

Solusi UTS IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS)

Dosen: Rinaldi M
Kamis, 9 April 2026
Waktu: 120 menit

Berdoalan terlebih dahulu sebelum mengerjakan ujian ini.

1. **(Nilai 10)** Tuliskan apakah pernyataan pada setiap soal di bawah ini **benar** atau **salah**. Tidak perlu menuliskan alasannya
- (a) Misalkan p adalah “Helmi suka main tenis”, q adalah “Helmi suka berenang”, dan r adalah “Helmi suka terbang layang”. Maka, pernyataan “Helmi tidak suka berenang maupun terbang layang, namun dia suka main tenis” dapat ditulis dalam ekspresi logika $(\sim r \wedge q) \wedge p$
 - (b) Ekspresi logika berikut: $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ekuivalen dengan $\sim p$
 - (c) Negasi kalimat “Pertandingan akan dilanjutkan hanya jika hari tidak hujan” adalah “Hari hujan atau pertandingan tidak akan dilanjutkan”
 - (d) Ekspresi logika $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ adalah sebuah tautologi
 - (e) Diberikan sebuah argumen sebagai berikut: “Jika seorang dosen bergelar Doktor, maka dia bahagia. Seorang dosen tidak bergelar Doktor. Jadi, dosen tersebut tidak bahagia”. Kesimpulan argument tersebut tidak valid.
 - (f) Kontraposisi dari pernyataan “Perlu tubuh kuat untuk menjadi seorang pelaut” adalah “Jika ia bukan seorang pelaut maka tubuhnya tidak kuat”
 - (g) Jika pernyataan $p \rightarrow q$ salah, maka nilai pernyataan $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow q$ adalah salah
 - (h) Implikasi $p \rightarrow q$ ekuivalen secara logika dengan $\sim q \rightarrow \sim p$
 - (i) Diberikan proposisi berikut $\sim ((p \vee \sim q) \wedge (r \rightarrow \sim s))$. Diketahui r bernilai FALSE, maka hasil penyederhanaanya adalah $\sim p \wedge q$
 - (j) *Inversi* dari pernyataan “Jika x kurang dari nol maka x bukan bilangan positif” adalah “Jika x tidak kurang dari nol maka x bilangan positif”

Jawaban:

- (a) Salah
 - (b) Salah
 - (c) Salah
 - (d) Benar
 - (e) Benar
 - (f) Salah
 - (g) Benar
 - (h) Benar
 - (i) Benar
 - (j) Benar
2. **(Nilai 15)** Terdapat studi *benchmark* kinerja lima bahasa pemrograman: *Python*, *Java*, *C++*, *JavaScript*, dan *Go*. Dalam setiap pengujian, dua bahasa dibandingkan pada *platform* tertentu (misalnya web, sistem, atau data processing), dan hasilnya menunjukkan mana yang lebih efisien dalam eksekusi sebuah program. Didefinisikan relasi R pada himpunan bahasa pemrograman, yang dalam hal ini xRy berarti bahasa x selalu lebih efisien (misalnya lebih cepat atau lebih hemat resource) dibandingkan bahasa y dalam setiap pengujian.

Python lebih efisien daripada *Java* dan *JavaScript*
Java lebih efisien daripada *C++* dan *Go*
C++ lebih efisien daripada *Python* dan *JavaScript*
JavaScript lebih efisien daripada *Java* dan *Go*

Go lebih efisien daripada *Python* dan *C++*

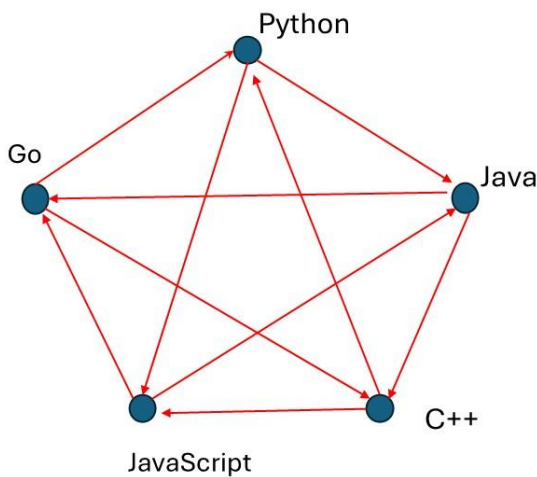
Diberikan urutan bahasa: [*Python*, *Java*, *C++*, *JavaScript*, *Go*].

- (a) Buat matriks dan graf berarah yang merepresentasikan relasi *R*
 (b) Tentukan sifat relasi *R* apakah refleksif, setangkup, tolak setangkup, menghantar

Jawaban:

- (a) Matriks dan graf berarah yang merepresentasikan relasi *R*

	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>C++</i>	<i>JS</i>	<i>G</i>
<i>P</i>	0	1	0	1	0
<i>J</i>	0	0	1	0	1
<i>C++</i>	1	0	0	1	0
<i>JS</i>	0	1	0	0	1
<i>G</i>	1	0	1	0	0



- (b) Sifat-sifat relasi :

- Tidak refleksif sebab (Python, Python) $\notin R$, begitu juga untuk bahasa yang lain
- Tidak setangkup, karena (Python, Java) $\in R$ tetapi (Java, Python) $\notin R$
- Tolak setangkup, karena bila dilihat dari matriksnya elemen di bawah diagonal utama bukan hasil pencerminan dari elemen di atas diagonal utama
- Tidak menghantar karena (Python, Java) $\in R$ dan (Java, C++) $\in R$ tetapi (Python, C++) $\notin R$

3. (Nilai 10) Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x \bmod 8$ dan $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

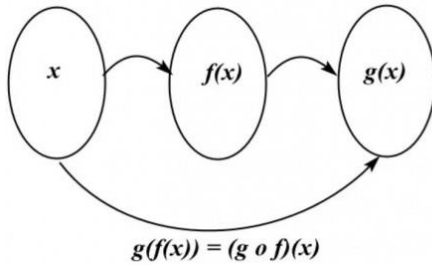
- (a) Tentukan jelajah (*range*) fungsi $g \circ f$

- (b) Lengkapi tabel di bawah ini dengan memberikan tanda centeng (\surd) pada sel yang kosong

Fungsi	Injektif	Surjektif	Bijektif
f			
g			

Jawaban:

- (a) $(g \circ f)(x)$ artinya mengoperasikan nilai x dengan fungsi f , kemudian hasil operasi tersebut dioperasikan dengan fungsi g .



Oleh karena itu, pada fungsi komposisi $g \circ f$, nilai yang akan dioperasikan dengan fungsi g hanyalah nilai yang termasuk dalam range fungsi f , yaitu:

$$\{x \mid 0 \leq x < 8, x \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Untuk menemukan range dari fungsi $g \circ f$, kita dapat mengenumerasi setiap bilangan $x \in \text{range } f$, kemudian menemukan nilai $g(x)$ yang bersesuaian:

x	$g(x)$
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2
5	6
6	12
7	20

Oleh karena itu, diperoleh range fungsi $g \circ f$ adalah $\{0, 2, 6, 12, 20\}$.

(b) Sifat-sifat fungsi f dan g

1) Apakah f merupakan fungsi satu-ke-satu (injektif)?

Tidak, karena terdapat lebih dari satu elemen domain yang memiliki bayangan yang sama, misalnya $f(1) = f(9) = 1$.

2) Apakah f merupakan fungsi pada (surjektif)?

Tidak, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan bayangan dari f

3) Apakah f merupakan fungsi berkoresponden satu-ke-satu (bijektif)?

Tidak, karena fungsi f bukan fungsi satu-ke-satu dan juga bukan fungsi pada. Suatu fungsi berkoresponden satu-satu jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan fungsi satu-ke-satu **DAN** fungsi pada. Jika salah satu syarat tidak terpenuhi, maka fungsi tersebut tidak berkoresponden satu-satu.

4) Apakah g merupakan fungsi satu-ke-satu (injektif)?

Tidak, karena terdapat dua nilai x berbeda memiliki bayangan yang sama, yaitu $f(2) = f(3) = 0$

5) Apakah fungsi g merupakan fungsi pada (onto) atau surjektif?

Tidak, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari g , misalnya 1. Tidak terdapat $x \in \mathbf{Z}$ sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 1$ (hal ini tentu berbeda jika domain fungsi g adalah bilangan riil).

Tabel tetap kosong:

Fungsi	Injektif	Surjektif	Bijektif
f			
g			

4. (Nilai 5) Apa yang salah pada pembuktian induksi matematika di bawah ini? Tuliskan letak kesalahannya dan alasannya.

Teorema: Untuk setiap bilangan bulat positif n , jika x dan y adalah bilangan bulat positif dengan $\max(x, y) = n$, maka $x = y$.

Langkah basis: Misalkan $n = 1$. Jika $\max(x, y) = 1$ dan x dan y adalah bilangan bulat positif, maka kita memiliki $x = y = 1$

Langkah Induksi: Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Asumsikan bahwa jika x dan y adalah bilangan bulat positif dengan $\max(x, y) = n$, maka $x = y$ (hipotesis induksi). Sekarang misalkan $\max(x, y) = n + 1$, yang dalam hal ini x dan y adalah bilangan bulat positif. Maka $\max(x - 1, y - 1) = n$, sehingga berdasarkan hipotesis induksi, $x - 1 = y - 1$. Dari sini diperoleh $x = y$, yang melengkapi langkah induksi

Jawaban:

Kesalahan terdapat pada $\max(x - 1, y - 1)$, sebab $x - 1$ atau $y - 1$ dapat bernilai 0, padahal disebutkan di dalam $\max(x, y)$ x dan y harus bilangan bulat positif.

5. (Nilai 10) Diberikan $f(1) = 1$ dan $f(n) = 2022f(n - 1)$ untuk setiap bilangan bulat $n > 1$. Diberikan pula $g(n) = 2022^{(n-1)}$ untuk setiap bilangan bulat $n > 0$. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa $f(n) = g(n)$ untuk setiap bilangan bulat positif n .

Jawaban:

Diketahui:

$$f(1) = 1$$

$$f(n) = 2022 f(n - 1), n > 1$$

$$g(n) = 2022^{(n-1)}, n > 0$$

Akan dibuktikan bahwa berlaku $f(n) = g(n)$ untuk setiap bilangan bulat positif n .

Basis induksi

Untuk kasus basis $n = 1$ diperoleh $f(1) = 1$ dan $g(1) = 2022^0 = 1$, sehingga $f(n) = g(n)$

Langkah induksi

Asumsikan $f(n) = g(n)$ benar sehingga $f(n) = 2022^{(n-1)}$, untuk bilangan bulat positif n (Hipotesis induksi), akan dibuktikan bahwa $f(n+1) = g(n+1)$ sebagai berikut:

$$f(n + 1) = 2022 f(n + 1 - 1)$$

$$f(n + 1) = 2022 f(n)$$

$$f(n + 1) = 2022 (2022^{(n-1)}) \quad (\text{dari hipotesis induksi})$$

$$f(n + 1) = 2022^{(n+1-1)}$$

$$f(n + 1) = g(n + 1)$$

Karena pernyataan terbukti benar pada basis dan langkah induksi, maka pernyataan $f(n) = g(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n .

6. (Nilai 10) Tentukan nilai S dari sumasi berikut: $S = \sum_{k=1}^{100} 3k + \sum_{k=5}^{101} (4k - 1)$

Jawaban:

Menghitung $\sum_{k=1}^{100} 3k$:

$$\text{Karena } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ maka } \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

$$\text{sehingga } \sum_{k=1}^{100} 3k = 3 \times 5050 = 15150$$

Menghitung $\sum_{k=5}^{101}(4k - 1)$:

$$\sum_{k=5}^{101}(4k - 1) = \sum_{k=1}^{101}(4k - 1) - \sum_{k=1}^4(4k - 1)$$

(i) Menghitung $\sum_{k=1}^{101}(4k - 1)$

$$\sum_{k=1}^{101}(4k - 1) = 4 \sum_{k=1}^{101} k - \sum_{k=1}^{101} 1$$

Karena $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, maka $\sum_{k=1}^{101} k = \frac{101(101+1)}{2} = 5151$

sehingga $4 \sum_{k=1}^{101} k = 4 \times 5151 = 20604$

Kemudian, $\sum_{k=1}^{101} 1 = 101$

Jadi, $\sum_{k=1}^{101}(4k - 1) = 20604 - 101 = 20503$

(ii) Menghitung $\sum_{k=1}^4(4k - 1)$

Dengan cara yang sama seperti (i), maka

$$\sum_{k=1}^4(4k - 1) = 4 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 1 = 4 \left(\frac{4(4+1)}{2} \right) - 4 = 40 - 4 = 36$$

Jadi, $\sum_{k=5}^{101}(4k - 1) = \sum_{k=1}^{101}(4k - 1) - \sum_{k=1}^4(4k - 1) = 20503 - 36 = 20467$

Menghitung jumlah keseluruhan: $\sum_{k=1}^{100} 3k + \sum_{k=5}^{101}(4k - 1) = 15150 + 20467 = 35617$

7. **(Nilai 15)** Sebuah sistem kompresi data di *server cloud* memproses file berdasarkan jumlah blok data. Didefinisikan $a(n)$ adalah waktu eksekusi (dalam milidetik) yang dibutuhkan untuk mengompres file berukuran n blok data. Untuk file kecil, Jika $n = 1$, waktu kompresi adalah 1 ms (*overhead minimum sistem*), jika $n = 2$, waktu kompresi adalah 4 ms. Untuk file dengan $n \geq 2$, sistem membagi pekerjaan menjadi 4 proses kompresi yang masing-masing menangani file dengan ukuran $n - 1$ blok. Namun, karena adanya *overlap* pekerjaan (*redundant processing*) antar proses, terdapat penghematan waktu sebesar 4 proses kompresi yang masing-masing menangani file dengan ukuran data $n - 2$ blok
- (a) Tuliskan persamaan relasi rekurens yang merepresentasikan waktu kompresi secara keseluruhan
 - (b) Selesaikan relasi rekurens tersebut
 - (c) Berapa waktu kompresi untuk file berukuran 10 blok?

Jawaban:

(a) $a(n) = 4a(n-1) - 4a(n-2)$; $a(1) = 1$, $a(2) = 4$

(b) Persamaan karakteristik:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)^2 = 0$$

Akar kembar: $r = 2$

Bentuk solusi umum: $a(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n = (c_1 + c_2 n) 2^n$

Untuk $n = 1$: $a(1) = (c_1 + c_2) 2 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$

Untuk $n = 2$: $a(2) = (c_1 + 2c_2) 4 = 4 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 1$

$$\text{Kurangkan: } (c_1 + 2c_2) - (c_1 + c_2) = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

Substitusi $c_2 = \frac{1}{2}$ ke dalam persamaan $c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$, diperoleh $c_1 = 0$

$$\text{Solusi akhir: } a(n) = \frac{n}{2} \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$$

(c) Hitung untuk $n = 10 \rightarrow a(10) = 10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120$

8. (Nilai 15) Buatlah rangkaian logika untuk menentukan apakah

$$(2x + 7y) \bmod 3 > 0; \quad 0 \leq x < 4, 0 \leq y < 4, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$$

Rangkaian logika menerima input x dan y (petunjuk: pikirkan berapa bit x dan berapa bit y) dan memberikan nilai 1 (**true**) jika $(2x + 7y) \bmod 3 > 0$. Dalam menjawab soal ini buatlah tabel kebenaran, penyederhanaan dengan Peta Karnaugh, dan gambarkan rangkaian logikanya.

Jawaban:

Misal:

- Digunakan 4 peubah a, b, c, d yang nilainya merepresentasikan **input** tegangan listrik
- Peubah a dan b merepresentasikan nilai variabel x dalam bentuk biner 2 bit.
- Peubah c dan d merepresentasikan nilai variabel y dalam bentuk biner 2 bit.
- $f(a, b, c, d)$ merepresentasikan kondisi lampu dengan $0 =$ lampu mati dan $1 =$ lampu menyala

Maka, dapat dihasilkan tabel sebagai berikut

a	b	c	d	Nilai x	Nilai y	$2x + 7y$	$(2x + 7y) \bmod 3$	$f(a,b,c,d)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	7	1	1
0	0	1	0	0	2	14	2	1
0	0	1	1	0	3	21	0	0
0	1	0	0	1	0	2	2	1
0	1	0	1	1	1	9	0	0
0	1	1	0	1	2	16	1	1
0	1	1	1	1	3	23	2	1
1	0	0	0	2	0	4	1	1

1	0	0	1	2	1	11	2	1
1	0	1	0	2	2	18	0	0
1	0	1	1	2	3	25	1	1
1	1	0	0	3	0	6	0	0
1	1	0	1	3	1	13	1	1
1	1	1	0	3	2	22	1	1
1	1	1	1	3	3	27	0	0

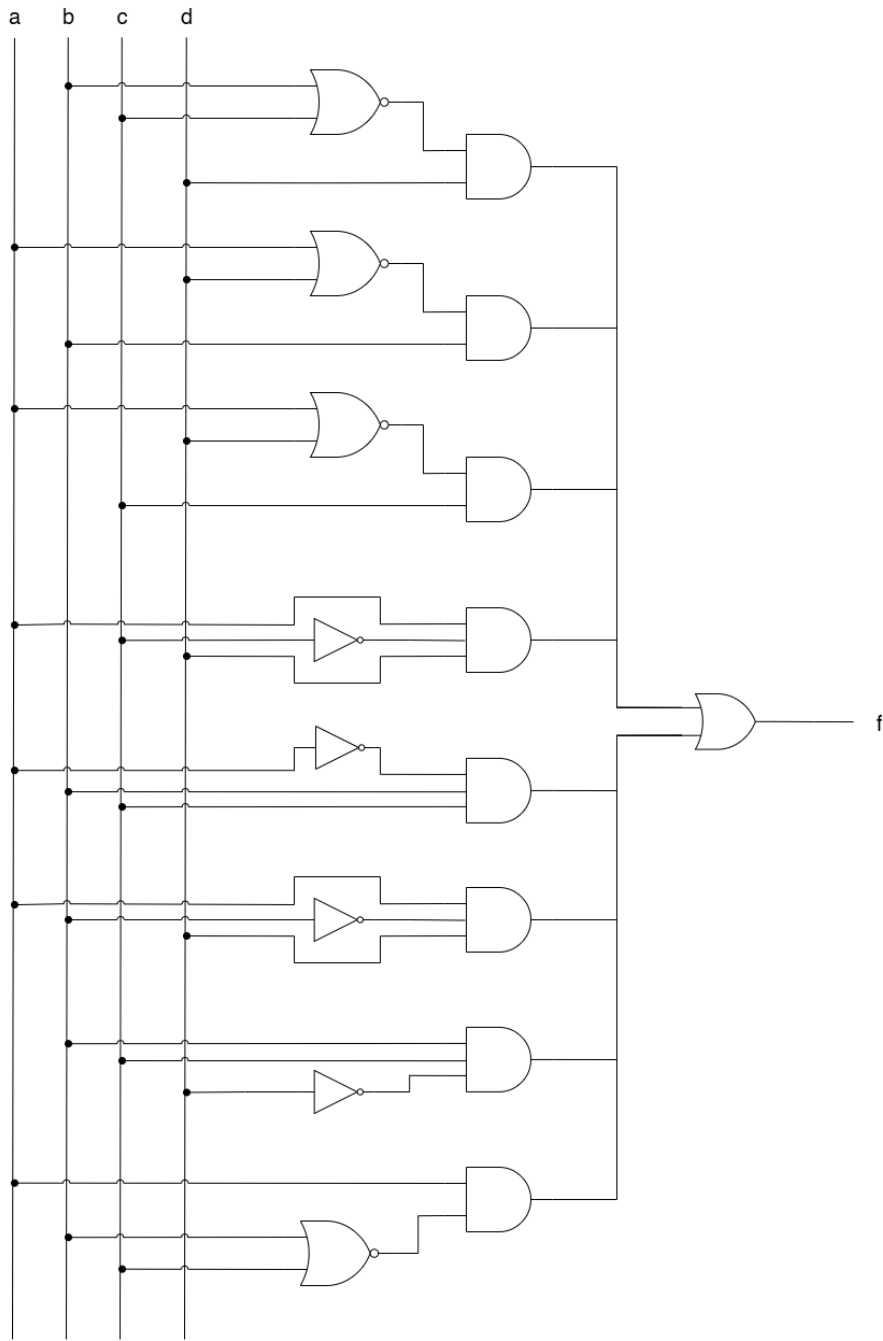
Peta Karnaugh:

	cd	00	01	11	10
ab					
00		0	1	0	1
01		1	0	1	1
11		0	1	0	1
10		1	1	1	0

Penyederhanaan:

$$f(a,b,c,d) = b'c'd + a'bd' + a'cd' + ac'd + a'bc + ab'd + bcd' + ab'c'$$

Rangkaian Logika



9. (Nilai 10) Terdapat 3 multiset yaitu $A = \{a, a, a, b, b, b, c, d, f\}$; $B = \{b, b, c, d, e\}$; dan $C = \{a, a, b, c, d, f\}$, tentukan:

- (a) $A \cup B$
- (b) $(A \cap B) \cup C$
- (c) $(A - C) + B$
- (d) $(B \cup A) - C$

Jawaban:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } A \cup B &= \{a, a, a, b, b, b, c, d, f\} \cup \{b, b, c, d, e\} \\
 &= \{a, a, a, b, b, b, c, d, e, f\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad (A \cap B) \cup C &= \{a, a, a, b, b, b, c, d, f\} \cap \{b, b, c, d, e\} \cup \{a, a, b, c, d, f\} \\
 &= \{b, b, c, d\} \cup \{a, a, b, c, d, f\} \\
 &= \{a, a, b, b, c, d, f\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad (A - C) + B &= \{a, a, a, b, b, b, c, d, f\} - \{a, a, b, c, d, f\} + \{b, b, c, d, e\} \\
 &= \{a, b, b\} + \{b, b, c, d, e\} \\
 &= \{a, b, b, b, b, c, d, e\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad (B \cup A) - C &= \{b, b, c, d, e\} \cup \{a, a, a, b, b, b, c, d, f\} - \{a, a, b, c, d, f\} \\
 &= \{a, a, a, b, b, b, c, d, e, f\} - \{a, a, b, c, d, f\} \\
 &= \{a, b, b, e\}
 \end{aligned}$$