Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM/Kelas:…………………………
T.tangan :…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS) – Teori Bilangan, Kombinatorika
Dosen: Rinaldi M
Kamis, 2 April 2026
Waktu: 80 menit

1. **(Nilai 15)** Diberikan dua bilangan bulat a=6767 dan b=696. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:
   a) Dengan menggunakan Algoritma Euclidean, tentukan PBB(6767,696).
   b) Nyatakan PBB(6767,696) sebagai kombinasi linier dari 6767 dan 696 dengan mencari nilai bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga PBB(6767,696)=6767x+696y

Jawaban:

a) Kita lakukan pembagian berturut-turut:

$6767=9\times 696+503$
$696=1\times 503+193$
$503=2\times 193+117$
$193=1\times 117+76$
$117=1\times 76+41$
$76=1\times 41+35$
$41=1\times 35+6$
$35=5\times 6+5$
$6=1\times 5+1$ → PBB adalah 1
$5=5\times 1+0$

PBB(6767, 696) = 1

b)

$1=6-1(5)$
$1=6-1(35-5(6))=6(6)-1(35)$
$1=6(41-1(35))-1(35)=6(41)-7(35)$
$1=6(41)-7(76-1(41))=13(41)-7(76)$
$1=13(117-1(76))-7(76)=13(117)-20(76)$
$1=13(117)-20(193-1(117))=33(117)-20(193)$
$1=33(503-2(193))-20(193)=33(503)-86(193)$
$1=33(503)-86(696-1(503))=119(503)-86(696)$
$1=119(6767-9(696))-86(696)$

1 = 6767(119) + 696(-1157)
nilai x = 119 dan y = -1157

2. **(Nilai 20)** Sebuah turnamen catur bergilir diadakan di HMIF. Terdapat N pemain yang saling bertanding satu sama lain tepat satu kali (*round-robin*). Total pertandingan yang terjadi dengan N pemain adalah $T = C(N,2) = N(N-1)/2$
   Panitia mengamati bahwa:
   $T \equiv 1 \ (mod\ 4)$
   $T \equiv 3 \ (mod\ 7)$
   $T \equiv 6 \ (mod\ 9)$
   Diketahui bahwa jumlah pemain *N* berada di antara 10 dan 40 orang.
   a) Apakah soal di atas dapat diselesaikan menggunakan *Chinese Remainder Theorem* (*CRT*)? Jika iya gunakan *CRT* untuk mencari total pertandingan (*T*) yang memenuhi ketiga kondisi di atas dan tentukan jumlah pemain (*N*)!
   b) Setelah diperoleh nilai *N* dari soal (a), hitung $N^{500}\ mod\ 7$!

Jawaban:

a) Bagian 1

Cek terlebih dahulu syarat dari CRT

$gcd(4,7) = 1, gcd(4,9) = 1, dan\ gcd(7,9) = 1$ → Memenuhi syarat

$m = 4\ x\ 7\ x\ 9 = 252$

Hitung M_k

$M_1 = 7\ x\ 9 = 63$

$M_2 = 4\ x\ 9 = 36$

$M_3 = 4\ x\ 7 = 28$

Hitung Y_k

$63 \bmod 4 = 3 \rightarrow 3y_1 \equiv 1 \pmod 4 \rightarrow y_1 = 3$

$36 \bmod 7 = 1 \rightarrow y_2 \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow y_2 = 1$

$28 \bmod 9 = 1 \rightarrow y_3 \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow y_3 = 1$

Gabungkan

$T = (1 \text{ x } 63 \text{ x } 3 + 3 \text{ x } 36 \text{ x } 1 + 6 \text{ x } 28 \text{ x } 1) \bmod 252$

$T = (189 + 108 + 168) \bmod 252$

$T = 465 \bmod 252 = 213 \pmod{252}$

Lalu

$T = N(N-1)/2$, *solusi umum* $T = 213 + 252k$

Coba satu per satu untuk nilai k:

$k = 0;\ T = 213;\ N(N-1) = 426$ → Tidak ada nilai N yang memenuhi

$k = 1;\ T = 465;\ N(N-1) = 930$ → N = 31

$k = 2;\ T = 717;\ N(N-1) = 1434$ → Tidak ada nilai N yang memenuhi

Satu-satunya nilai N pada rentang $10 <= N <= 40$ yang memenuhi adalah N = 31 dengan T = 465

b) Bagian 2

Karena 7 adalah bilangan prima dan $gcd(31,7) = 1$, maka berlaku Teorema Fermat sebagai berikut:

$31^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$

Dan diketahui:

$31\ \ mod\ 7 = 3$

Lalu

$31^{500} \equiv 3^{500} \equiv (3^6)^{83}\ x\ 3^2 \equiv 1^{83}\ x\ 9\ (mod\ 7) \equiv 2\ (mod\ 7)$

3. **(Nilai 20)** Di sudut paling gelap Perpustakaan STEI ITB, kamu menemukan sebuah buku kuno berdebu berjudul *"The Art of Discrete Math"*. Buku ini konon ditulis oleh seorang asisten lab IRK legendaris tahun 90-an. Sayangnya, karena usia dan tumpahan kopi, label ISBN pada sampul belakangnya rusak parah.

   ISBN yang tersisa hanyalah: **0 – [x] 1 3 [y] – 0 6 5 5 – [z]**

   Untungnya, buku ini sangat "meta". Pada Bab Teori Bilangan yang masih bisa terbaca, penulisnya menyisipkan sebuah teka-teki untuk menentukan identitas buku itu sendiri:

   a) Tentukan digit kedua ISBN (x) dari solusi $13x \equiv 8 \pmod{11}$
   b) Tentukan digit kelima ISBN (y) dari solusi $y = (2^{2050} \pmod{67}) \pmod{10}$
   c) Tentukan karakter uji ISBN (z)
   d) Tuliskan ISBN lengkap dari buku "*The Art of Discrete Math*"

Jawaban:

a. $13 \equiv 2 \pmod{11}$ sehingga ekspresi bisa disederhanakan jadi $2x \equiv 8 \pmod{11}$
Melalui Algoritma Euclidean, dapat diisolasikan x
$11 = 5*2 + 1$ (i)
$2 = 2*1 + 0$ (ii)

Sehingga dapat disusun $1*11 - 5*2 \equiv 1 \pmod{11} \rightarrow -5*2 \equiv 1 \pmod{11}$
Jadi $x \equiv (-5*8) \pmod{11} \rightarrow x \equiv -40 \pmod{11}$
$-40 \pmod{11} = (-40 + 4*11) \pmod{11} = 4 \pmod{11}$

Sehingga **x = 4**

b. $2^{67-1} = 2^{66} \equiv 1 \pmod{67}$
$2^{2050} \equiv 2^{(31.66 + 4)} \pmod{67}$
$\equiv (2^{66})^{31}. 2^4 \pmod{67}$
$\equiv (1)^{31}. 2^4 \pmod{67}$
$\equiv 16 \pmod{67}$
Jadi $2^{2050} \pmod{67} = 16 \rightarrow 16 \pmod{10} = 6$

Sehingga **y = 6**

c. $\sum_{i=1}^{9} i.x_i = (0*1) + (4*2) + (1*3) + (3*4) + (6*5) + (0*6) + (6*7) + (5*8) + (5*9) = 180$
$180 \pmod{11} = 4$

Sehingga **z = 4**

d. ISBN lengkap: **0 – 4 1 3 6 – 0 6 5 5 – 4**

4. **(Nilai 10)** Berapa banyak bilangan 1-1000 yang tidak memiliki dua digit yang sama berdampingan?

Jawaban:

Bilangan 1 digit tidak memiliki digit berdampingan = 9
Bilangan 2 digit valid kecuali 11, 22, ..., 99 = 81
Bilangan 3 digit: ratusan/= puluhan, puluhan/= satuan, jadi 9 x 9 x 9 = 729
Bilangan 4 digit hanya 1000, tapi tidak valid karena ada angka 0 berdampingan
Jadi, jumlahnya: 9 + 8 1+ 729 = **819**

5. **(Nilai 10)** Seorang engineer di perusahaan X sedang melakukan *load balancing* untuk mendistribusikan 12 *request* API yang identik ke 4 *server* berbeda. Distribusi harus memenuhi syarat:
   1) Setiap *server* harus menerima minimal 1 request.
   2) *Server* 1 harus menerima lebih banyak request daripada *Server* 4.
   3) *Server* 2 harus menerima tepat 2 kali lipat request dari *Server* 3.

   Berapa banyak cara distribusi *request* yang mungkin?

Jawaban:

Langkah 1: Terapkan syarat (3) terlebih dahulu:
Misalkan $x_3 = t$, maka $x_2 = 2t$, dengan $t \geq 1$.
Persamaan menjadi:

$$x_1 + 2t + t + x_4 = 12 \Rightarrow x_1 + x_4 = 12 - 3t$$

Agar $x_1 \geq 1$ dan $x_4 \geq 1$:

$$12 - 3t \geq 2 \Rightarrow t \leq 3$$

Jadi $t \in \{1,2,3\}$.

Langkah 2: Untuk setiap nilai t, hitung pasangan (x_1, x_4) yang valid:
Dari Langkah 1, kita punya $x_1 + x_4 = 12 - 3t$ dengan $x_1 \geq 1, x_4 \geq 1$, dan syarat $x_1 > x_4$. Misalkan $S = 12 - 3t$.

Menghitung jumlah kemungkinan pasangan (x_1, x_4):

- Ketika S genap, ada tepat 1 kasus seri yaitu $x_1 = x_4 = S/2$, sehingga sisa $S - 2$ pasangan terbagi rata antara $x_1 > x_4$ dan $x_1 < x_4$.
- Ketika S ganjil, tidak ada kasus seri, sehingga $S - 1$ pasangan terbagi rata secara langsung.

Maka:

$$|x_1 > x_4| = \begin{cases} \frac{S-1}{2} & \text{jika } S \text{ ganjil} \\ \frac{S-2}{2} & \text{jika } S \text{ genap} \end{cases}$$

t	x_2	$S = x_1 + x_4$	$x_1 > x_4$
1	2	9	$(9-1)/2 = 4$
2	4	6	$(5-1)/2 = 2$
3	6	3	$(3-1)/2 = 1$

Langkah 3: Total keseluruhan:

$$4 + 2 + 1 = \mathbf{7}\ \textbf{cara}$$

6. **(Nilai 15)** Di Indonesia, kita menggunakan sistem penanggalan Gregorian yang mempunyai tujuh hari dalam siklus satu pekan, yakni Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu, dan Minggu. Bersamaan dengan sistem itu, orang Jawa juga menggunakan sistem penanggalan Pasaran, yakni siklus lima hari yang tersusun atas Legi, Pahing, Pon, Wage, dan Kliwon. Suatu kombinasi hari pada sistem penanggalan Gregorian dan Pasaran disebut weton. Misalnya, jika seseorang terlahir pada hari Senin pada kalender Gregorian yang bertepatan dengan Pahing pada penanggalan Pasaran maka wetonnya adalah Senin Pahing.
   a) Dalam sebuah acara di Desa Gubugklakah ada 11 orang. Buktikan bahwa paling sedikit ada 3 orang dengan pasaran yang sama.
   b) Dalam sebuah ekstrakurikuler di SMA Negeri 3 Malang terdapat 106 orang anggota. Buktikan ada sedikitnya 4 orang dengan weton sama.
   c) Berapa minimum jumlah orang yang harus kita kumpulkan bersama supaya bisa dipastikan ada 5 orang dengan weton sama?

Jawaban:

Untuk semua subsoal, kita cukup pakai *pigeonhole principle* atau prinsip sarang burung merpati. Spesifiknya, prinsip sarang burung merpati yang dirampatkan (*generalized pigeonhole principle*), yang menyatakan bahwa diberikan M burung merpati yang mau dimasukkan ke n sarang, maka paling sedikit ada satu kotak yang berisi setidaknya $\lceil M/n \rceil$ burung merpati.

a. $M = 11$ dan $n = 5$ sehingga ada satu pasaran yang dimiliki oleh $\lceil M/n \rceil = \lceil 11/5 \rceil = 3$ orang.
b. Weton punya 7 kemungkinan hari Gregorian dan 5 hari Pasaran sehingga ada $7 \times 5 = 35$ kemungkinan weton. Maka $M = 106$ dan $n = 35$ sehingga ada satu weton yang dimiliki oleh $\lceil M/n \rceil = \lceil 106/35 \rceil = 4$ orang.

c. Dengan $n = 35$, nilai M terkecil untuk mendapatkan $\lceil M/n \rceil = \lceil M/35 \rceil = 5$ adalah $35 \times 4 + 1 = 141$. Jadi, kita butuh 141 orang.

7. **(Nilai 10)** Lab IRK sedang merekrut asisten baru. Tersedia 8 kandidat yang sudah lolos seleksi. Tim Dosen perlu memilih 3 orang untuk tim Asisten Matematika Diskrit dan 5 orang sisanya untuk tim Asisten Strategi Algoritma. Berapa banyak cara Tim Dosen membagi 8 kandidat tersebut?

Jawaban:

Karena urutan pemilihan kandidat dalam satu tim tidak diperhatikan (kandidat A, B, dan C dianggap sama dengan tim C, B, dan A), maka kita menggunakan konsep Kombinasi.

Langkah 1: Memilih 3 asisten untuk tim Matematika Diskrit dari 8 kandidat

$$C(8,3) = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

Langkah 2: Memilih 5 asisten untuk tim Strategi Algoritma dari 5 kandidat tersisa

$$C(5,5) = \frac{5!}{5!\,.\,0!} = 1$$

Total Kombinasi:

$$56 \times 1 = 56$$

atau

Langkah 1: Memilih 5 asisten untuk tim Strategi Algoritma dari 8 kandidat

$$C(8,5) = \frac{8!}{5!\,.\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

Langkah 2: Memilih 3 asisten untuk tim Matematika Diskrit dari 3 kandidat tersisa

$$C(3,3) = \frac{3!}{3!\,.\,0!} = 1$$

Total Kombinasi:

$$56 \times 1 = 56$$

8. **(Soal bonus, nilai 5)** Tentukan banyak bilangan pada interval 0–500 (inklusif) yang mengandung angka 4.

Jawaban:

Tentunya 500 tidak termasuk. Lalu jelas juga bahwa seluruh 100 bilangan pada rentang 400-499 (inklusif) mengandung angka 4.
Jadi, kemungkinan bilangan yang memenuhi berbentuk $\underline{abc}$ dengan $a \in \{0,1,2,3\}$ dan $b, c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Kalau $b = 4$ maka banyak kemungkinan bilangan yang memenuhi adalah $4 \times 1 \times 10 = 40$. Begitu pula jika $c = 4$. Namun, catat bahwa di sini 44, 144, 244, dan 344 terhitung dua kali.

Dengan demikian, banyak bilangan yang memenuhi kriteria adalah 100 + 40 + 40 - 4 = 176.

Total Nilai = 100 + bonus 5

==

Kerjakan mulai dari halaman ini dan halaman dibaliknya, lalu pada kertas tambahan jika perlu. Jika masih kurang, silakan pakai kertas sendiri