Interpolasi Polinom dan Applikasi pada Model Autoregresif

Rio Cahya Dwiyanto 13506041
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
IF16041@students.if.itb.ac.id

***Abstract*—Makalah ini menjelaskan tentang interpolasi polinolinom yang dapat digunakan untuk perkiraan fungsi dan turunannya. Beberapa model autoregresif dapat dinyatakan dengan menggunakan interpolasi polinomial dan pendekatan fungsi. Tujuan utama dari makalah ini adalah untuk menyatakan metode umum dalam rangka untuk membuat perkiraan model, yang dapat digunakan dalam pendekatan waktu. Metode ini didasarkan pada beberapa rumus matematika dasar, seperti interpolasi polinomial dan aproksimasi fungsi.**

***Index Terms* — Interpolasi polinom, model autoregresif, Rumus Lagrange, Rumus Newton.**

I. Latar Belakang

Tujuan utama dari makalah ini adalah untuk menyatakan metode umum dalam rangka untuk membuat perkiraan model, yang dapat digunakan dalam pendekatan waktu. Metode ini didasarkan pada beberapa rumus matematika dasar, seperti interpolasi polinomial dan aproksimasi fungsi.

Dalam suatu kurun waktu, seperti nilai tukar uang setiap hari atau bulanan, tidak mungkin dapat menggunakan fungsi nyata f : R → R karena domain definisi, yang terdiri dari angka nyata, tidak dapat dikaitkan dengan langkah-langkah tetap, seperti hari atau bulan.

Seperti diketahui, setiap alat pendekatan matematika untuk fungsi menggunakan derivatif. Tapi, untuk suatu kurun waktu, hasil bagi diferensial $\dfrac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$ jika pembagi bukan bilangan real.

Selain itu, kami akan membuktikan bahwa adalah mungkin untuk menggunakan derivatif, bahkan untuk suatu waktu, dengan mengekspresikan pendekatan melalui nilai-nilai turunan fungsi, bukan persamaan diferensial. Lebih tepatnya, kita akan melihat bahwa derivatif, sesuai dengan nilai yt dapat dinyatakan dengan menggunakan nilai preseden hanya dari seri waktu: yt-1, yt-2, dll.

Akhirnya, pendekatan polinomial Taylor dapat digunakan dalam peramalan waktu, termasuk derivatif, dengan menggunakan nilai preseden saja. Teknik ini berevolusi menjadi metode umum, untuk menciptakan model autoregressive, karena akan dinyatakan dalam bagian dari makalah ini. Model ini dapat digunakan dalam peramalan, hal ini akan ditunjukkan di akhir bagian.

Untuk memulai, mari kita perhatikan kerangka klasik berikut. Mengingat set (x_1,y_1), (x_1,y_1), ... (x_1,y_1) pada R^2, $x_i \neq x_j, i \neq j$ cari polinomial yang memenuhi kondisi: $P(x_i) = y_i, \forall i = \overline{1,m}$

Rupanya, adalah mungkin untuk menggunakan fungsi polinom, dalam kasus di mana kita memiliki satu set statistik (atau percobaan) data, tetapi kita tidak tahu persis fungsi yang menunjukkan ketergantungan antara "x"-poin dan "y"-poin.

Bahkan, dalam banyak kasus, polinomial interpolasi tidak digunakan "sebagaimana adanya", menjadi sangat alat yang berguna, dalam rangka untuk perkiraan beberapa operasi lain, seperti penurunan atau integrasi.

Hasil utama yang menggarisbawahi masalah kita adalah sebagai berikut:

Teorema 1. Terdapat sebuah polinomial unik:

$$P(x) = a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x + a_{m-1},$$

dengan mempunyai m-1 derajat, yang memenuhi kondisi (1).

Demonstrasi. Kondisi interpolasi adalah:

$$\begin{cases} a_0x_1^{m-1} + a_1x_1^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x_1 + a_{m-1} = y_1 \\ a_0x_2^{m-1} + a_1x_2^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x_2 + a_{m-1} = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_0x_m^{m-1} + a_1x_m^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x_m + a_{m-1} = y_m \end{cases}$$

dengan suku yang tidak diketahui a0,a1,…,am-1. Sistem diatas adalah **Vandermonde**, yang menghasilkan solusi yang unik.

2. Formula Lagrange

Hal ini sangat mudah untuk mengamati bahwa teorema di atas memakan "waktu dan ruang", untuk menentukan polinomial tersebut. Ini adalah alasan untuk memperkenalkan beberapa metode lainnya.

Rumus Lagrange ini didasarkan pada keluarga berikut polinomial tertentu:

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_m)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_m)}, i=\overline{1,m}$$

Secara definisi, polinomial (interpolasi) lagrange adalah

$$L(x) = \Phi_1(x)y_1 + \Phi_2(x)y_2 + \dots + \Phi_m(x)y_m$$

Teorema 2. Polinomial Lagrange's The bertepatan dengan interpolasi polinomial.

Demonstrasi. Memang, polinomial Lagrange berada di derajat m – 1 dan mudah untuk mengamati bahwa kondisi interpolasi (1) terpenuhi:

$$L(x_i) = \Phi_1(x_i)y_1 + \Phi_2(x_i)y_2 + \dots + \Phi_m(x_i)y_m = \Phi_i(x_i)y_i = y_i$$

Tentu saja cukup mudah untuk menghitung polinom diatas.

3.INTERPOLASI FUNGSI YANG TIDAK DIKETAHUI

Dalam banyak kasus, himpunan nilai-nilai diinterpolasi milik grafik fungsi yang tidak diketahui, yaitu $y_i = f(x_i), i = \overline{1,m}$ dan masalahnya adalah:

Cari P polinomial, yang memiliki derajat (maksimum) m-1, dan memenuhi:

$$P(x_i) = f(x_i), i = \overline{1,m}$$

Dengan memperhatikan hasil sebelumnya, polinomial seperti itu ada dan itu unik. Kasus interpolasi fungsi memiliki berbagai aplikasi, misalnya, dalam perkiraan penurunan dan integrasi fungsi yang tidak diketahui. Aplikasi ini berdasarkan dalil berikut, yang menjelaskan besarnya kesalahan yang dibuat oleh kurang lebih sama dengan fungsi f oleh polinomial P.

Teorema 3. Coba kita bandingkan fungsi $f:[a,b]\to R$, $f \in C^m([a,b])$ dan himpunan nilai $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a,b], x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ maka interpolasi polinom P memenuhi

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{1}{m!}\sup_{u\in[a,b]}|f^{(m)}(u)||(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)|$$

Demonstrasi : kita akan menggunakan fungsi bantu

$$\varphi:[a,b]\to R, \varphi(t) = f(t) - P(t) - a(t-x_1)\dots(t-x_m)$$

dimana a didefinisikan dengan kondisi $\varphi(x) = 0, x \neq x_i, i = \overline{1,m}$ yang menyatakan

$$a = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_m)} \quad \dots(2)$$

Di lain pihak $\varphi(x) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_m) = 0$

sehingga kita dapat menggunakan teorema **Rolle** m-kali, sesuai dengan masing-masing pasangan nilai-nilai di atas. Ada yang berbeda dari nilai-nilai m, sehingga φ' turunan memiliki nilai 0.

Penegasan di atas dapat digunakan berulang, untuk turunan berturut-turut fungsi φ, dan akhirnya hasil bahwa ada ξ ∈(a,b) sehingga:

$$\varphi^{(m)}(\xi) = 0$$

Tetapi

$$\varphi^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) - P^{(m)}(t) - (a(t-x_1)\dots(t-x_m))^{(m)} = f^{(m)}(t) - 0 - m!a$$

yang menunjukkan $\varphi^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(\xi) - m!a = 0$

Hasil terakhir memberikan nilai baru a yaitu

$$a = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

dan dengan menggunakan persamaan (2) menghasilkan :

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_m)} = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

kesimpulannya terdapat $\xi \in (a,b)$ dimana tergantung pada $x, x_1, \dots, x_m$ sehingga

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

Dan kseimpulannya tentu saja dengan menggunakan modulus

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{1}{m!}\sup_{u\in[a,b]}|f^{(m)}(u)||x-x_1||x-x_2||x-x_m|$$

4.FORMULA NEWTON, BERDASARKAN DIFFERENSIAL TERBAGI

Mari kitaperhatikan fungi $f:[a,b]\to R$ dan $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a,b],\ x_i \neq x_j, \forall i \neq j$.

selanjutnya kita akan menunjukkan polinom interpolasi $g(x; x_1, x_2, \dots, x_m)$ koresponden dengan set nilai $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$.

Definisi 1. Dengan defini, diferensial terbagi dari fungsi f , yang sesuai dengan poin x1,x2,…,x m adalah koefisien dari x^{m-1} dalam $g(x; x_1, x_2, \dots, x_m)$

Kita akan menyebut nilai ini dengan $f[x_1, x_2, \dots, x_m]$

Observasi 1.

$f[x_1, x_2, \dots, x_m] = f[x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}]$ untuk semua permutasi $(i1, i2, \dots, im)$

Observasi 2. Dengan memperhitungkan dua contoh sebelumnya kita mempunyai

$$f[c] = f(c)$$

$$f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema 4 (Rumus Newton). Dengan f adalah fungsi $f:[a,b]\to R$ and $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a,b], x_i \neq x_j, \forall i \neq j$

Maka

$$g(x;x_1,x_2,...,x_m)=f[x_1]+f[x_1,x_2](x-x_1)+...$$
$$+f[x_1,x_2,...,x_m](x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{m-1})$$

Demonstrasi. Pertama kita mempertimbangkan polinomial

$$k(x)=g(x;x_1,x_2,...,x_m)-g(x;x_1,x_2,...,x_{m-1})$$

yang mempunyai derajat m-1 dan m-1 kosong, $x_1,x_2,...,x_{m-1}$ secara konsekuen

$$k(x)=f[x_1,x_2,...,x_m](x-x_1)...(x-x_{m-1})$$

karena pangkat x^{m-1} hanya bisa ditemukan di $g(x;x_1,x_2,...,x_m)$

Dengan membandingkan dua rumus itu, menghasilkan

$$g(x;x_1,x_2,...,x_m)=g(x;x_1,x_2,...,x_{m-1})$$
$$+f[x_1,x_2,...,x_m](x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{m-1})$$

Rumus diatas bisa digunakan secara rekursif

$$g(x;x_1)=f[x_1]$$
$$g(x;x_1,x_2)=g(x;x_1)+f[x_1,x_2](x-x_1)$$
$$g(x;x_1,x_2,...,x_m)=g(x;x_1,x_2,...,x_{m-1})$$
$$+f[x_1,x_2,...,x_m](x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{m-1})$$

Dan dengan menjumlahkan kita akan mendapatkan rumus Newton.

5. RUMUS AITKEN

Cara lain untuk mengekspresikan polynomial interpolasi berdasarkan rumus Aitken, seperti dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 5 (Aitken)

$$g(x;x_1,x_2,...,x_m)=\frac{x-x_m}{x_1-x_m}g(x;x_1,x_2,...,x_{m-1})+\frac{x-x_1}{x_m-x_1}g(x;x_2,x_3,...,x_m)$$

Demonstrasi. Yang harus kita lakukan adalah untuk mengamati bahwa sisi kanan dari rumus di atas yang merupakan polinomial dan polinomial ini memenuhi semua kondisi interpolasi, yakni bertepatan dengan nilai-nilai fungsi f, di setiap titik Xi. Tapi, interpolasi polinomial ini unik, yang membuktikan rumus Aitken.

Observasi. Memperhatikan koefisien x^{m-1} di kedua sisi rumus Aitken, maka akan menghasilkan rumus berulang berikut perbedaan dibagi:

$$f[x_1,x_2,...,x_m]=\frac{f[x_1,x_2,...,x_{m-1}]-f[x_2,x_3,...,x_m]}{x_1-x_m}$$

6. BAGAIMANA MENGHITUNG POLINOMIAL INTERPOLASI, BERDASARKAN PADA RUMUS NEWTON

Berikut ini, kami menyajikan strategi berbasis Mathcad, untuk menghitung interpolasi polinomial, dengan menggunakan rumus Newton.

Pertama, kita mendefinisikan nilai-nilai yang akan diinterpolasi, dengan menggunakan meja "f" dan dua vektor pilihan, "x" dan "y".

f :=

	0	1
0	-1	-1
1	-3	-29
2	-2	-9
3	3	31

$x := f^{\langle 0 \rangle}$

$y := f^{\langle 1 \rangle}$

$m := 4$

Perbedaan dibagi dihitung secara rekursif seperti yang menunjukkan di bawah ini, dengan menjaga hanya itu saja yang digunakan dalam formula Newton.

```
difdiv(x,y,m) := | for j ∈ 2..m
                 |   for k ∈ j..m
                 |     | i ← m + j − k
                 |     | y[i−1] ← (y[i−2] − y[i−1]) / (x[i−j] − x[i−1])
                 | return y
```

Nilai perbedaan dibagi dapat disimpan di memori dalam vektor "y" atau menjadi satu yang baru.

$$y := \mathrm{difdiv}(x,y,m)$$

Akhirnya, polinomial tersebut diimplementasikan dengan menggunakan algoritma Horner.

```
pol(x,y,u) := | s ← y[m−1]
              | for k ∈ 1..m − 1
              |   | i ← m − k
              |   | s ← y[i−1] + (u − x[i−1])·s
              | return s
```

7. MODEL AUTOREGRESIF

Kita akan menyajikan dua cara, dalam rangka untuk menentukan beberapa model autoregresif, berdasarkan polinomial interpolasi.

Penggunaan polinomial Lagrange

Pertama, mari kita amati bahwa jika (Yt) adalah suatu selang waktu, maka interpolasi polinomial, berdasarkan nilai-nilai $y_{t-m},...,y_{t-1}$ dapat digunakan untuk memperkirakan Yt. Untuk melakukan ini adalah cukup untuk menghitung polinomial Lagrange, seperti yang kita dapat menunjukkan di contoh berikut:

1. Dua Poin, biasanya disebut sebagai (x1,y1) dan (x2,y2) menentukan polinomial Lagrange

$$L(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

dengan memperhitungkan langkah-langkah konstan

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$$

kita bisa memperhitungkan nilai

$$y_3 = L(x_3) = y_1 \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = -y_1 + 2y_2$$

dengan modelnya adalah

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2}$$

yang koresponden dengan model linear.

2. Tiga Poin, biasa disebut sebagai (x1,y1) , (x2,y2) dan (x3,y3) menentukan polinomial Lagrange

$$L(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Dengan memperhitungkan langkah-langkah konstan

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = h$$

Kita bisa menghitung

$$y_4 = L(x_4) = y_1 \frac{2h \cdot h}{(-h) \cdot (-2h)} + y_2 \frac{3h \cdot h}{h \cdot (-h)} + y_2 \frac{3h \cdot 2h}{2h \cdot h} = y_1 - 3y_2 + 3y_3$$

dengan modelnya

$$y_t = 3y_{t-1} - 3y_{t-2} + y_{t-3}$$

yang koresponden dengan polinomial derajat 2.

3. Empat Poin, biasa disebut sebagai (x1,y1) , (x2,y2) (x3,y3) dan (x4,y4) ditentukan dengan menggunakan teknik yang sama dengaan yang diatas, menghasilkan model derajat tiga

$$y_t = 4y_{t-1} - 6y_{t-2} + 4y_{t-3} - y_{t-4}$$

Penggunaan polinomial Taylor

Ada banyak alat-alat matematika untuk perkiraan fungsi. Salah satu yang paling penting adalah Taylor terkait dengan fungsi f. Mari kita mengandaikan bahwa fungsi: $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ is in $C^\infty[a,b]$

memiliki semua turunan seragam dibatasi, yaitu terdapat M > 0 sehingga $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall n \in \mathrm{N}, \forall x \in [a,b]$

maka

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \ldots, \forall x, x+h \in [a,b],$$

dan perkiraan rumus terbentuk

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

simpang kesalahan paling maksimal $\frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}$

Pada beberapa model, sangat mungkin bahwa kita tidak tahu derivatif dari fungsi f. Jadi, kita harus mendekati derivatif, pendekatan akhir yang tergantung pada itu.

Sebagai contoh, untuk n = 2, dengan menggunakan pendekatan derivatif, itu menghasilkan:

$$f(u+h) \approx f(u) + \frac{3f(u) - 4f(u-h) + f(u-2h)}{2} + \frac{f(u-h) - 2f(u) + f(u+h)}{2}$$

$$f(u+h) \approx 3f(u) - 3f(u-h) + f(u-2h)$$

Rumus di atas menunjukkan fakta yang sangat penting, jika kita mempertimbangkan selang waktu. Dalam suatu kasus, bahkan nilai-nilai adalah bilangan real, domain definisi tidak dapat dikaitkan dengan satu interval bilangan real. Namun, seperti yang kita amati, formula hanya berisi fungsi nilai-nilai, sehingga, untuk selang waktu (Yt) itu dapat dinyatakan sebagai:

$$y_{t+1} \approx 3y_t - 3y_{t-1} + y_{t-2}$$

yang berarti bahwa nilai masa depan Yt+1, dapat diprediksi, kira-kira seperti yang kita sudah tunjukkan, sebagai tergantung pada tiga nilai preseden.

Hal ini sangat luar biasa bahwa kita telah memperoleh rumus beberapa autoregresif, oleh menggunakan polinomial Taylor, seperti kita telah disebutkan, dengan menggunakan polinomial Lagrange!

KESIMPULAN

Dalam analisis suatu waktu, tidak mungkin untuk menggunakan model berdasarkan turunan dari riil fungsi f : R → R. Sebagai contoh, data statistik banyak berdasarkan jangka waktu tetap waktu, hari, minggu, bulan, dll, yang tidak memiliki arti bilangan real atau nilai.

Namun, beberapa rumus pendekatan fundamental matematika, seperti Taylor atau Lagrange, digunakan derivatif.

Seperti yang kita simpulkan dalam makalah ini, dengan menggunakan interpolasi polinomial, adalah mungkin untuk mengekspresikan suatu fungsi atau aproksimasi polinom, dengan menggunakan nilai preseden bukan argumen nilai-nilai, yaitu dengan menggunakan beberapa rumus autoregresif.

REFERENCES

Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1992

J. B. Lasserre. Global Optimization with Polynomials and the Problem of Mo-
ments. SIAM Journal on Optimization, Vol. 11, No. 3, pp. 796{817, 2001.

J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Sym-
metric Cones. Optimization Methods and Software, Vol. 11-12, pp. 625{653,
1999.

T. Kailath. Linear Systems. Prentice Hall, Englewood Cli s, NJ, 1980

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Mei 2011

ttd

Rio Cahya Dwiyanto 13506041