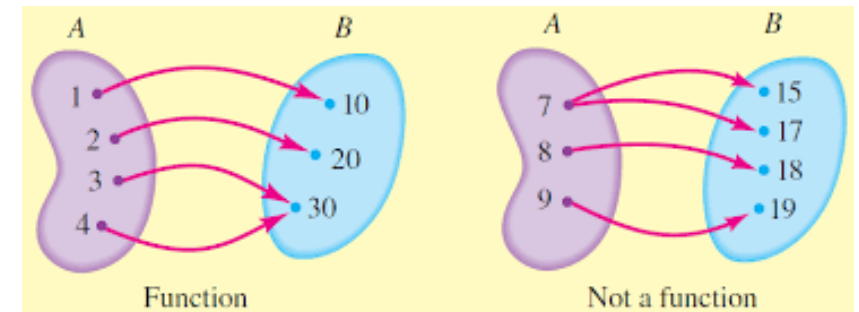


Relasi dan Fungsi

Bagian 3 (Update 2026)

Bahan Kuliah
IF1220 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir



Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x :

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Fungsi *ceiling* dari x :

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh 47. Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$$

$$\lceil 3.5 \rceil = 4$$

$$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$$

$$\lceil 0.5 \rceil = 1$$

$$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$$

$$\lceil 4.8 \rceil = 5$$

$$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$$

$$\lceil -0.5 \rceil = 0$$

$$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$$

$$\lceil -3.5 \rceil = -3$$

Contoh 48. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu *byte* tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*).

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

$a \bmod m$ memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

$a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Contoh 49. Beberapa contoh fungsi modulo

$$25 \bmod 7 = 4$$

$$15 \bmod 4 = 3$$

$$3612 \bmod 45 = 12$$

$$0 \bmod 5 = 0$$

$$-25 \bmod 7 = 3 \quad (\text{sebab } -25 = 7 \cdot (-4) + 3)$$

3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a \log x \iff x = a^y$$

Fungsi Rekursif

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n.$

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n - 1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

- Contoh definisi rekursif dari faktorial:

(a) basis:

$$n! = 1 \quad , \text{ jika } n = 0$$

(b) rekurens:

$$n! = n \times (n - 1)! \quad , \text{ jika } n > 0$$

5! dihitung dengan langkah berikut:

$$(1) \ 5! = 5 \times 4! \quad (\text{rekurens})$$

$$(2) \quad 4! = 4 \times 3!$$

$$(3) \quad 3! = 3 \times 2!$$

$$(4) \quad 2! = 2 \times 1!$$

$$(5) \quad 1! = 1 \times 0!$$

$$(6) \quad 0! = 1$$

$$(6') \ 0! = 1$$

$$(5') \ 1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$$

$$(4') \ 2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$$

$$(3') \ 3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$$

$$(2') \ 4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

$$(1') \ 5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$$

Jadi, $5! = 120$.

Contoh 50. Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

3. Fungsi fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$

Relasi Kesetaraan

DEFINISI. Relasi R pada himpunan A disebut **relasi kesetaraan** atau **relasi ekivalen** (*equivalence relation*) jika R refleksif, setangkup dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi kesetaraan, dua benda berhubungan jika keduanya memiliki beberapa sifat yang sama atau memenuhi beberapa persyaratan yang sama.
- Dua elemen yang dihubungkan dengan relasi kesetaraan dinamakan **setara** (*equivalent*).

- **Contoh 51:** Misalkan A = himpunan mahasiswa dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika a satu angkatan dengan b .

→ R refleksif: setiap mahasiswa seangkatan dengan dirinya sendiri

→ R setangkup: jika a seangkatan dengan b , maka b pasti seangkatan dengan a .

→ R menghantar: jika a seangkatan dengan b dan b seangkatan dengan c , maka pastilah a seangkatan dengan c .

Dengan demikian, R adalah relasi kesetaraan. Setiap mahasiswa di dalam R setara satu sama lain (karena satu Angkatan)

Contoh-contoh relasi kesetaraan lainnya:

1. Relasi $R = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3) \}$ pada $A = \{1, 3\}$ adalah relasi kesetaraan karena R refleksif, setangkup, dan menghantar. Periksa!
2. Misalkan L adalah himpunan garis-garis pada bidang Euclidean dan R relasi pada L . Misalkan $(a, b) \in R$ jika “garis a sejajar dengan garis b ”. R adalah relasi kesetaraan karena refleksif, setangkup, dan menghantar. R **refleksif** karena setiap garis sejajar dengan dirinya sendiri. R **setangkup** karena jika garis a sejajar dengan b , maka b pasti sejajar dengan a . R **menghantar** karena jika a sejajar dengan b dan b sejajar dengan c maka pasti a sejajar dengan c .

Contoh-contoh yang bukan relasi kesetaraan:

1. Relasi $\perp$ pada himpunan garis dalam bidang Euclidean bukan relasi kesetaraan karena tidak refleksif dan tidak menghantar. Relasi $\perp$ memang setangkup sebab jika $a \perp b$ maka $b \perp a$. Tetap relasi $\perp$ tidak refleksif sebab sebuah garis tidak tegak lurus dengan dirinya sendiri. Begitu juga $\perp$ tidak menghantar karena jika $a \perp b$ dan $b \perp c$ maka a tidak tegak lurus dengan c (a dan c sejajar).
2. Relasi $\subseteq$ bukan relasi kesetaraan karena tidak setangkup, yaitu jika $A \subseteq B$ maka tidak berarti $B \subseteq A$. Relasi $\subseteq$ memang refleksif dan menghantar sebab $A \subseteq A$ dan jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$.

Relasi Pengurutan Parsial

DEFINISI. Relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi pengurutan parsial** (*partial ordering relation*) jika ia refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

Himpunan S bersama-sama dengan relasi R disebut **himpunan terurut secara parsial** (*partially ordered set*, atau *poset*), dan dilambangkan dengan (S, R) .

Contoh 52. Relasi $\geq$ pada himpunan bilangan bulat positif adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan:

Relasi $\geq$ refleksif, karena $a \geq a$ untuk setiap bilangan bulat a ;

Relasi $\geq$ tolak-setangkup, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq a$, maka $a = b$;

Relasi $\geq$ menghantar, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$.

Contoh 53: Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan: relasi “habis membagi” bersifat refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi pengurutan parsial, dua buah benda saling berhubungan jika salah satunya
 - lebih kecil (lebih besar) daripada,
 - atau lebih rendah (lebih tinggi) daripada lainnya

menurut sifat atau kriteria tertentu.

- Istilah pengurutan menyatakan bahwa benda-benda di dalam himpunan tersebut diurutkan berdasarkan sifat atau kriteria tersebut.
- Ada juga kemungkinan dua buah benda di dalam himpunan tidak berhubungan dalam suatu relasi pengurutan parsial. Dalam hal demikian, kita tidak dapat membandingkan keduanya sehingga tidak dapat diidentifikasi mana yang lebih besar atau lebih kecil.
- Itulah alasan digunakan istilah pengurutan parsial atau pengurutan tak-lengkap

Klosur Relasi (*closure of relation*)

- **Contoh kasus 1:** Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak bersifat refleksif.
- Bagaimana membuat relasi refleksif yang sesedikit mungkin dan mengandung R ?

- Tambahkan $(2, 2)$ dan $(3, 3)$ ke dalam R (karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam R)
- Relasi baru, S , mengandung R , yaitu

$$S = \{(1, 1), (1, 3), \mathbf{(2, 2)}, (2, 3), (3, 2), \mathbf{(3, 3)}\}$$

- Relasi S disebut **klosur refleksif** (*reflexive closure*) dari R .

- **Contoh kasus 2:** Relasi $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak setangkup.
- Bagaimana membuat relasi setangkup yang sesedikit mungkin dan mengandung R ?

- Tambahkan $(3, 1)$ dan $(2, 3)$ ke dalam R
(karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam S agar S menjadi setangkup).
- Relasi baru, S , mengandung R :

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

- Relasi S disebut **klosur setangkup** (*symmetric closure*) dari R .

- Misalkan R adalah relasi pada himpunan A . R dapat memiliki atau tidak memiliki sifat **P**, seperti refleksif, setangkup, atau menghantar.
- Jika terdapat relasi S dengan sifat **P** yang mengandung R sedemikian sehingga S adalah himpunan bagian dari setiap relasi dengan sifat P yang mengandung R ,
- maka S disebut **klosur** (*closure*) atau tutupan dari R .

Klosur Refleksif

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A .
- Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$, yang dalam hal ini
$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

- **Contoh 54:** Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3\}$

maka

$$\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

sehingga klosur refleksif dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup \Delta &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \end{aligned}$$

Contoh 55: Misalkan R adalah relasi

$$\{(a, b) \mid a \neq b\}$$

pada himpunan bilangan bulat.

Klosur refleksif dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup \Delta &= \{(a, b) \mid a \neq b\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \end{aligned}$$

Klosur setangkup

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A .
- Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$, dengan $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

- **Contoh 56:** Misalkan $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3\}$,

maka

$$R^{-1} = \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

sehingga klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\} \cup \\ &\quad \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\} \end{aligned}$$

- **Contoh 57:** Misalkan R adalah relasi $\{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\}$ pada himpunan bilangan bulat.

Klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\} \cup \{(b, a) \mid b \text{ kelipatan } a\} \\ &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b \text{ atau } b \text{ kelipatan } a\} \end{aligned}$$

Klosur menghantar

- Pembentukan klosur menghantar lebih sulit daripada dua buah klosur sebelumnya.
- Contoh: $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
 R tidak transitif karena tidak mengandung semua pasangan (a, c) sedemikian sehingga (a, b) dan (b, c) di dalam R .

Pasangan (a, c) yang tidak terdapat di dalam R adalah $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, dan $(3, 1)$.

- Penambahan semua pasangan ini ke dalam R sehingga menjadi

$$S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

tidak menghasilkan relasi yang bersifat menghantar karena, misalnya terdapat $(3, 1) \in S$ dan $(1, 4) \in S$, tetapi $(3, 4) \notin S$.

- Klosur menghantar dari R adalah

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

- Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan R pada sebuah himpunan dengan n elemen, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \dots \vee M_R^{[n]}$$

Contoh 58. Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan klosur menghantar dari R .

Penyelesaian:

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks klosur menghantar dari R adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Karena

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } M_R^{[3]} = M_R \cdot M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

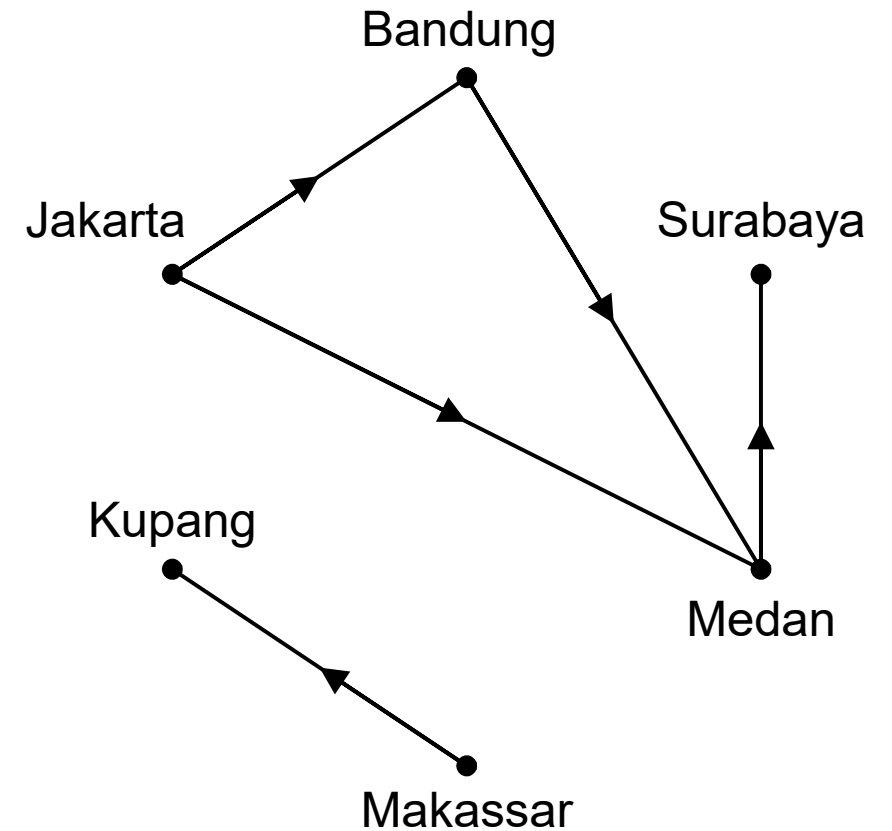
Dengan demikian, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

■

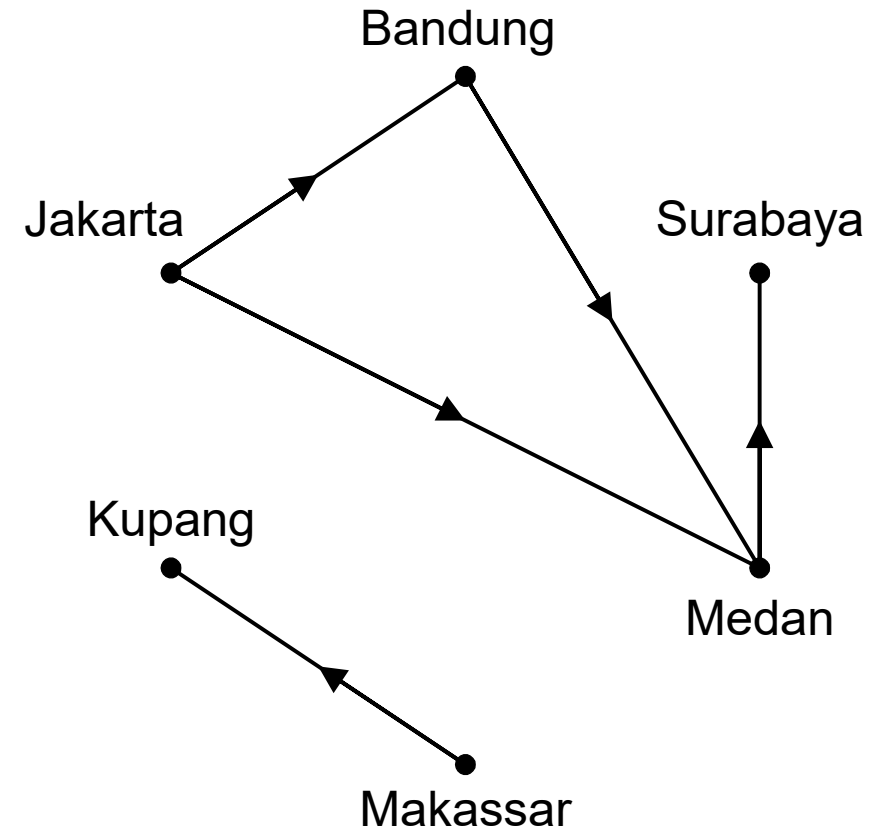
Aplikasi klosur menghantar

- Klosur menghantar menggambarkan bagaimana pesan dapat dikirim dari satu kota ke kota lain baik melalui hubungan komunikasi langsung atau melalui kota antara sebanyak mungkin.

- Misalkan jaringan komputer mempunyai pusat data di Jakarta, Bandung, Surabaya, Medan, Makassar, dan Kupang.
- Misalkan R adalah relasi yang mengandung (a, b) jika terdapat saluran telepon dari kota a ke kota b .



- Karena tidak semua *link* langsung dari satu kota ke kota lain, maka pengiriman data dari Jakarta ke Surabaya tidak dapat dilakukan secara langsung.
- Relasi R tidak menghantar karena ia tidak mengandung semua pasangan pusat data yang dapat dihubungkan (baik *link* langsung atau tidak langsung).
- Klosur menghantar adalah relasi yang paling minimal yang berisi semua pasangan pusat data yang mempunyai link langsung atau tidak langsung dan mengandung R . Oleh karena itu perlu ditambahkan link tambahan sehingga semua kota dapat terhubung langsung atau melalui kota antara.



Latihan (UTS 2025) Sebuah maskapai penerbangan melayani empat kota seperti pada tabel di bawah ini. Misalkan $(a, b) \in R$ jika ada rute penerbangan dari kota a ke kota b .

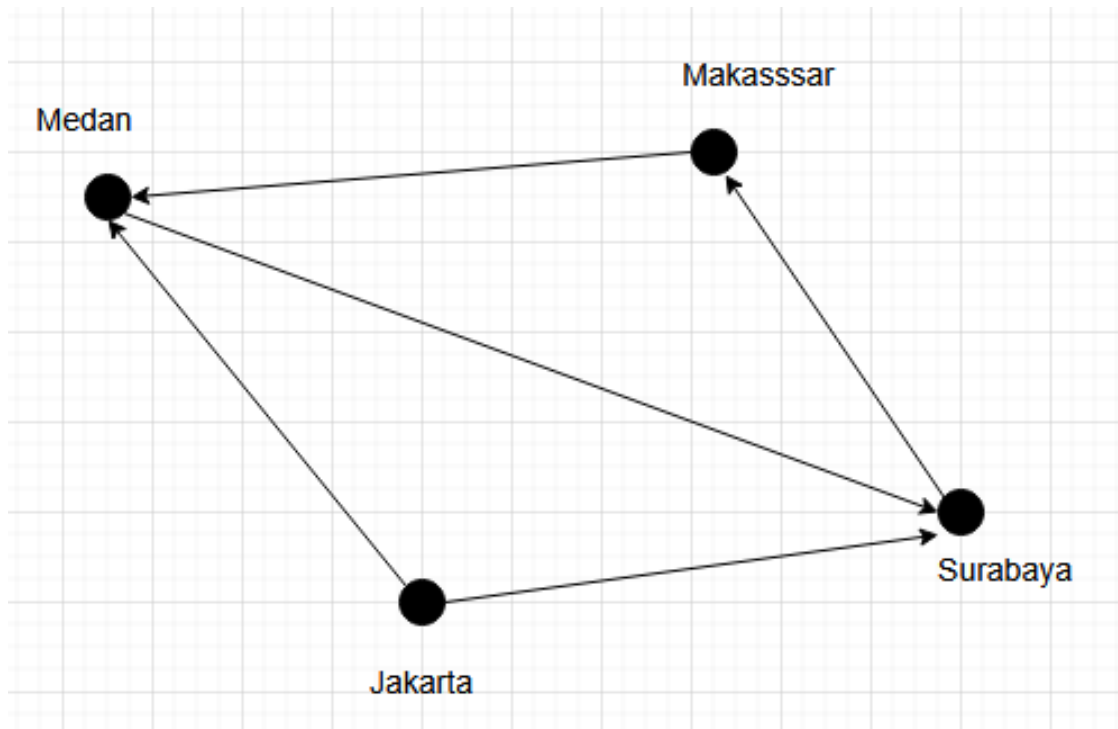
Asal	Tujuan
Jakarta	Medan
Jakarta	Surabaya
Medan	Surabaya
Surabaya	Makassar
Makassar	Medan

- (a) Tuliskan matriks yang merepresentasikan relasi R
- (b) Gambarkan graf berarah yang merepresentasikan R
- (c) Misalkan pihak maskapai perlu membuat rute tambahan sedemikian sehingga, berdasarkan rute yang sudah ada, antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui satu kota antara. Carilah relasi paling **minimal** sehingga antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui satu kota antara.

Jawaban:

(a) Dan (b)

$R = \{(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Medan, Surabaya), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan)\}$



	Jakarta	Medan	Surabaya	Makassar
Jakarta	0	1	1	0
Medan	0	0	1	0
Surabaya	0	0	0	1
Makassar	0	1	0	0

(c) Relasi paling minimal sehingga antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui kota antara adalah klosur menghantar dari relasi R.

- Klosur menghantar dari relasi R adalah $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$
- Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan R, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[4]} = M_R^{[3]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
 M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

	Jakarta	Medan	Surabaya	Makassar
Jakarta	0	1	1	1
Medan	0	1	1	1
Surabaya	0	1	1	1
Makassar	0	1	1	1

Jadi, $R^* = \{(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Jakarta, Makassar), (Medan, Medan), (Medan, Surabaya), (Medan, Makassar), (Surabaya, Medan), (Surabaya, Surabaya), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan), (Makassar, Surabaya), (Makassar, Makassar)\}$

Dengan asumsi tidak ada penerbangan dari kota yang sama ke kota yang sama, maka (Medan, Medan), (Surabaya, Surabaya), dan (Makassar, Makassar) bisa dibuang dari R^* , sehingga

$R^* = \{(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Jakarta, Makassar), (Medan, Surabaya), (Medan, Makassar), (Surabaya, Medan), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan), (Makassar, Surabaya)\}$

Asal	Tujuan
Jakarta	Medan
Jakarta	Surabaya
Jakarta	Makassar
Medan	Surabaya
Medan	Makassar
Surabaya	Makassar
Surabaya	Medan
Makassar	Medan
Makassar	Surabaya

Latihan (Kuis 2021). Buatlah klosur refleksif, klosur setangkup, dan klosur menghantar dari relasi $R = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)\}$ pada himpunan $S = \{1,2,3\}$.

Jawaban:

(a) Klosur refleksif

Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$$\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R \cup \Delta = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R \cup \Delta = \{(1, 1), (1,2), (2,1), (2, 2), (2, 3), (3,3)\}$$

(b) Klosur setangkup

Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R \cup R^{-1} = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)\} \cup \{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R \cup R^{-1} = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3, 2), (3,3)\}$$

(c) Klosur menghantar

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Klosur menghantar dari R adalah $R^* = R \cup R^2 \cup R^3$

Matriks klosur menghantar R^* adalah $M_{R^*} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3$

Dicari dahulu nilai M_{R^2} dan M_{R^3} :

$$M_R^2 = M_R \cdot M_R \quad M_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 \cdot M_R \quad M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks klosur menghantar, didapatkan klosur menghantar dari R yaitu $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Latihan (Soal Kuis 2020) Misalkan terdapat suatu relasi R , dalam hal ini $R = \{(1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$ pada himpunan $A = \{1,2,3\}$. Carilah klosur menghantar dari R .

(jawaban ada pada halaman berikut)

Jawaban:

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

maka matriks klosur menghantar dari R adalah $R^* = R \cup R^2 \cup R^3$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks klosur menghantar, didapatkan klosur menghantar dari R yaitu $R^* = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

Latihan (Soal UTS 2022) Terdapat sebuah relasi R pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, yang direpresentasikan dengan matriks sebagai berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Jelaskan apakah relasi R tersebut relasi pengurutan parsial atau tidak, dengan melihat semua sifat relasi pengurutan parsial.
- Buatlah klosur relasi dari relasi R, sehingga bersifat relasi kesetaraan.
- Jika pada himpunan A tersebut dibuat relasi biner ke himpunan $B = \{1, 8, 27, 64\}$ berupa relasi $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$; tentukan apakah relasi tersebut merupakan fungsi berkoresponden satu-ke-satu atau bukan. Jelaskan jawaban anda.

(jawaban ada pada halaman berikut)

Jawaban:

(a) Defenisi: Relasi R bersifat pengurutan parsial jika relasi tersebut refleksif, menghantar, dan tolak setangkup.

Relasi R pada soal di atas tidak refleksif karena (1,1) dan (4,4) tidak menjadi elemennya. Relasi R tidak menghantar karena terdapat (2,1) dan (1,4) tetapi tidak ada elemen (2,4). Relasi R tidak tolak setangkup karena terdapat (1,3) dan (3,1) tapi $1 \neq 3$. Jadi R bukan relasi pengurutan parsial

(b) Agar bersifat relasi kesetaraan, maka relasi harus memiliki sifat refleksif, menghantar, dan setangkup.

Agar bersifat refleksif, buat klosur refleksif.

Klosur refleksif: $T = R \cup \Delta = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4)\}$

Relasi T belum setangkup, karena ada (2,1) tapi tidak ada (1,2), ada (2,3) tapi tidak ada (3,2), jadi harus dibuat klosur setangkup

Agar bersifat setangkup, buat klosur setangkup dari hasil klosur refleksif.

$$\begin{aligned} V = T \cup T^{-1} &= \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4)\} \cup \\ &\quad \{(1,1), (3,1), (4,1), (1,2), (2,2), (3,2), (1,3), (3,3), (1,4), (3,4), (4,4)\} \\ &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Relasi V di atas belum menghantar, karena terdapat (4,1) dan (1,2), tetapi tidak ada (4,2). Oleh karena itu perlu dibuat klosur menghantar. Pertama kita representasikan dulu relasi V ke dalam bentuk matriks.

$$M_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lalu hitung V^2 , V^3 , dan V^4 untuk mendapatkan $V^* = V \cup V^2 \cup V^3 \cup V^4$

$$M_{V^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks klosur menghantar, didapatkan klosur menghantar dari R yaitu

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4) \}$$

Jadi, relasi R yang bersifat kesetaraan adalah R^* di atas.

(c) $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$

Relasi S merupakan fungsi, karena setiap elemen di A dihubungkan dengan tepat 1 elemen di B.

Relasi S bersifat satu-ke-satu atau injektif karena setiap elemen didalam A tidak ada yang memiliki bayangan yang sama.

Relasi S bersifat pada atau surjektif karena setiap elemen B merupakan bayangan dari elemen di A.

Jadi relasi S merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu karena bersifat bijektif (injektif dan surjektif).

Latihan mandiri. Carilah relasi terkecil yang mengandung relasi $\{(1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\}$ dan bersifat menghantar dan refleksif sekaligus (Petunjuk: Kata kuncinya adalah klosur!).

Kerjakan soal ini!

TAMAT