Program Dinamis
(*Dynamic Programming*)

Bagian 2 (Update 2026)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi M

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Persoalan 3: Penganggaran Modal (*Capital Budgeting*)

- Sebuah perusahaan berencana akan mengembangkan usaha (proyek) melalui ketiga buah pabrik (*plant*) yang dimilikinya.
- Setiap pabrik diminta mengirimkan proposal (boleh lebih dari satu) ke perusahaan untuk proyek yang akan dikembangkan.

- Setiap proposal memuat total biaya yang dibutuhkan (*c*) dan total keuntungan (*revenue*) yang akan diperoleh (*R*) dari pengembangan usaha itu. Perusahaan menganggarkan Rp 5 milyar untuk alokasi dana bagi ketiga pabriknya itu.

- Tabel berikut meringkaskan nilai *c* dan *R* untuk masing-masing proposal proyek.

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

- Proposal proyek bernilai-nol sengaja dicantumkan yang berarti tidak ada alokasi dana yang diberikan untuk setiap pabrik.
- Tujuan Perusahaan adalah memperoleh keuntungan yang maksimum dari pengalokasian dana sebesar Rp 5 milyar tersebut.
- Selesaikan persoalan ini dengan program dinamis.

Penyelesaian dengan Program Dinamis

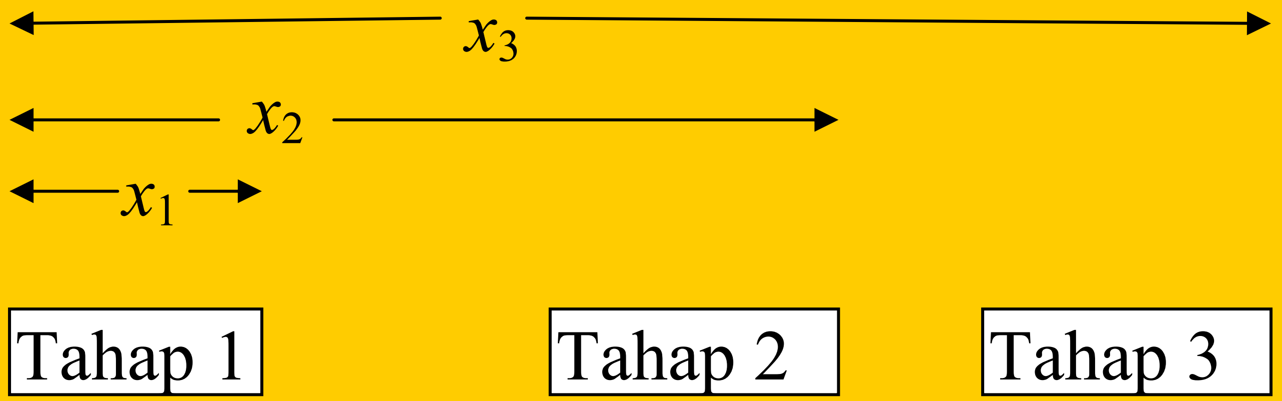
- Tahap (*k*) adalah proses mengalokasikan dana untuk setiap pabrik (ada 3 tahap, tiap pabrik mendefinisikan sebuah tahap).

- Status (x_k) menyatakan jumlah modal yang dialokasikan pada pada setiap tahap (namun terikat bersama semua tahap lainnya).

- Alternatif (*p*) menyatakan proposal proyek yang diusulkan setiap pabrik. Pabrik 1, 2, dan 3 masing-masing memiliki 3, 4 dan 2 alternatif proposal.

Peubah status yang terdapat pada tahap 1, 2, dan 3:

$x_1 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1
$x_2 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1 dan 2
$x_3 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1, 2, dan 3



Kemungkinan nilai-nilai untuk x_1 dan x_2 adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5 (milyar), sedangkan nilai untuk x_3 adalah 5

Penyelesaian dengan Program Dinamis Maju.

Misalkan,

$R_k(p_k)$ = keuntungan dari alternatif p_k pada tahap k

$f_k(x_k)$ = keuntungan optimal dari tahap 1, 2, …, dan k yang diberikan oleh status x_k

Relasi rekurens keuntungan optimal:

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{feasible \\ proposal\_p_1}} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{\substack{feasible \\ proposal\_p_k}} \{R_k(p_k) + f_{k-1}(x_{k-1})\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Catatan:

1. $x_{k-1} = x_k - c_k(p_k)$

   $c(p_k)$ adalah biaya untuk alternatif p_k pada tahap k.

2. Proposal p_k dikatakan layak (*feasible*) jika biayanya, $c(p_k)$, tidak melebihi nilai status x_k pada tahap k.

Relasi rekurens keuntungan optimal menjadi

$$f_1(x_1) = \max_{c_1(p_1) \le x_1} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{c_k(p_k) \le x_k} \{R_k(p_k) + f_{k-1}[x_k - c_k(p_k)]\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 1

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{c_1(p_1) \le x_1 \\ p_1 = 1,2,3}} \{R_1(p_1)\}$$

x_1	$R_1(p_1)$			Solusi Optimal	
	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$f_1(x_1)$	p_1^*
0	**0**	-	-	0	1
1	0	**5**	-	5	2
2	0	5	**6**	6	3
3	0	5	**6**	6	3
4	0	5	**6**	6	3
5	0	5	**6**	6	3

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 2

$$f_2(x_2) = \max_{\substack{c_2(p_2) \le x_2 \\ p_2 = 1,2,3,4}} \{R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2)]\},$$

x_2	$R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2)]$				Solusi Optimal	
	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 4$	$f_2(x_2)$	p_2^*
0	0 + 0 = **0**	-	-	-	0	1
1	0 + 5 = **5**	-	-	-	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = **8**	-	-	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = **13**	9 + 0 = 9	-	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = **14**	9 + 5 = **14**	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = **17**	17	4

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 3

$$f_3(x_3) = \max_{\substack{c_3(p_3) \le x_3 \\ p_3 = 1,2}} \{R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3))]\},$$

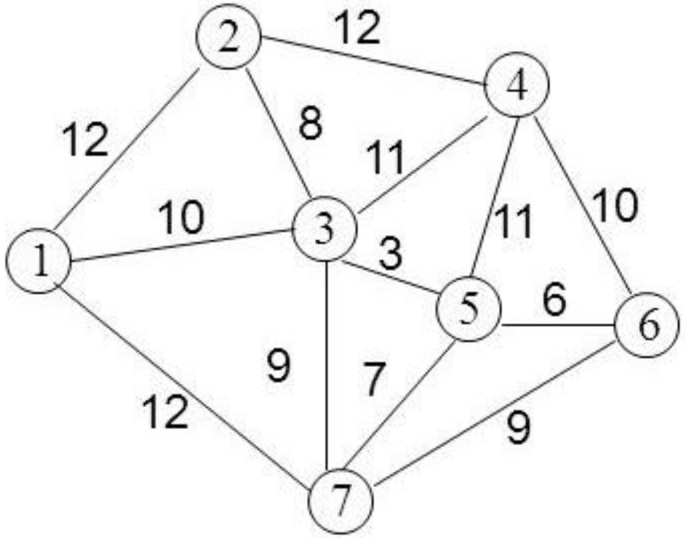
x_3	$R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3))]$		Solusi Optimal	
	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$f_3(x_3)$	p_3^*
5	$0 + 17 = \mathbf{17}$	$3 + 14 = \mathbf{17}$	17	1 atau 2

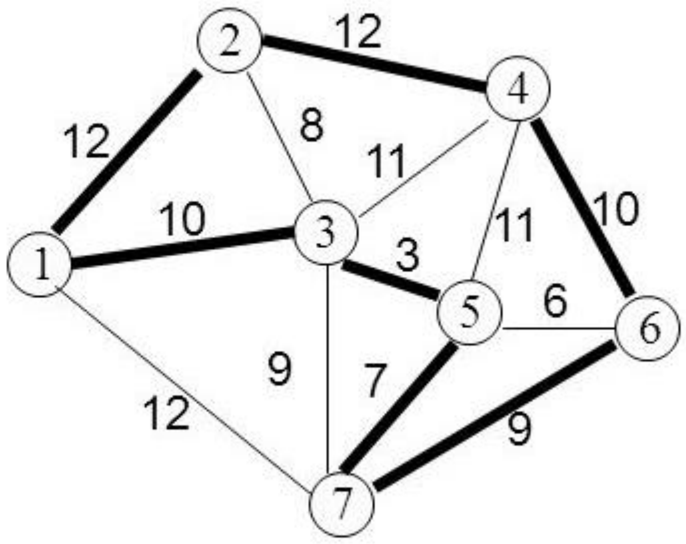
Rekonstruksi solusi:

x_3	p_3^*	x_2	p_2^*	x_1	p_1^*	(p_1^*, p_2^*, p_3^*)
	1	(5 – 0 = 5)	4	(5 – 4 = 1)	2	(2, 4, 1)
1						
			2	(4 – 2 = 2)	3	(3, 2, 2)
	2	(5 – 1 = 4)				
			3	(4 – 3 = 1)	3	(2, 3, 2)

Persoalan 4: *Travelling Salesperson Problem* (TSP)

- Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan tur terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.





- Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf lengkap berarah dengan sisi-sisi yang diberi harga $c_{ij} > 0$.

- Misalkan $|V| = n$ dan $n > 1$. Setiap simpul diberi nomor 1, 2, …, n.

- Asumsikan perjalanan (tur) dimulai dan berakhir pada simpul 1.

- Setiap tur pasti terdiri dari sisi (1, *k*) untuk beberapa $k \in V - \{1\}$ dan sebuah lintasan dari simpul *k* ke simpul 1.

- Lintasan dari simpul *k* ke simpul 1 tersebut melalui setiap simpul di dalam $V - \{1, k\}$ tepat hanya sekali.

- Prinsip Optimalitas: jika tur tersebut optimal maka lintasan dari simpul *k* ke simpul 1 juga menjadi lintasan *k* ke 1 **terpendek** yang melalui simpul-simpul di dalam $V - \{1, k\}$.

- Misalkan *f*(*i*, *S*) adalah bobot lintasan terpendek yang berawal dari simpul *i*, yang melalui semua simpul di dalam *S* dan berakhir pada simpul 1.

- Nilai *f*(1, *V* – {1}) adalah bobot tur terpendek.

Hubungan rekursif:

$$f(1, V - \{1\}) = \min_{2 \le k \le n} \{c_{1k} + f(k, V - \{1, k\})\} \qquad (1)$$

Dengan merampatkan persamaan (1), diperoleh

$$f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \ 2 \le i \le n \qquad \text{(basis)}$$

$$f(i, S) = \min_{j \in S} \{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{(rekurens)} \quad (2)$$

Gunakan persamaan (2) untuk memperoleh *f*(*i*, *S*) untuk |*S*| = 1, *f*(*i*, *S*) untuk |*S*| = 2, dan seterusnya sampai untuk |*S*| = *n* – 1.

Tinjau persoalan TSP untuk n = 4:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 1: $f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \; 2 \le i \le n$

Diperoleh:

$f(2, \varnothing) = c_{21} = 5;$
$f(3, \varnothing) = c_{31} = 6;$
$f(4, \varnothing) = c_{41} = 8;$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 2:

$$f(i, S) = \min_{j \in S} \{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{untuk } |S| = 1$$

Diperoleh:

$f(2, \{3\}) = \min\{c_{23} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$f(2, \{4\}) = \min\{c_{24} + f(4, \varnothing)\} = \min\{10 + 8\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{2\}) = \min\{c_{32} + f(2, \varnothing)\} = \min\{13 + 5\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{4\}) = \min\{c_{34} + f(4, \varnothing)\} = \min\{12 + 8\} = \min\{20\} = 20$

$f(4, \{2\}) = \min\{c_{42} + f(2, \varnothing)\} = \min\{8 + 5\} = \min\{13\} = 13$

$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 3:

$$f(i, S) = \min_{j \in S} \{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\}$$

untuk $|S| = 2$ dan $i \neq 1$, $1 \notin S$ dan $i \notin S$.

Diperoleh:

$$\begin{aligned} f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), c_{24} + f(4, \{3\})\} \\ &= \min\{9 + 20, 10 + 15\} \\ &= \min\{29, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3, \{2, 4\}) &= \min\{c_{32} + f(2, \{4\}), c_{34} + f(4, \{2\})\} \\ &= \min\{13 + 18, 12 + 13\} \\ &= \min\{31, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4, \{2, 3\}) &= \min\{c_{42} + f(2, \{3\}), c_{43} + f(3, \{2\})\} \\ &= \min\{8 + 15, 9 + 18\} \\ &= \min\{23, 27\} = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(1, \{2, 3, 4\}) &= \min\{c_{12} + f(2, \{3, 4\}), c_{13} + f(3, \{2, 4\}), \\ &\qquad c_{14} + f(4, \{2, 3\})\} \\ &= \min\{10 + 25, 15 + 25, 20 + 23\} \\ &= \min\{35, 40, 43\} = 35 \end{aligned}$$

Jadi, bobot tur yang berawal dan berakhir di simpul 1 adalah 35.

Menentukan lintasan yang dilalui

- Tinjau pada setiap *f*(*i*, *S*) nilai *j* yang meminimumkan persamaan (2)

- Misalkan *J*(*i*, *S*) adalah nilai yang dimaksudkan tersebut. Maka, *J*(1, {2, 3, 4}) = 2. Jadi, tur mulai dari simpul 1 selanjutnya ke simpul 2.

- Simpul berikutnya dapat diperoleh dari *f*(2, {3, 4}), yang mana *J*(2, {3, 4}) = 4. Jadi, simpul berikutnya adalah simpul 4.

- Simpul terakhir dapat diperoleh dari *f*(4, {3}), yang mana *J*(4, {3}) = 3.

- Jadi, tur yang optimal adalah 1, 2, 4, 3, 1 dengan bobot = 35.

Latihan Soal (UAS 2023)

Sebuah perusahaan modifikasi/repairing mobil untuk melakukan modifikasi/*repairing* mobil harus melalui 4 tahapan sebagai berikut : (1)*Towing*, (2)*Inspection and Diagnostic*, (3)*Disassembling and Repair*, dan (4)*Reassembling and Testing*. Untuk setiap tahapan tersebut, perusahaan tersebut mempunyai 4 station yang berbeda jarak dan unit *cost* dari modifikasi/repairing mobil tersebut. Biaya per unit mobil yang diperbaiki dari satu station ke station lain seperti di bawah ini :

Dari Towing	Ke Inspection and Diagnostic Station			
	1	2	3	4
	35	40	30	45

Dari Inspection and Diagnostic Station	Ke Disassembling and Repair Station			
	1	2	3	4
1	105	100	85	90
2	90	85	100	95
3	100	90	95	105
4	110	105	120	110

Dari Disassembling and Repair Station	Ke Reassembling and Testing Station			
	1	2	3	4
1	70	75	85	80
2	85	90	80	95
3	90	70	85	80
4	80	85	90	75

Tentukanlah penjadwalan yang paling optimal beserta biaya pada masing-masing station serta total biaya yang harus dikeluarkan dengan menggunakan *Dynamic Programming*.

Jawaban:

Dengan pendekatan pemrograman dinamis mundur, maka harus di mulai pada stage-1 dan hasilnya seperti pada Tabel di bawah ini :

S_1 \ X_1	$f_1(S_1, X_1) = c_{s_1, x_1}$				$f_1^*(S_1)$	x_1^*
	1	**2**	**3**	**4**		
1	70	75	85	80	**70**	**1**
2	85	90	80	95	**80**	**3**
3	90	70	85	80	**70**	**2**
4	80	85	90	75	**75**	**4**

Kemudian dilanjutkan pada stage-2 dan hasilnya seperti pada Tabel di bawah ini :

X_2 / S_2	$f_2(S_2, X_2) = c_{s_2, x_2} + f_1^*(S_1)$				$f_2^*(S_2)$	x_2^*
	1	**2**	**3**	**4**		
1	105 + 70 = 175	100 + 80 = 180	85 + 70 = 155	90 + 75 =165	**155**	**3**
2	90 + 70 = 160	85 + 80 = 165	100 + 70 = 170	95 + 75 = 170	**160**	**1**
3	100 + 70 = 170	90 + 80 = 170	95 + 70 = 165	105 + 75 = 180	**165**	**3**
4	110 + 70 = 180	105 + 80 = 185	120 + 70 = 190	110 + 75 = 185	**180**	**1**

Kemudian dilanjutkan pada stage-3 dan hasilnya seperti pada Tabel di bawah ini :

X_3 / S_3	$f_3(S_3, X_3) = c_{s_3, x_3} + f_2^*(S_2)$				$f_3^*(S_3)$	x_3
	1	2	3	4		
Dari Towning	35 + 155 = 190	40 + 160 = 200	30 + 165 = 195	45 + 180 = 225	**190**	**1**

stage-3 → stage-2 → stage-1.

Dari Towing ke R&T Station melalui mesin-1, dengan biaya = 35. Dari R&T Station di mesin-1 ke D&R Station melalui mesin-3 dengan biaya = 85. Dari D&R Station di mesin-3 ke I&D Station melalui mesin-2 dengan biaya = 70. Total biaya = 35 + 85 + 70 = 190.

Jadwal optimal seperti pada Tabel di samping ini:

Dari Towing	I&D Station	D&R Station	R&T Station
Mesin	1	3	2
Biaya	35	85	70
Kumulatif Biaya	35	120	190

SELAMAT BELAJAR