dengan hampiran dari $c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$, dengan $c_1 = c_2 = 1$, $x_1 = 1/\sqrt{3}$, $x_2 = -1/\sqrt{3}$. Metode Gauss-Legendre juga dapat diterapakan untuk n-titik. Jumlah titik atau nilai n yang umumnya digunakan adalah 2 hingga 6, 2 titik hingga 6 titik.

III.3 GALAT PADA INTEGRASI NUMERIK

Perhitungan integrasi secara numerik umumnya memiliki perbedaan dari perhitungan dengan analitik. Perbedaan ini dapat ditimbulkan oleh galat pada perhitungan integrasi numerik. Secara umum, galat yang ditemukan pada perhitungan integrasi numerik adalah galat hampiran atau galat pemotongan [2].

Galat hampiran muncul karena metode atau aturan integrasi numerik melakukan pendekatan atau penghampiran pada nilai integrasi dengan pendekatannya masing-masing. Galat total pada masing-masing metode dapat dihitung dengan pendekatan menggunakan deret Taylor. Galat total terbesar dari integrasi numerik adalah galat pada aturan trapesium dan aturan titik tengah, sebesar $O(h^2)$ [2]. Galat aturan Simpson 1/3 dan aturan Simpson 3/8 adalah $O(h^4)$. Galat aturan Boole adalah $O(h^6)$. Galat pada metode Romberg bergantung pada jumlah pias yang digunakan untuk menghitung dan galat pada metode Gauss-Legendre bergantung dari titik yang digunakan untuk menghitung nilai integrasi.

IV. APLIKASI

Aplikasi yang dibuat adalah aplikasi untuk menghitung medan magnet yang dihasilkan dari arus listrik pada lintasan-lintasan tertentu. Lintasan yang digunakan adalah lintasan pada kawat lurus dan panjang, kawat lurus dan panjgan setengah dari total panjang, dan kawat yang melingkar. Aplikasi akan dibuat menggunakan bahasa pemrograman C#.

Aplikasi C# akan mengimplementasikan fungsi-fungsi atau metode-metode pada integrasi numerik. Fungsi-fungsi yang diimplementasikan adalah aturan trapesium, aturan titik tengah, aturan simpson 1/3, aturan simpson 3/8, aturan boole, metode romberg, metode gauss-legendre untuk 2-titik hingga 6-titik.

Hasil perhitungan numerik dari aplikasi C# dan hasil perhitungan analitik akan dibandingkan untuk mengetahui kesamaan dan perbedaan, jika memang ditemukan dalam makalah ini.

Kasus khusus yang ditangani oleh aplikasi C# adalah integral dengan batas tak hingga (∞) pada medan magnet karena arus listirk pada kawat panjang. Pada aplikasi, batas tak hingga akan digantikan dengan bilangan 1.000.000.

V. HASIL DAN ANALISIS

Hasil perhitungan yang dipaparkan dalam makalah ini diambil dari hasil perhitungan medan magnet secara numerik dan analitik. Kemudian, hasil perhitungan numerik akan dianalisis jika ditemukan perbedaan dengan hasil perhitungan analitik. Perhitungan medan magnet karena arus listrik akan dilakukan pada lintasan kawat lurus dan panjang, kawat lurus dengan panjang setengah dari total panjang, dan kawat melingkar.

V.1 MEDAN MAGNET DARI ARUS LISTRIK PADA KAWAT LURUS DAN PANJANG

Pada persoalan kali ini, medan magnet akan dihitung dari sebuah arus listrik sebesar 10 A yang mengalir pada kawat lurus dan panjang, dengan jarak antara kawat dan titik medan magnet adalah R sebesar 10 cm. Panjang kawat diasumsikan tak hingga (∞). Dari persoalan diketahui bahwa arus, i = 10 A, dan R = 10 cm = 0,1 m. Besar medan magnet B akan dihitung secara numerik dengan menggunakan "persamaan 6" dan dihitung secara analitik dengan menggunakan "persamaan 7".

Metode	B (T)
Trapesium	1,00241 x 10^{-4}
Titik Tengah	1,59091 x 10^{-6}
Simpson 1/3	6,69658 x 10^{-5}
Simspon 3/8	7,52667 x 10^{-4}
Boole	6,25359 x 10^{-4}
Romberg	1,16274 x 10^{-4}
Gauss-Legendre orde 2	1,08000 x 10^{-17}
Gauss-Legendre orde 3	7,83298 x 10^{-17}
Gauss-Legendre orde 4	1,06000 x 10^{-16}
Gauss-Legendre orde 5	2,34000 x 10^{-16}
Gauss-Legendre orde 6	4,53600 x 10-^{16}
Analitik	2,0 x 10^{-5}

Tabel 1 Perhitungan 1 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Lurus dan Panjang (*R* = 0,1 m)

Perhitungan secara numerik menggunakan jumlah pias n = 999.960 untuk aturan trapesium, titik tengah, simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole. 999.960 merupakan bilangan kelipatan 2, 3, dan 4 yang terdekat dengan 1.000.000. Sedangkan metode Romberg menggunakan n = 524.288. 524.288 merupakan bilangan pangkat 2 yang terdekat dengan 1.000.000. 1.000.000 merupakan bilangan yang diasumsikan untuk menggantikan bilangan tak hingga (∞) pada batas integral.

Dari "tabel 1" dapat dilihat bahwa perhitungan secara numerik tidak sama sekali mendekati perhitungan secara analitik. Hal ini dapat disebabkan karena jarak antara titik data, yaitu h, masih lebih besar atau sama dengan 1. Untuk n = 999.960, nilai h adalah (1.000.000 - 0)/999.960 = 1,00004 ≈ 1. Sedangkan untuk n = 524.288, nilai h terkecil pada metode Romberg adalah adalah (1.000.000 - 0)/524.288 = 1,90734. Oleh karena itu, nilai n yang digunakan harus lebih dari 1.000.000.

Nilai n yang selanjutnya digunakan adalah 2.100.000, dengan demikian nilai h adalah (1.000.000 - 0)/2.100.000 = 0,47619 ≈ 0,475. Sedangkan untuk n pada metode Romberg akan menggunakan 2.097.152, nilai h terkecil pada metode Romberg adalah (1.000.000 - 0)/2.097.152 = 0,476837 ≈ 0,475.

Nilai n pada metode Gauss-Legendre dapat diperbesar untuk melakukan percobaan lebih lanjut bagaimana pengaruh nilai n terhadap hasil integrasi. Namun, rumus atau persamaan untuk $n > 6$ tidak dipelajari dalam pembuatan makalah ini. Sehingga, metode Gauss-Legendre dengan $n > 6$ tidak dilakukan pada makalah ini.

Metode	B (T)
Trapesium	4,86218 x 10^{-5}
Titik Tengah	5,88725 x 10^{-6}
Simpson 1/3	3,29960 x 10^{-5}
Simspon 3/8	3,68278 x 10^{-5}
Boole	3,09412 x 10^{-5}
Romberg	3,03752 x 10^{-5}
Analitik	2,0 x 10^{-5}

Tabel 2 Perhitungan 2 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Lurus dan Panjang (R = 0,1 m)

Dari "tabel 2" didapatkan hasil perhitungan numerik yang lebih baik daripada hasil perhitungan dari "tabel 1". Hal ini sesuai dengan teori yang menyatakan bahwa semakin kecil jarak antara titik data h, semakin kecil juga galat perhitungannya. Galat perhitungan yang dimaksud adalah galat hampiran. Tetapi, dengan jarak antara titik data h yang mendekati 0,475 < 0,5, hasil integrasi yang dihasilkan dari perhitungan secara numerik masih belum cukup dekat dengan hasil perhitungan secara analitik.

Hasil integrasi dengan aturan simpson 1/3, simpson 3/8, boole, dan romberg sudah hampir mendekati hasil integrasi secara analitik daripada hasil integrasi dengan aturan trapesium dan titik tengah. Perbedaan tersebut dikarenakan galat perhitungan atau galat hampiran pada aturan trapesium dan titik tengah adalah $O(h^2) > O(h^4) > O(h^6)$. $O(h^4)$ merupakan galat hampiran pada aturan Simpson 1/3 dan aturan Simpson 3/8. $O(h^6)$ merupakan galat hampiran pada aturan Boole. Dengan demikian, perbedaan tersebut juga terbuktikan oleh teori galat pada perhitungan integrasi numerik.

Jika nilai n yang digunakan lebih besar lagi, hasil integrasi tentu akan menjadi lebih baik. Jika jarak antara titik data h yang ingin digunakan adalah 0,25 atau hampirannya, maka nilai n yang digunakan pada aturan trapesium, titik tengah, simpson 1/3, simpson 3/8, boole adalah 4.050.000 dengan nilai h adalah (1.000.000 - 0)/4.050.000 = 0,246914 ≈ 0.25. Sedangkan untuk metode Romberg, nilai n yang digunakan adalah 4.194.304 dengan nilai h terkecil pada metode Romberg adalah (1.000.000 - 0)/4.194.304= 0,238419 ≈ 0.25.

Metode	B (T)
Trapesium	2,79379 x 10^{-5}
Titik Tengah	1,35658 x 10^{-5}
Simpson 1/3	2,04776 x 10^{-5}
Simspon 3/8	2,21173 x 10^{-5}
Boole	1,95702 x 10^{-5}
Romberg	1,90398 x 10^{-5}
Analitik	2,0 x 10^{-5}

Tabel 3 Perhitungan 3 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Lurus dan Panjang (R = 0,1 m)

Hasil integrasi secara numerik pada "tabel 3" sudah sangat mendekati dengan hasil perhitungan secara analitik. Dengan menggunakan jarak antara titik data h yang bernilai 0,25 atau mendekatinya, hasil integrasi secara numerik sudah cukup dekat dengan hasil integrasi secara analitik. Dengan pola yang hampir sama dengan pola yang ditemukan pada "tabel 2", hasil perhitungan dengan aturan trapesium dan titik tengah memiliki galat yang lebih besar daripada hasil perhitungan dengan aturan simpson 1/3, simpson 3/8, boole dan romberg.

Hasil perhitungan dengan aturan trapesium dan titik tengah tentu dapat diperbaiki dengan cara memperkecil nilai h seperti pada cara yang sudah dilakukan sebelumnya. Hanya saja, nilai h yang diperlukan pada aturan trapesium dan titik tengah harus lebih kecil daripada nilai h yang digunakan pada aturan simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole. Pada kasus ini, aturan trapesium dan aturan titik tengah mungkin saja menghasilkan nilai integrasi yang lebih baik jika jarak antara titik data $h < 0{,}25$, misalnya $h = 0{,}1$. 0,25 merupakan nilai h yang digunakan untuk aturan simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole, dan dengan $h = 0{,}25$ hasil integrasi pada aturan simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole sudah cukup baik.

Hal yang menarik untuk diperhatikan nilai n yang cukup besar, mencapai jutaan, harus diberikan untuk mendapatkan hasil integrasi yang cukup baik, walaupun nilai h yang ingin digunakan adalah 0,25. Hal ini dapat disebabkan oleh definisi atau asumsi penggunaan bilangan tak hingga (∞). Pada aplikasi, bilangan tak hingga (∞) akan digantikan dengan bilangan 1.000.000. Jika bilangan tak hingga (∞) akan digantikan dengan bilangan 1.000, nilai h = 0,25 dapat diperoleh dengan menggunakan nilai n = 4.000.

V.2 MEDAN MAGNET DARI ARUS LISTRIK PADA KAWAT LURUS DAN PANJANG SETENGAH DARI TOTAL PANJANG

Perhitungan medan magnet pada kawat lurus dan panjang setengah dari total panjang memiliki kemiripan dengan perhitungan medan magnet pada kawat lurus dan panjang. Kemiripan ini disebabkan karena rumus yang digunakan cukup mirip dan fungsi *integrand f(x)* yang digunakan adalah sama, yang dapat dilihat pada "persamaan 13".

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{R}{(R^2+s^2)^{3/2}} ds \qquad (13)$$

Contoh hasil perhitungan medan magnet pada kawat lurus dan panjang setengah dari total panjang akan menggunakan persoalan yang sama dengan persoalan pada medan magnet pada kawat lurus dan panjang.

Metode	B (T)
Trapesium	$5{,}01207 \times 10^{-5}$
Titik Tengah	$7{,}95457 \times 10^{-7}$
Simpson 1/3	$3{,}34829 \times 10^{-5}$
Simspon 3/8	$3{,}76333 \times 10^{-5}$
Boole	$3{,}12680 \times 10^{-5}$
Romberg	$5{,}81369 \times 10^{-5}$
Gauss-Legendre orde 2	$5{,}40000 \times 10^{-18}$
Gauss-Legendre orde 3	$3{,}91649 \times 10^{-18}$
Gauss-Legendre orde 4	$5{,}30000 \times 10^{-17}$
Gauss-Legendre orde 5	$1{,}17000 \times 10^{-16}$
Gauss-Legendre orde 6	2,26800 x 10-^{16}
Analitik	$1{,}0 \times 10^{-5}$

Tabel 4 Perhitungan 1 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Lurus dan Setengah Panjang (R = 0,1 m)

Perhitungan numerik pada "tabel 4" menggunakan n = 999.960 untuk aturan trapesium, titik tengah, simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole. Sedangkan metode Romberg menggunakan n = 524.288. Jarak antara titik data h untuk aturan trapesium, titik tengah, simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole adalah (1.000.000 - 0)/999.960 = 1,00004 ≈ 1. Sedangkan Jarak antara titik data h terkecil pada metode Romberg adalah adalah (1.000.000 - 0)/524.288 = 1,90734.

Seperti halnya pada perhitungan medan magnet dengan metode Gauss-Legendre pada kawat lurus dan panjang, perhitungan metode Gauss-Legendre pada kawa lurus dan setengah panjang dari panjang total tidak mendekati nilai hasil perhitungan dengan analitik.

Secara singkat, hasil perhitungan pada "tabel 4" sebenarnya merupakan setengah kali dari hasil perhitungan pada "tabel 1". Hal ini juga memang benar dan sesuai dengan teori medan magnet karena arus listrik pada lintasan kawat lurus dan panjang setengah dari total panjang, yang nilainya merupakan setengah kali dari medan magnet pada lintasan kawat lurus dan panjang.

Metode	B (T)
Trapesium	$1{,}39689 \times 10^{-5}$
Titik Tengah	$6{,}78292 \times 10^{-6}$
Simpson 1/3	$1{,}02389 \times 10^{-5}$
Simspon 3/8	$1{,}10587 \times 10^{-5}$
Boole	$9{,}78508 \times 10^{-6}$
Romberg	$9{,}51991 \times 10^{-6}$
Analitik	$1{,}0 \times 10^{-5}$

Tabel 5 Perhitungan 2 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Lurus dan Setengah Panjang (R = 0,1 m)

"Tabel 5" merupakan perbaikan dari perhitungan pada "tabel 4". Nilai n yang digunakan pada aturan trapesium, titik tengah, simpson 1/3, simpson 3/8, boole adalah 4.050.000 dengan nilai h adalah (1.000.000 - 0)/4.050.000 = 0,246914 ≈ 0.25. Sedangkan untuk metode Romberg, nilai n yang digunakan adalah 4.194.304 dengan nilai h terkecil pada metode Romberg adalah (1.000.000 - 0)/4.194.304= 0,238419 ≈ 0.25. Hasil perhitungan pada "tabel 5" juga merupakan setengah kali dari hasil perhitungan pada "tabel 4".

V.3 MEDAN MAGNET DARI ARUS LISTRIK PADA KAWAT MELINGKAR

Medan magnet yang dihasilkan dari arus listrik pada kawat melingkar akan bergantung dari besar busur dari lingkaran lintasan kawat tersebut. Fungsi *integrand f(x)* pada perhitungan besar medan magnet karena arus listrik pada kawat melingkar merupakan fungsi polinom orde 0, yaitu *f(x)* = 1.

Dengan demikian, perhitungan secara numerik dengan menggunakan metode atau aturan apapun dan jarak titik data h berapapun (dengan $h > 0$), seharusnya memberikan nilai yang sama dengan perhitungan secara analitik. Khusus metode Gauss-Legendre berapapun jumlah titik yang dipakai untuk mewakili perhitungan integrasi tidak akan mempengaruhi hasil integrasi.

Persoalan yang digunakan adalah arus listrik sebesar 10 A mengalir pada kawat melingkar, dengan radius lingkaran kawat adalah R sebesar 10 cm. Berapakah besar medan magnet yang dipengaruhi oleh seperempat lingkaran, setengah lingkaran, tigaperempat lingkaran, dan satu lingkaran penuh?

Dari persoalan diketahui bahwa arus, i = 10 A, dan R = 10 cm = 0,1 m. Besar medan magnet B akan dihitung secara numerik dengan menggunakan "persamaan 9" dan dihitung secara analitik dengan menggunakan "persamaan 10". Total sudut busur lingkaran Φ akan menggunakan π/2, π, 3π/2, 2π yang sesuai dengan busur lingkaran.

Metode	B (T)
Numerik (Φ = π/2)	$1{,}57080 \times 10^{-5}$
Analitik (Φ = π/2)	$1{,}57080 \times 10^{-5}$
Numerik (Φ = π)	$3{,}14160 \times 10^{-5}$
Analitik (Φ = π)	$3{,}14160 \times 10^{-5}$
Numerik (Φ = 3π/2)	$4{,}71240 \times 10^{-5}$
Analitik (Φ = 3π/2)	$4{,}71240 \times 10^{-5}$
Numerik (Φ = 2π)	$6{,}28320 \times 10^{-5}$
Analitik (Φ = 2π)	$6{,}28320 \times 10^{-5}$

Tabel 6 Perhitungan 1 Besar Medan Magnet *B* pada Kawat Melingkar (*R* = 0,1 m)

Hasil perhitungan secara numerik dan hasil perhitungan secara analitik tidak berbeda seperti yang ditampilkan pada "tabel 6". Hal ini sesuai dengan perkiraan bahwa fungsi *integrand f(x),* yang merupakan fungsi polinom orde 0, akan memberikan hasil yang sama jika diintegrasikan dengan berbagai macam metode numerik. Hasil perhitungan secara numerik juga sama dengan hasil perhitungan secara analitik.

VI. KESIMPULAN

Kesimpulan dari makalah ini adalah:

1. Besar medan magnet karena arus listrik pada lintasan tertentu dapat dihitung dengan menggunakan metode numerik.
2. Besar medan magnet karena arus listrik pada lintasan kawat lurus dan panjang, asumsi panjang tak hingga (∞), dapat dihitung dengan metode aturan trapesium dan aturan titik tengah dengan jarak antara titik data h_1 (dengan $h_1 < h_2$). Nilai h_2 adalah jarak antara titik data yang digunakan pada aturan simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole.
3. Besar medan magnet karena arus listrik pada lintasan kawat lurus dan panjang, asumsi panjang tak hingga (∞), tidak dapat dihitung dengan metode Gauss-Legendre 2-titik hingga 6-titik.
4. Fungsi *integrand f(x),* yang merupakan fungsi polinom orde 0, akan memberikan hasil yang sama jika diintegrasikan dengan berbagai macam metode numerik.
5. Besar medan magnet karena arus listrik pada lintasan kawat melingkar dapat dihitung dengan metode numerik apapun dan dengan jarak antara titik data h berapapun.

REFERENSI

[1] Halliday, David, Robert Resnick dan Jearl Walker. 2008. *Fundamentals of Physics (Extended) 8th Edition*. Asia: John Wiley & Sons.

[2] Munir, Rinaldi. 1997. *Metode Numerik untuk Teknik Informatika*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain dan bukan plagiasi.

Bandung, 13 Mei 2011

Rianto Fendy Kristanto
13507036