Penggunaan Metode Dekomposisi LU Untuk Penentuan Produksi Suatu Industri Dengan Model Ekonomi Leontief

Achmad Dimas Noorcahyo - 13508076
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
if18076@itb.ac.id

***Abstract*—Dalam suatu sistem ekonomi terdapat berbagai industri yang terkadang saling bergantung. Di samping memproduksi untuk memenuhi permintaan pasar yang ada di luar sistem, suatu industri harus menyediakan produksi untuk kelangsungan industri lainnya. Model ekonomi Leontief merupakan model matematika yang digunakan untuk menentukan nilai produksi yang harus dikeluarkan oleh industri-industri yang ada dalam sistem ekonomi yang sama agar dapat menjaga kelangsungan proses industri lainnya, namun di saat yang sama juga dapat memenuhi permintaan konsumen. Dari parameter-parameter yang didapatkan dari informasi permintaan dan nilai produksi, Model Leontief membentuk suatu sistem persamaan lanjar. Jika jumlah industri banyak, maka model ini akan direpresentasikan dalam sistem persamaan lanjar yang berskala cukup besar. Dalam makalah ini, diusulkan pencarian solusi untuk Model ekonomi Leontief menggunakan metode numerik Dekomposisi LU. Metode ini dinilai efisien dalam penghitungan solusi sistem persamaan lanjar berukuran besar. Analisis tentang pivoting, kondisi, dan galat pada sistem persamaan lanjar dari metode leontief akan disertakan dalam perancangan metode dekomposisi LU yang akan digunakan. Pengujian komputasi contoh kasus model Leontief juga akan dilakukan dalam makalah ini disertai dengan analisis hasil yang didapat.**

***Index Terms*—Dekomposisi LU, Model leontief, Penentuan produksi.**

I. PENDAHULUAN

Suatu sistem ekonomi yang utuh, seperti sebuah kota atau negara, dibentuk dari banyak komponen industri. Di dalam suatu kota mungkin terdapat industri perminyakan, industri listrik, industri penyedia tenaga kerja, dan industri transportasi. Masing-masing industri tersebut membutuhkan produk dari industri lainnya untuk menjalankan proses produksi. Untuk menjalankan industri listrik dibutuhkan minyak dan juga transportasi. Untuk memproduksi minyak, dibutuhkan listrik dan transportasi. Begitu juga dengan industri transportasi yang membutuhkan minyak untuk operasinya. Semua industri dalam suatu sistem ekonomi pasti membutuhkan produk yang dihasilkan industri lainnya yang ada dalam satu sistem ekonomi tersebut. Untuk menjaga keseimbangan dan kelangsungan industri dalam suatu sistem ekonomi maka semua industri tersebut harus melakukan produksi bukan hanya untuk memenuhi permintaan pasar, tetapi juga harus memastikan industri lain mendapatkan jumlah yang cukup untuk kelangsungan operasional mereka. Dengan penentuan jumlah produksi yang tepat oleh semua industri, maka sistem ekonomi tersebut dapat beroperasi dengan aman dan lancar, karena industri-industri di dalamnya dapat terus melakukan kegiatannya tampa perlu mengkhawatirkan kekurangan sumber daya.

Dalam ekonomi, penentuan jumlah produksi untuk masalah seperti ini ditangani dengan suatu model matematika yaitu model Leontief. Model Leontief memodelkan pencarian solusi nilai yang harus diproduksi oleh industri dengan membuat hubungan linear antara konsumsi, produksi, dan permintaan (*demand*) [4]. Namun, karena suatu sistem ekonomi memiliki banyak industri di dalamya, model ini direpresentasikan dalam bentuk sistem persamaanj lanjar. Semakin banyak jumlah industri yang akan ditentukan produksinya, semakin besar ukuran sistem persamaan linear dari model Leontief yang dibentuk. Hal ini membuat proses penghitungan solusi bukan lagi menjadi pekerjaan mudah. Untuk itu, dalam makalah ini, diusulkan penyelesaian sistem persamaan lanjar dari model Leontief menggunakan metode dekomposisi LU. Metode ini dikenal sebagai metode penyelesaian sistem persamaan lanjar bersifat langsung (*Direct Method*) yang cukup efisien. Metode penyelesaian yang diusulkan akan dirancang dan dianalisis sehingga cocok untuk diterapkan dalam penyelesaian metode Leontief ini.

II. MODEL EKONOMI LEONTIEF

Model ekonomi Leontief adalah sebuah model yang digunakan untuk analisis input dan output dari suatu sistem ekonomi [3]. Model ini digunakan untuk menganalisis kondisi saat output dari suatu industri digunakan untuk input pada industri lain [5]. Informasi yang digunakan dalam model Leontiefantara lain :

C : Konsumsi (Elemen c_{ij} dalam matriks ini merepresentasikan konsumsi produk j yang dibutuhkan oleh perusahaan i)
d : Permintaan (elemen vektor d_i merepresentasikan permintaan pasar yang ada di luar sistem pada produk yang dihasilkan perusahaan i)

Objektif pencarian utama dalam model ekonomi Leontief ini adalah mencari jumlah produksi yang tepat untuk masing-masing industri. Jumlah produksi ini direpresentasikan sebagai vektor produksi **x**. Vektor **x** inilah yang akan dicari solusinya dalam perhitungan Model Leontief.

Dari data tersebut diketahui bahwa baris ke i dari perkalian **Cx** merupakan jumlah konsumsi produk i yang dibutuhkan oleh seluruh industri. Setelah jumlah produksi dikurangi oleh jumlah konsumsi, harus terdapat sisa untuk memenuhi permintaan pasar luar. Oleh karena itu berlaku hubungan [2]:

x - Cx = d

Bentuk ini dapat diubah menjadi :
(I – C) x = d

Pada titik ini terbentuk model matematika berupa sistem persamaan lanjar. Untuk mendapatkan jumlah produksi masing-masing industri, sistem persamaan lanjar tersebut harus dicari solusinya sehingga **x** dapat ditemukan.

III. Metode Dekomposisi LU

A. Konsep Dekomposisi LU

Dekomposisi LU adalah cara penyelesaian Sistem Persamaan Lanjar dengan terlebih dahulu mamfaktorkan matriks Sistem Persamaan Lanjar menjadi dua matriks, Matriks pertama adalah matriks segitiga bawah dengan diagonal semua bernilai satu, sedangkan matriks kedua adalah matriks segitiga atas [1]

Ilustrasi metode dekomposisi LU sebagai berikut :

Matriks A :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Difaktorkan menjadi matriks segitiga bawah L dan matrik segitiga atas U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Dengan mengasumsikan **Ux** = **z**,

Lz = **b** dapat diselesaikan dengan teknik penyulihan maju. Setelah **z** didapat maka **Ux** = **z** dapat diselesaikan dengan Teknik penyulihan mundur.

A. Reduksi Crout

Reduksi Crout adalah algoritma untuk melakukan dekomposisi suatu matriks menjadi dua bagian yaitu matriks bagian atas dan matriks bagian bawah. Reduksi Crout didasarkan pada kesamaan :

A=LU

Dengan menyelesaikan persamaan ini bergantian dimulai dari baris pertama U, baris kedua L, baris kedua U, baris kedua L, dan seterusnya, maka diperoleh rumus reduksi Crout sebagai berikut [1]:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{kj}$$

Dengan p = 1,2,…,n   serta   j =p, p+1,….,n dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} l_{ik} u_{kq}}{u_{qq}}$$

Dengan q = 1, 2,….,n-1   serta i=q+1, q+2,…..,n

Namun, biasanya dalam representasi fisik di algoritma, hasil matriks L dan matriks U dalam reduksi Crout tidak akan diletakkan dalam matriks yang terpisah. Untuk menghemat ruang struktur data, maka Matriks L dan Matriks U akan diletakkan dalam satu matriks. Ini bisa dilakukan karena matriks L berbentuk matriks segitiga bawah, sedangkan U berbentuk matriks segitiga bawah.

IV. Pencarian Solusi Metode Leontief dengan Dekomposisi LU

Sistem persamaan lanjar model Leontief biasanya berukuran besar karena dalam suatu sistem ekonomi seperti kota terdapat banyak industri yang saling berhubungan. Untuk menyelesaikan sistem persamaan yang besar tersebut, metode Dekomposisi LU dapat digunakan untuk menemukan solusi jumlah produksi dari semua industri. Bentuk persamaan model Leontief yang akan dicari adalah :

(I – C) x = d

Matriks **C** didapatkan dari data konsumsi semua produk yang dibutuhkan oleh semua industri dalam sistem ekonomi tersebut. Dalam hal ini produk dari suatu industri dapat digunakan oleh industri itu sendiri. Misalnya, untuk menjalankan suatu industri listrik tentu dibutuhkan listrik untuk operasinya.

Satu baris dalam matriks konsumsi merepresentasikan sebuah industri dengan semua kebutuhan konsumsinya.

$c_{i1} \quad c_{i2} \quad c_{i3} \quad \ldots \quad c_{in}$

merepresentasikan daftar jumlah konsumsi yang dibutuhkan oleh industri i untuk operasionalnya. c_{i1} adalah jumlah konsumsi produk dari industri 1 yang dibutuhkan oleh industri i, c_{i2} adalah jumlah konsumsi produk dari industri 2 yang dibutuhkan oleh industri i, dan seterusnya hingga n. Secara umum c_{ij} adalah jumlah konsumsi produk dari industri j yang dibutuhkan oleh industri i untuk mendukung operasinya. Matriks C dimodelkan seperti berikut :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

d adalah daftar permintaan pasar yang ada di luar sistem ekonomi. d_i merepresentasikan permintaan pasar yang ada di luar sistem pada produk yang dihasilkan perusahaan i. d dimodelkan dalam bentuk berikut :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

x yang merupakan jumlah produksi tiap industri berperan sebagai solusi yang akan dicari dari sistem persamaan lanjar Leontief. Maka sistem persamaan lanjar yang dimodelkan adalah :

$$\mathbf{(I – C)\ x = d}$$

$$\begin{pmatrix} 1-c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & 1-c_{22} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & 1-c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan lanjar ini dapat diselesaikan dengan metode Dekomposisi LU. Langkah pertama adalah melakukan dekomposisi Matriks dalam sistem persamaan lanjar tersebut menjadi matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Dekomposisi dilakukan dengan menggunakan reduksi crout.

Langkah (1) : Dekomposisi

Matriks hasil pengurangan dari matriks identitas dan Matriks konsumsi (**I - C**) menjadi matriks utama dari sistem persamaan lanjar Model Leontief.
Pada langkah awal ini dilakukan dekomposisi dari matriks (**I - C**) menjadi matriks segitiga bawah L dan matriks segitiga atas U memanfaatkan reduksi crout.

Masukan :

$$\mathbf{(I - C)} = \begin{pmatrix} 1-c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & 1-c_{22} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & 1-c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Proses dekomposisi (Reduksi Crout) :

```
procedure crout(n:integer, input/output
A:matriks)

KAMUS LOKAL
i,j,k,p : integer
t : real
ALGORITMA

  p traversal [1..n]
    j traversal [k..n]
      t ← Ap,j
      k traversal [1..p-1]
           t ← t - (Ap,k*Ak,j);
      Ap,j ← t;

    i traversal [p+1..n]
      t ← Ai,p;
      h traversal [1..p-1]
           t ← t -(Ai,k*Ak,p)
      Ai,p ← t/Ap,p
```

$$\Downarrow$$

Keluaran :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Langkah ini dilanjutkan dengan menyelesaikan persamaan **Lz** = **b** dengan teknik penyulihan maju.

*Langkah (2) : Penyelesaian **Lz = b***

Matriks **L** yang didapatkan dari dekomposisi (**I-C**) dimanfaatkan terlebih dahulu dengan membentuk suatu sistem persamaan lanjar bersama dengan vektor *demand* **d** . Sistem persamaan lanjar ini akan menghasilkan **z** yang merupakan vektor perantara dalam pencarian solusi. Penyelesaian sistem ini dilakukan dengan penyulihan maju.

Lz = b $\Longrightarrow$ $$z_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} z_j}{a_{kk}}$$

Proses penyulihan maju

$\Downarrow$

Didapatkan hasil perantara **z**

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \vdots \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Langkah (2) : Penyelesaian ***Ux = z***

Setelah z didapatkan maka solusi jumlah produksi menjadi objek pencarian dapat ditemukan dengan melakukan penyulihan mundur pada sistem persamaan lanjar **Ux = z**

Ux = z $\Longrightarrow$ $$x_k = \frac{z_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

Proses penyulihan mundur

$\Downarrow$

Solusi **x** didapatkan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sehingga sudah ditunjukkan bahwa dengan penerapan metode Dekomposisi LU pada model Leontief, dapat ditemukan jumlah output yang harus diproduksi masing-masing industri yang terdapat dalam sistem ekonomi agar dapat memenuhi permintaan pasar di luar sistem maupun dapat memenuhi kebutuhan industri-industri lainnya di dalam sistem. Jumlah output produksi ini termuat dalam solusi **x**.

V. EKSPERIMEN : STUDI KASUS SISTEM EKONOMI KOTA

Pada bagian ini akan dilakukan pengujian penyelesaian model Leontief menggunakan dekomposisi LU untuk studi kasus sistem ekonomi yang berupa sebuah kota. Semua pengujian dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman C. Proses penghitungan dan hasil akan menjadi fokus utama pada pengujian ini.

Misalnya, dalam sebuah kota kecil, terdapat beberapa industri dalam berbagai bidang. Dalam kota tersebut terdapat industri pertanian, konstruksi, energi, listrik, manufaktur, dan jasa. Keenam industri tersebut saling memiliki ketergantungan. Setiap industri membutuhkan produk dari kelima industri lainnya dan juga produknya sendiri untuk dapat beroperasi. Kebutuhan konsumsi dari industri-industri dalam sistem ekonomi tersebut tertulis dalam data berikut :

- ➔ Industri pertanian membutuhkan konsumsi sebesar \$0.02 produk tani, \$0.03 produk konstruksi, \$0.05 produk energi, \$0.02 produk listrik, \$0.08 produk manufaktur, dan \$0.05 jasa per harinya.
- ➔ Industri konstruksi membutuhkan konsumsi sebesar \$0.05 produk tani, \$0.08 produk konstruksi, \$0.08 produk energi, \$0.06 produk listrik, \$0.02 produk manufaktur, dan \$0.04 jasa per harinya.
- ➔ Industri energi membutuhkan konsumsi sebesar \$0.07 produk tani, \$0.06 produk konstruksi, \$0.06 produk energi, \$0.04 produk listrik, \$0.03 produk manufaktur, dan \$0.02 jasa per harinya.
- ➔ Industri listrik membutuhkan konsumsi sebesar \$0.02 produk tani, \$0.04 produk konstruksi, \$0.07 produk energi, \$0.04 produk listrik, \$0.06 produk manufaktur, dan \$0.08 jasa per harinya.
- ➔ Industri manufaktur membutuhkan konsumsi sebesar \$0.04 produk tani, \$0.07 produk konstruksi, \$0.02 produk energi, \$0.06 produk listrik, \$0.08 produk manufaktur, dan \$0.03 jasa per harinya.
- ➔ Industri jasa membutuhkan konsumsi sebesar \$0.03 produk tani, \$0.06 produk konstruksi, \$0.06 produk energi, \$0.08 produk listrik, \$0.02 produk manufaktur, dan \$0.06 jasa per harinya.

Dari data tersebut terbentuk matriks konsumsi :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.02 & 0.08 & 0.05 \\ 0.05 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.02 & 0.04 \\ 0.07 & 0.06 & 0.06 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.07 & 0.04 & 0.06 & 0.08 \\ 0.04 & 0.07 & 0.02 & 0.06 & 0.08 & 0.03 \\ 0.03 & 0.06 & 0.06 & 0.08 & 0.02 & 0.06 \end{pmatrix}$$

Permintaan yang datang dari luar kota untuk masing-masing industri adalah sebagai berikut :

Permintaan produk tani : \$300

Permintaan produk konstruksi : $400
Permintaan produk energi : $450
Permintaan produk listrik : $320
Permintaan produk manufaktur : $350
Permintaan produk jasa : $200

Sehingga, matriks permintaan yang memuat permintaan dari luar kota untuk semua industri adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 450 \\ 320 \\ 350 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Setelah kebutuhan konsumsi dan permintaan diketahui, produksi untuk masing-masing industri dapat dicari dengan menemukan vektor solusi **x** dalam pemodelan sistem persamaan lanjar Leontief :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C})\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$\begin{pmatrix} 0.98 & -0.03 & -0.05 & -0.02 & -0.08 & -0.05 \\ -0.05 & 0.92 & -0.08 & -0.06 & -0.02 & -0.04 \\ -0.07 & -0.06 & 0.94 & -0.04 & -0.03 & -0.02 \\ -0.02 & -0.04 & -0.07 & 0.96 & -0.06 & -0.08 \\ -0.04 & -0.07 & -0.02 & -0.06 & 0.92 & -0.03 \\ -0.03 & -0.06 & -0.06 & -0.08 & -0.02 & 0.94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 450 \\ 320 \\ 350 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Model Leontief yang terbentuk berbentuk sistem persamaan lanjar yang berukuran cukup besar yaitu 6x6. Solusi x yang merupakan nilai yang harus diproduksi oleh masing-masing industri dapat dihitung dengan menggunakan metode dekomposisi LU. Pengujian yang dilakukan menghasilkan proses penghitungan berikut :

Proses dan Hasil Pengujian

Matriks **L**

$$\begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.05 & 0.9185 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.07 & -0.0621 & 0.9308 & 0 & 0 & 0 \\ -0.02 & -0.0406 & -0.0747 & 0.9508 & 0 & 0 \\ -0.04 & -0.0712 & -0.0284 & -0.0679 & 0.9094 & 0 \\ -0.03 & -0.0609 & -0.067 & -0.0901 & -0.0322 & 0.9258 \end{pmatrix}$$

Matriks **U**

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.0306 & -0.051 & -0.0204 & -0.0816 & -0.051 \\ 0 & 1 & -0.0899 & -0.0664 & -0.0262 & -0.0463 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0812 & -0.0294 & -0.0067 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.0682 & -0.0877 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.0456 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solusi **x**

$$\begin{pmatrix} 421.64 \\ 565.79 \\ 591.73 \\ 469.10 \\ 496.71 \\ 350.59 \end{pmatrix}$$

Dari hasil pengujian, metode Dekomposisi LU berhasil menemukan solusi dari model Leontief yang berupa sistem persamaan lanjar dengan kesimpulan solusi sebagai berikut :

x1 = 421.64
x2 = 565.79
x3 = 591.73
x4 = 469.10
x5 = 496.71
x6 = 350.59

Interpretasi hasil :
Agar dapat memenuhi permintaan dari luar kota sekaligus memenuhi kebutuhan konsumsi semua industri yang ada dalam kota, maka :

- Industri pertanian harus melakukan produksi senilai $421.64 per hari.
- Industri konstruksi harus melakukan produksi senilai $565.79 per hari.
- Industri energi harus melakukan produksi senilai $591.73 per hari.
- Industri listrik harus melakukan produksi senilai $469.10 per hari.
- Industri manufaktur harus melakukan produksi senilai $496.71 per hari.
- Industri jasa harus melakukan produksi senilai $350.59 per hari.

VI. Analisis Hasil dan Metode

Pada bagian ini akan dilakakukan analisis terhdap hasil yang sudah didapat saat pengujian. Analisis terhadap karakteristik-karakteristik matematis yang dimiliki oleh Model Leontief juga akan dijabarkan. Selain menganalisis hasil, evaluasi terhadap metode yang digunakan yaitu dekomposisi LU juga menjadi fokus utama.

Karakteristik Sistem Persamaan Lanjar dari Model Leontief

Dalam melakukan penghitungan numerik, perilaku dari model yang akan dicari menjadi hal yang menentukan performa komputasi dan berpengaruh pada rancangan algoritma numerik yang digunakan. Model Leontief memiliki karakteristik-karakteristik alami sebagai berikut :

- Semua elemen matriks konsumsi, permintaan, dan juga jumlah produksi tidak dapat bernilai negatif
- Suatu industri pasti membutuhkan produk dari industri lain. Tidak mungkin suatu industri tidak membutuhkan apa-apa untuk melakukan operasi produksinya.
- Matriks yang muncul dalam model Sistem Persamaan Lanjar beranggotakan bilangan-bilangan yang kecil, sementara *demand* biasanya muncul sebagai bilangan besar.
- Tidak semua produk industri dibutuhkan untuk melakukan operasi suatu industri. Oleh karena itu kemungkinan dalam model berukuran besar banyak elemen matriks sistem persamaan lanjar yang bernilai 0
- Ada kemungkinan hasil solusi x mengandung nilai negatif. Masalah ini bukan datang dari ranah komputasi tetapi dari ranah pemodelan. Dalam ekonomi jika terdapat elemen solusi yang bernilai negatif, maka matriks konsumsi dikatakan tidak produktif

Karakteristik dari model Leontief berpengaruh terhadap penanganan di dalam metode komputasi yang digunakan. Karena Dekomposisi LU yang diusulkan dalam makalah ini dapat dirancang secara khusus untuk menangani perilaku sistem persamaan model Leontief, maka berikut akan dianalisis tindakan penyesuaian metode dan penanganan khusus untuk menangani semua karakteristik yang ada :

Karakteristik Model	Analisis dan Penanganan
Elemen matriks konsumsi dan permintaan tidak dapat bernilai negatif	Membuat penanganan khusus untuk mengecek tanda positif atau negatif dari semua elemen
Tidak mungkin suatu industri tidak membutuhkan apa-apa untuk melakukan operasi produksinya.	Artinya tidak mungkin ada sebuah baris pada matriks yang semua elemennya bernilai nol. Maka tidak perlu ditambahkan prosedur pivoting pada metode yang digunakan.
Matriks yang muncul dalam model Sistem Persamaan Lanjar beranggotakan bilangan-bilangan yang kecil, sementara *demand* biasanya muncul sebagai bilangan besar.	Rawan galat pada penghitungan metode Dekomposisi LU. Sebaiknya buat prosedur penskalaan (*scaling)* untuk menstandarkan bilangan. Selalu gunakan bilangan presisi ganda dalam komputasi.
Tidak semua produk industri dibutuhkan untuk melakukan operasi suatu industri sehingga banyak elemen matriks sistem persamaan lanjar yang bernilai 0	Agar proses komputasi lebih efisien dapat ditambahkan teknik teknik *sparse matrix* pada metode yang digunakan
Hasil solusi x mengandung nilai negatif (matriks konsumsi tidak produktif)	Membuat penanganan khusus untuk mengecek apakah terdapat elemen solusi jumlah produksi x yang bernilai negatif.

Metode Dekomposisi LU dipilih oleh penulis untuk penyelesaian Model Leontief dengan pertimbangan sebagai berikut :

1. Sistem persamaan Lanjar yang muncul dari model ekonomi Leontief tidak memiliki ukuran yang sangat besar. Meskipun dalam kasus banyak industri matriks berukuran cukup besar, namun ukuran ini tidak akan mencapai skala ribuan. Jika skala matriks sudah sangat besar seperti itu, memang sebaiknya digunakan metode yang bersifat iteratif. Namun, pada kasus Model Leontief ini cukup digunakan metode langsung (*direct method*) untuk penyelesaiannya.
2. Di kalangan metode penyelesaian sistem persamaan lanjar langsung, metode Dekomposisi LU yang mangkus dibandingkan metode-metode lainnya

Untuk argumen kedua tersebut, akan dibuktikan bahwa metode Dekomposisi LU merupakan metode langsung yang mangkus dengan cara melakukan analisis kompleksitas. Analisis ini juga akan meberi gambaran tentang kemangkusan metode Dekomposisi LU dalam menyelesaikan Model Leontief.

Operasi utama pada metode-metode penyelesaian sistem persamaan lanjar adalah penjumlahan dan perkalian. Berikut adalah hasil analisis kompleksitas yang didapatkan dari penghitungan operasi-operasi tersebut.Setelah penghitungan operasi pada algoritma reduksi crout digabungkan dengan penghitungan operasi pada penyulihan maju dan mundur, maka didapatkan kompleksitas Metode Dekomposisi LU sebagai berikut :

Metode Dekomposisi LU Crout
Penjumlahan : $T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n + 2$
Perkalian : $T(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n + 4$

Sebagai perbandingan dilakukan juga analisis metode penyelesaian sistem persamaan lanjar langsung yang lain yaitu eliminasi gauss dan gauss-jordan.. :

Metode Eliminasi Gauss
Penjumlahan : $T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{6}n + 2$
Perkalian : $T(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n + 1$

Metode Eliminasi Gauss-Jordan
Penjumlahan : $T(n) = n^3 - n$
Perkalian : $T(n) = n^3 + n^2$

Metode Dekomposisi LU dapat menyelesaikan sistem persamaan lanjar metode Leontief dengan kecepatan orde 3. Sebenarnya ketiga metode langsung tersebut memiliki orde yang sama, namun metode Dekomposisi LU dan Gauss memiliki pengali 1/3 sehingga lebih mangkus dibanding penyelesaian dengan Gauss-Jordan. Jika jumlah n besar pengali 1/3 ini akan membuat perbedaan yang cukup signifikan.

Untuk npenyelesaian metode Leontief, kompelsitas orde 3 sudah dapat diterima, karena jenis industri dalam suatu sistem ekonomi walau banyak namun terbatas.

VII. KESIMPULAN

Dalam makalah ini, telah diusulkan teknik penyelesaian sistem persamaan lanjar berupa model ekonomi Leontief menggunakan metode Dekomposisi LU dengan reduksi crout. Metode dekomposisi LU dirancang dengan menyesuaikan karakteristik alami dari model ekonomi yang berguna untuk mencari jumlah produksi tiap industri dalam sistem ekonomi ini.. Solusi hasil yang didapatkan dari pengujian adalah sebuah vektor solusi yang merepresentasikan jumlah produksi untuk tiap industri. Hasil pengujian menunjukkan bahwa tiap anggota vektor solusi ini menunjukkan konsistensi yang baik terhadap lingkup persoalan. Kemudian dari analisis metode, kompleksitas algoritma dekomposisi LU diketahui cukup mangkus di antara metode-metode langsung lainnya. Pertimbangan ukuran sistem persamaan yang terbentuk juga menunjukkan bahwa metode iteratif tidak terlalu diperlukan untuk penyelesaian model ekonomi ini. Sehingga metode dekomposisi LU yang diusulkan dapat menyelesaikan model Leontief secara efektif dan efisien efisien.

REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi, “Metode Numerik”,Penerbit Informatika, 2010.

[2] Anton, Howard & Chris Rorres, “*Elementary Linear Algebra*”, John Wiley & Sons, 2000

[3] http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/.../iris/lapaper.pdf
Tanggal Akses : 12 Mei 2011 19.11

[4] http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/LeontiefModelMod.html
Tanggal Akses :12 Mei 2011 19.30

[5] www.mathstat.carleton.ca/~lhaque/section3-3.pdf
Tanggal Akses : 12 Mei 2011 19.38

[6] www.math.uiuc.edu/~wgreen4/Math124S07/Leontief.pdf
Tanggal Akses : 12 Mei 2011 19.55

[7] http://homepage.newschool.edu/~het/essays/classic/openleon.htm
Tanggal Akses : 12 Mei 2011 20.11

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 13 Mei 2011

ttd

Achmad Dimas Noorcahyo
13508076