Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi UTS IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Rula Mandala, Rinaldi M, Arrival dwi Sentosa
Jumat, 30 Oktober 2024
Waktu: 110 menit

1. Hitunglah banya bilangan 1 - 1000 yang habis dibagi oleh 6 atau 13, tetapi tidak habis dibagi 7!

(Nilai: 10)

Jawaban:

Misalkan A : bilangan yang habis dibagi 6
B : bilangan yang habis dibagi 13
C : bilangan yang habis dibagi 7

Solusi yang diminta adalah:

$|(A \cup B) - C|$

Alternatif lain:

$|(A - C) \cup (B - C)|$

Banyak bilangan yang habis dibagi 6: $|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$
Banyak bilangan yang habis dibagi 13: $|B| = \lfloor 1000/13 \rfloor = 76$
Banyak bilangan yang habis dibagi 7: $|C| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$

Banyak bilangan yang habis dibagi 6 dan 13: $|A \cap B| = \lfloor 1000/78 \rfloor = 12$
Banyak bilangan yang habis dibagi 6 dan 7: $|A \cap C| = \lfloor 1000/42 \rfloor = 23$
Banyak bilangan yang habis dibagi 13 dan 7: $|B \cap C| = \lfloor 1000/91 \rfloor = 10$
Banyak bilangan yang habis dibagi 6, 7, dan 13: $|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/546 \rfloor = 1$

Misal D adalah bilangan yang habis dibagi 6 atau 13:

$|D| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 166 + 76 - 12 = 230$

Misal E adalah bilangan yang habis dibagi 6 atau 13, tetapi tidak habis dibagi 7:

$$\begin{aligned}|E| &= |(A \cup B) - C| \\ &= |D| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= 230 - (23 + 10 - 1) \\ &= 198\end{aligned}$$

2. Misalkan f : $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x \bmod 8$ dan $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Apakah f fungsi satu-ke-satu (injektif)?
b) Apakah g fungsi pada (surjektif)?
c) Tentukan jelajah (*range*) fungsi $g \circ f$ dalam bentuk himpunan **(Nilai: 2 + 2 + 6)**

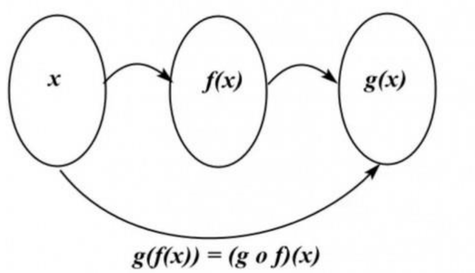
Jawaban:

(a) Bukan, karena untuk dua atau lebih nilai x berbeda memiliki bayangan yang sama, misalnya

$f(14) = 14 \bmod 8 = 6$; $f(22) = 22 \bmod 8 = 6$; $f(30) = 30 \bmod 8 = 6$, dst

(b) Tidak, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari *g*, misalnya 1. Tidak terdapat $x \in Z$ sedemikian sehingga $x^2 - 5^x + 6 = 1$ (hal ini tentu berbeda jika domain fungsi *g* adalah bilangan riil).

(c) $(g \circ f)(x)$ artinya mengoperasikan nilai x dengan fungsi f, kemudian hasil operasi tersebut dioperasikan dengan fungsi g.



Oleh karena itu, pada fungsi komposisi $g \circ f$, nilai yang akan dioperasikan dengan fungsi g hanyalah nilai yang termasuk dalam range fungsi f, yaitu:

$$\{x \mid 0 \le x < 8, x \in Z\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Untuk menemukan range dari fungsi $g \circ f$, kita dapat mengenumerasi setiap bilangan $x \in$ range f, kemudian menemukan nilai g(x) yang bersesuaian.

x	g(x)
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2
5	6
6	12
7	20

Oleh karena itu, diperoleh range fungsi $g \circ f$ adalah {0, 2, 6, 12, 20}.

3. Diketahui X = {0, 1, 2, 3, 5}, F dan G adalah fungsi dari ke X ke X, dalam hal ini:
   F(x) = (2x+1) mod 4 dan G(x) = (4x + 5) mod 4.
   a) Tuliskan F dan G sebagai sebagai himpunan pasangan terurut.
   b) Tuliskan hasil komposisi F o G dan G o F
   c) Apakah F o G dan G o F fungsi bijektif? **(Nilai: 4 + 4 + 2)**

Jawaban:

a) $x = 0 \rightarrow F(0) = ((2)(0) + 1) \bmod 4 = 1 \bmod 4 = 1$
   $x = 1 \rightarrow F(1) = ((2)(1) + 1) \bmod 4 = 3 \bmod 4 = 3$
   $x = 2 \rightarrow F(2) = ((2)(2) + 1) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 1$
   $x = 3 \rightarrow F(3) = ((2)(3) + 1) \bmod 4 = 7 \bmod 4 = 3$

$x = 5 \rightarrow F(5) = ((2)(5) + 1) \bmod 4 = 11 \bmod 4 = 3$

$F = \{(0,1), (1,3), (2,1), (3,3), (5,3)\}$

$x = 0 \rightarrow G(0) = ((4)(0) + 5) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 1$
$x = 1 \rightarrow G(1) = ((4)(1) + 5) \bmod 4 = 9 \bmod 4 = 1$
$x = 2 \rightarrow G(2) = ((4)(2) + 5) \bmod 4 = 13 \bmod 4 = 1$
$x = 3 \rightarrow G(3) = ((4)(3) + 5) \bmod 4 = 17 \bmod 4 = 1$
$x = 5 \rightarrow G(5) = ((4)(5) + 5) \bmod 4 = 25 \bmod 4 = 1$

$G = \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (5,1)\}$

b) F o G = {(0,3), (1,3), (2,3), ((3,3), (5,3) }
G o F = {(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (5,1) }

c) F o G bukan bukan bijketif karena F o G bukan fungsi satu-ke-satu dan bukan fungsi pada
G o F bukan fungsi bijektif karena G o F bukan fungsi satu-ke-satu dan bukan fungsi pada

4. Buktikan kebenaran algoritma di bawah ini dengan menggunakan prinsip induksi matematika

(Nilai: 3 + 3 + 5 + 4)

```
Kuadrat Function: SQ(n)
S ← 0
i ← 0
while i < n
   S ← S + n
   i ← i + 1
return S
```

a) Tentukan basis induksinya.
b) Tentukan hipotesis induksinya
c) Tentukan step induksinya
d) Menggunakan step induksi di nomor c tentukan bahwa pada akhirnya fungsi di atas menghitung n kuadrat.

Jawaban:

Kita lihat bagaimana kode ini menghitung kuadrat dari angka alami. Misalnya mari kita menghitung 3 dikuadratkan

S <- 0 dan i <- 0 memberi S = 0 dan i = 0 pada awalnya.

Karena i<3, maka masuk ke loop
S <- 0 + 3
i <- 0 + 1
menghasilkan s = 3 dan i = 1.

Karena i <3, loop dikerjakan untuk kedua kalinya.
S <- 3 + 3
i <- 1 + 1

menghasilkan s = 6 dan i = 2.

Karena i <3, loop dikerjakan ketiga kalinya.
S <- 6 + 3
i <- 2 + 1
menghasilkan s = 9 dan i = 3.
Karena i = 3, loop sementara tidak dikerjakan lagi, S = 9 dikembalikan dan eksekusi algoritma berhenti

Secara umum untuk menghitung kuadrat n dengan algoritma ini, n ditambahkan n kali.

Untuk membuktikan bahwa algoritma itu benar, mari kita perhatikan terlebih dahulu bahwa algoritma berhenti setelah langkah-langkah yang terbatas. Karena nilai i meningkat satu per satu dari 0 dan n adalah bilangan bulat. Jadi i akhirnya menjadi sama dengan n.

a) Untuk membuktikan bahwa itu menghitung kuadrat n, perlu ditunjukkan bahwa setelah melalui loop k kali, s = k*n dan i = k. Pernyataan ini disebut loop invarian dan induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikannya.
Basis Langkah: k = 0. Ketika k = 0, saat sebelum masuk ke loop, s = 0 dan i = 0. Oleh karena itu s = k*n dan i = k berlaku.

b) Hipotesis induksi.

Hipotesis induksi: Untuk sembarang nilai m dari k, s = m * n dan i = m berlaku setelah melalui loop m kali.

c) Langkah induksi (induction step)

Langkah Induktif: Ketika loop dikerjakan sebanyak m+1 kali, S = m*n dan i = m pada awal loop. Di dalam loop dikerjakan,
S <- m*n + n
i <- i + 1
menghasilkan S = (m + 1)*n dan i = m + 1.
Jadi S = k*n dan i = k berlaku untuk semua nilai k.

d) Ketika algoritma berhenti, i = n. Oleh karena itu loop akan dikerjakan n kali. Jadi s = n*n = n kuadrat. Karenanya algoritma benar.

5. Di sebuah perusahaan pengembangan *game*, manajer proyek ingin membentuk tim-tim kecil untuk berbagai proyek. Setiap tim harus memenuhi salah satu dari kondisi berikut:
   I. Tipe A: Terdiri dari tepat 3, 4, atau 5 *programmer*.
   II. Tipe B: Terdiri dari tepat 6 *programmer*, tetapi hanya jika terdapat setidaknya dua tim Tipe A yang telah dibentuk sebelumnya.

   Buktikan dengan induksi matematika bahwa apabila terdapat 20 atau lebih *programmer*, maka *programmer-programmer* tersebut dapat dibagi menjadi beberapa tim sedemikian hingga setiap programmer masuk dalam satu tim dan setiap tim memenuhi salah satu dari kondisi di atas. **(Nilai: 15)**

Jawaban:

. Langkah 1: Basis Induksi

Verifikasi untuk n = 20,21,22,23,24:

- n = 20: 4 tim Tipe A (5,5,5,5).
- n = 21: 3 tim Tipe A (5,5,5) + 1 tim Tipe B (6).
- n = 22: 2 tim Tipe A (5,5) + 2 tim Tipe B (6,6).
- n = 23: 3 tim Tipe A (5,5,5) + 1 tim Tipe A (4) + 1 tim Tipe A (4).
- n = 24: 4 tim Tipe A (5,5,5,5) atau kombinasi lainnya.

Langkah 2: Langkah induksi

Misalkan pernyataan benar untuk semua k dimana 20 ≤ k ≤ n. Artinya, setiap kumpulan k programmer dapat dibagi sesuai ketentuan (hipotesis induksi).

Buktikan benar untuk k = n + 1:

1. Bentuk satu tim Tipe A (3, 4, atau 5):
   - Jika ambil 3: Sisa n − 2. Karena n+1 ≥ 20, n ≥ 19. Namun, n ≥ 20 berdasarkan asumsi.
   - Jika ambil 4: Sisa n−3.
   - Jika ambil 5: Sisa n−4.
2. Strategi Optimal: Ambil tim Tipe A dengan 3 atau 5 anggota untuk memastikan sisa ≥ 20 – 5 = 15. Berdasarkan basis induksi, sudah ter-cover.
3. Alternatif: Jika memungkinkan, bentuk tim Tipe B setelah memenuhi syarat dua tim Tipe A.

Dengan basis induksi yang valid dan langkah induksi yang memastikan n+1 dapat dibagi sesuai ketentuan, maka pernyataan terbukti benar untuk semua n ≥ 20.

6. Dalam sebuah perusahaan, gaji karyawan baru dihitung berdasarkan suatu deret. Gaji pertama seorang karyawan adalah 2500 dolar, dan setiap bulan gaji tersebut bertambah 150 dolar. Karyawan tersebut menerima gaji ini selama 12 bulan pertama.
   a) Tentukan persamaan umum deret yang mewakili gaji karyawan tersebut setiap bulan.
   b) Berapa total gaji yang diterima karyawan tersebut selama 12 bulan pertama?

(Nilai: 10)

Jawaban:

a. Persamaan umum deret aritmatika:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

Dengan a_1 = 2500 (gaji pertama) dan d = 150 (kenaikan gaji setiap bulan).

$a_n = 2500 + (n - 1)\ 150$

b. Menghitung total gaji selama 12 bulan pertama:

S_{12} = 12/2 (2 x 2500 + ((12 – 1) 150)) *{rumus jumlah deret aritmetika}*

= 6 (5000 + (11 x 150))

= 6 (5000 + 1650)

= 6 (6650)

= 39,900

Karyawan tersebut menerima total gaji sebesar 39,900 dolar selama 12 bulan pertama.

7. Sebuah algoritma rekursif memiliki kebutuhan waktu algoritma yang dinyatakan dalam sebuah fungsi rekursif yang bebentuk relasi rekurens sebagai berikut:

$$4f(n) - 3 = 3(8f(n - 1) - 12f(n - 2) - 1);\ f(0) = 2,\ f(2) = 36$$

a) Tentukan solusi relasi rekurens tersebut

b) Hitung nilai fungsi untuk $n = 6$

(Nilai: 15)

Jawaban:

(a)

$4f(n) - 3 = 24f(n - 1) - 36f(n - 2) - 3$

$f(n) = 6f(n - 1) - 9f(n - 2)$

Persamaan karakteristik:

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r - 3)(r - 3) = 0$$

$$r = 3$$

Didapatkan solusi umum relasi rekurens adalah

$$f(n) = (a1 + a2\, n)\, 3^n$$

$f(0) = 2 \rightarrow a1 = 2$

$f(2) = 36 \rightarrow (2 + 2\, a2)\, 3^2 = 36$

$2 + 2\, a2 = 4 \rightarrow a2 = 1$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah

$$f(n) = (2 + n)\, 3^n$$

(b) Untuk $n = 6$, $f(6) = (2 + 6)\, 3^6 = 5832$

8. Sebuah perusahaan ingin merancang sistem pencahayaan otomatis yang mengontrol lampu berdasarkan tiga variabel:
   - **P**: Apakah ada orang yang hadir di ruangan? (1 jika hadir, 0 jika tidak)
   - **L**: Apakah tingkat cahaya alami rendah? (1 jika rendah, 0 jika tinggi)
   - **T**: Apakah waktu saat ini malam hari? (1 jika malam, 0 jika siang)

   Lampu akan dinyalakan (output = 1) jika kondisi tertentu terpenuhi, dan tetap mati (output = 0) jika kondisi tidak terpenuhi. Terdapat beberapa kondisi di mana status beberapa variabel tidak memengaruhi hasil (don't care). Lampu hanya akan menyala jika pada kondisi berikut:
   - Ada orang hadir di dalam ruangan, tingkat cahaya alami rendah, waktu malam hari, atau
   - Ada orang hadir di dalam ruangan, tingkat cahaya alami tinggi, waktu malam hari, atau
   - Tidak ada orang hadir di dalam ruangan, Tingkat cahaya alami rendah, waktu malam hari,

   Sedangkan jika ada orang hadir di dalam ruangan, tingkat cahaya rendah, dan waktu siang hari, maka kondisi ini tidak mempengaruhi hasil.

   a) Buatlah peta Karnaugh (K-map) untuk menyederhanakan fungsi logika persoalan di atas.

   b) Berdasarkan peta Karnaugh tersebut, tuliskan fungsi boolean minimal untuk sistem pencahayaan otomatis ini yang memberikan output = 1.

   c) Buatlah rangkaian logika dari fungsi boolean minimal yang didapatkan.

(Nilai:15)

Jawaban:

Menentukan kombinasi input output pada tabel kebenaran:

P	L	T	Output
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	1

(a)

Bentuk tabel Karnaugh Map:

T / PL	0	1
00	0	0
01	0	1
11	X	1
10	0	1

Hasil minimasi: f(P, L, T) = LT + PT

Alternatif bentuk tabel Karnaugh Map:

LT / P	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	X

Hasil minimasi: f(P, L, T) = LT + PT

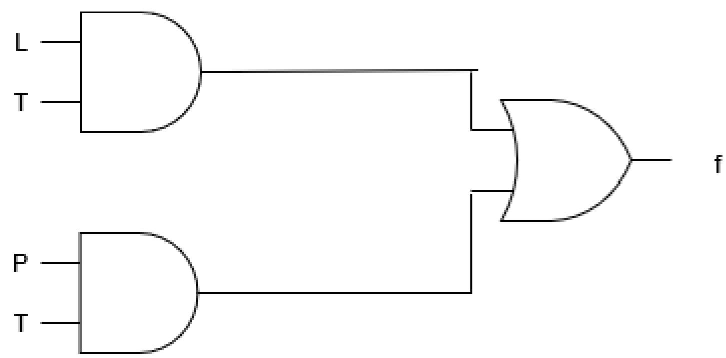
(b) Fungsi minimasi: f(P, L, T) = LT + PT atau f(P, L, T) = T(L + P)

Lampu akan menyala (Output = 1) jika waktu malam (T=1) dan ada orang yang hadir (P=1) atau tingkat cahaya alami rendah (L=1).

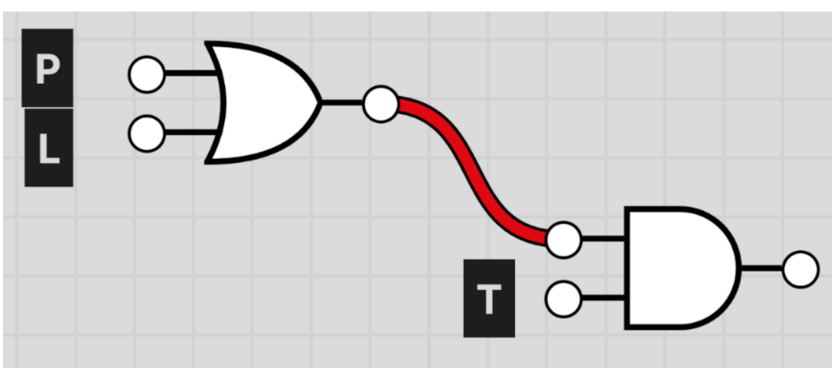
Kesesuaian dengan Kondisi Awal:

- P=1, L=1, T=1: 1 · (1+1)=1
- P=1, L=0, T=1: 1 · (1+0)=1
- P=0, L=1, T=1: 1 · (0+1)=1
- Kondisi lainnya: Output akan 0 kecuali pada kondisi don't care, yang tidak mempengaruhi hasil.

(c) f(P, L, T) = LT + PT



Alternatif: f(P, L, T) = T(L + P)



Total Nilai = 105