Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi UAS IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Rula Mandala, Rinaldi M, Arrival dwi Sentosa
Rabu, 8 Januari 2025
Waktu: 150 menit (2,5 jam)

---

1. Ada pemilihan umum pengurus yaitu Ketua dan Sekretaris HMIF dari 50 kandidat. Ada berapa banyak kemungkinan pilihan pengurus yang berbeda yang mungkin jika:
   (a) Tidak ada batasan dari pengurus yang dipilih.
   (b) Ada salah satu kandidat yaitu si A yang hanya mau jadi Ketua saja, tidak mau jadi sekretaris.
   (c) Ada dua (2) mahasiswa, si B dan si C, yang selalu mau berdua saja jadi pengurus, atau tidak sama sekali dua-duanya (Dengan kata lain jika si B terpilih jadi pengurus tapi tapi C tidak terpilih, maka Si B tidak mau jadi pengurus. Jika si C terpilih jadi pengurus tapi si B tidak terpilih, maka si C tidak mau jadi pengurus).
   (d) Ada dua (2) mahasiswa, si D dan si E, yang bermusuhan. Kedua orang tersebut tidak mau jadi pengurus secara bersama (dengan kata lain jika si D terpilih jadi pengurus, maka si E tidak mau jadi pengurus. Sebaliknya jika si E jadi pengurus maka si D tidak mau jadi pengurus)pengurus)

(Nilai = 2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = 10)

Jawaban:

a. Jika taka da Batasan sama sekali maka :

$$_{50}P_2 = \frac{50!}{48!} = (50)(49) = 2450.$$

b. Karena si A hanya mau jadi Ketua saja, maka kita punya 2 kondisi sbb: (i) si *A* Terpilih jadi ketua , yang menghasilkan 49 kemungkinan saja untuk posisi sekretaris, atau ii) pengurus dipilih dari 49 mahasiswa tanpa si *A*, yang menghasilkan jumlah pilihan $_{49}P_2$ = (49)(48) = 2352. Sehingga jumlah total pilihan adalah 49 + 2352 = 2401.

c. Jumlah pilihan jika *B* and *C* terpilih adalah 2. Jumlah pilihan dimana *B* and *C* tidak dipilih adalah $_{48}P_2$ = 2256. Sehingga total jumlah pilihan adalah 2 + 2256 = 2258

d. Jumlah pilihan jika *D* terpilih jadi pengurus tetapi E tidak terlipih jadi pengurus adalah (2)(48) =96, dimana 2 adalah jumlah posisi *D* dapat mengisi dan 48 adalah jumlah pilihan dari pengurus yang lain dari mahasiswa tersisa kecuali si *E*. Jumlah pilihan jika si *E* terpilih jadi pengurus tetapi D tidak terpilih jadi pengurus adalah juga (2)(48) = 96. Jumlah pilihan dimana kedua si D dan si E tidak terpilih adalah $_{48}P_2$ = 2256. Oleh karena itu, jumlah pilihan total adalah (2)(96) + 2256 = 2448.

   Soal ini juga bisa dijawab secara singkat sbb : Karena si *D* dan si *E* hanya dapat terpilih bersama-sama dalam 2 cara, sehingga jawabannya adalah 2450 −2 = 2448.

2. Berapa banyak bilangan ganjil dari 1 sampai 10000 (termasuk 1 dan 10000) yang memiliki jumlah digit bernilai 12? **(Nilai = 10)**

Jawaban:

Permasalahan akan dibagi menjadi 5 kasus berdasarkan pengertian dari bilangan ganjil itu sendiri. Bilangan ganjil adalah bilangan yang tidak habis dibagi 2 sehingga digit satuan dari bilangan ganjil yang mungkin adalah 1, 3, 5, 7, dan 9. Karena 10000 merupakan bilangan genap, maka kasus dapat dikemas menjadi pengisian 4 buah digit sedemikian rupa sehingga berjumlah 12. Model persoalan dapat disusun sebagai berikut.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

Dengan batasan $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 9$ dan $x_4 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) Kasus 1: Digit satuan bernilai 1 ($x_4 = 1$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

Persoalan di atas dapat dianalogikan sebagai persoalan 11 bola akan dimasukkan ke dalam 3 buah kotak (n = 3 dan r = 11) sehingga

$C(n+r-1, r) = C(11+3-1, 11) = C(13, 11) = 78$ bilangan

Untuk kasus 1, jumlah ini harus dikurangi dengan susunan yang mengandung 10 dan 11 (karena 10 dan 11 bukan digit). Yaitu susunan sebagai berikut:

(10, 0, 1), (10, 1, 0), (0, 10, 1), (1, 10, 0), (0, 1, 10), (1, 0, 10), (11, 0, 0), (0, 11, 0), (0, 0, 11).

Ada 9 susunan seperti itu, sehingga jumlah untuk kasus 1 adalah 78 – 9 = 69

(ii) Kasus 2: Digit satuan bernilai 3 ($x_4 = 3$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

Persoalan di atas dapat dianalogikan sebagai persoalan 9 bola akan dimasukkan ke dalam 3 buah kotak (n = 3 dan r = 9) sehingga

$C(n+r-1, r) = C(9+3-1, 9) = C(11, 9) = 55$ bilangan

(iii) Kasus 3: Digit satuan bernilai 5 ($x_4 = 5$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

Persoalan di atas dapat dianalogikan sebagai persoalan 7 bola akan dimasukkan ke dalam 3 buah kotak (n = 3 dan r = 7) sehingga

$C(n+r-1, r) = C(7+3-1, 7) = C(9, 7) = 36$ bilangan

(iv) Kasus 4: Digit satuan bernilai 7 ($x_4 = 7$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + 7 = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

Persoalan di atas dapat dianalogikan sebagai persoalan 5 bola akan dimasukkan ke dalam 3 buah kotak (n = 3 dan r = 5) sehingga

C(n+r-1, r) = C(5+3-1, 5) = C(7, 5) = 21 bilangan

(v) Kasus 5: Digit satuan bernilai 9 ($x_4 = 9$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + 9 = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Persoalan di atas dapat dianalogikan sebagai persoalan 3 bola akan dimasukkan ke dalam 3 buah kotak (n = 3 dan r = 3) sehingga

C(n+r-1, r) = C(3+3-1, 3) = C(5, 3) = 10 bilangan

Jumlahkan banyak bilangan dari setiap kasus sehingga diperoleh 69 + 55 + 36 + 21 + 10 = 191 bilangan. Jadi, banyak bilangan ganjil antara 1 sampai 10000 dengan jumlah digit-digitnya 12 adalah 191 bilangan.

(jika menjawab 200 maka nilainya 7,5)

3. Tentukan hasil perhitungan berikut:
   (a) (5^{11} mod 13 + 6^{1994} mod 13) mod 7
   (b) (7^{2021} mod 17)^{2022} mod 23
   (c) $(5^{2021} \text{ mod } 11 + 5^{2021} \text{ mod } 7)$ mod 3

(Nilai = 3 + 3 + 4 = 10)

Jawaban:

(a) Dengan menggunakan Teorema Fermat, maka berlaku

$$6^{12} \equiv 1 \ (mod\ 13)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} 6^{1994}\ mod\ 13 &\equiv (6^{12})^{166.2}\ mod\ 13 \\ &\equiv (1)^{166}\ 6^2\ mod\ 13 \\ &\equiv 6^2\ mod\ 13 \\ &\equiv 36\ mod\ 13 \\ &\equiv 10 \end{aligned}$$

Menghitung $5^{11} mod\ 13$:

$$5^{11} mod\ 13 \equiv (6^{12})^{167.5}\ mod\ 13$$

$$5\ mod\ 13 = 5$$

$$5^2\ mod\ 13 = 12$$

$$5^4 \quad mod\ 13 = (5^2.5^2)\ mod\ 13 = (12.12)\ mod\ 13 = 144\ mod\ 13 = 1$$

$$5^8 \quad mod\ 13 = (5^4.5^4)\ mod\ 13 = (1.1)\ mod\ 13 = 1\ mod\ 13 = 1$$

$$5^{11} \quad mod\ 13 = (5^8.5^2.5)\ mod\ 13 = (1.12.5)\ mod\ 13 = 60\ mod\ 13 = 8$$

Sehingga:

(5^{11} mod 13 + 6^{1994} mod 13) mod 7 = (10 + 8) mod 7 = 18 mod 7 = 4.

(b) Karena PBB(7,17) = 1, maka memenuhi syarat Teorema Fermat.

Dengan Teorema Fermat, berlaku $7^{16} \equiv$ (1 mod 17)

$$\begin{aligned} 7^{2021} \text{ mod } 15 &\equiv 7^{(16.126 + 5)} \text{ (mod 17)} \\ &\equiv 7^{(16.126)} + 7^5 \text{(mod 17)} \\ &\equiv 1^{126} + 7^5 \text{(mod 17)} \end{aligned}$$

$\equiv 7^5 (\text{mod } 17)$
$\equiv ((7^2 \text{ mod } 17) . (7^2 \text{mod } 17) . (7 \text{ mod } 17)) \text{ mod } 15$
$\equiv (15 . 15 . 7) \text{ mod } 17$
$\equiv 4.7 \text{ mod } 17 = 11$

Karena PBB(11,23) = 1, maka memenuhi syarat Teorema Fermat.
Maka dengan menggunakan $11^{22} \equiv (1 \text{ mod } 23)$, didapat

$11^{2022} \text{ mod } 23 \equiv 11^{(22.91 + 20)} (\text{mod } 23)$
$\equiv 11^{(22.91)} + 11^{20} (\text{mod } 23)$
$\equiv 1^{91} + 11^{20} (\text{mod } 23)$
$\equiv 11^{20} (\text{mod } 23)$
$\equiv ((11^2 \text{ mod } 23)^{10}) \text{ mod } 23$
$\equiv (6)^{10} \text{ mod } 23$
$\equiv (6^2 \text{ mod } 23)^5 \text{ mod } 23$
$\equiv (13)^5 \text{ mod } 23$
$\equiv ((13^2 \text{ mod } 23) . (13^2 \text{ mod } 23) . 13) \text{ mod } 23$
$\equiv (8 . 8 . 13) \text{ mod } 23$
$\equiv 18 . 13 \text{ mod } 23 = 234 \text{ mod } 23 = 4$

Maka didapat $(7^{2021} \text{ mod } 17)^{2022} \text{ mod } 23 = 4$

(c) Berdasarkan Teorema Fermat,

$$5^{10} \equiv 1\ (mod\ 11); 5^6 \equiv 1\ (mod\ 7); 5^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$$

$(5^{2021} mod\ 11 + 5^{2021} mod\ 7)\ mod\ 3$

$$= (5^{(202x10)+1} mod\ 11 + 5^{(336x6)+5} mod\ 7)\ mod\ 3$$
$$= ((5^{202})^{10} 5^1\ mod\ 11 + (5^{336})^6\ 5^5\ mod\ 7)\ mod\ 3$$

dengan Teorema Fermat persamaan disederhanakan menjadi,

$$= (5\ \ mod\ 11 + 5^5\ mod\ 7)\ mod\ 3 = (5 + 3)\ mod\ 3\ = 2$$

Jadi $(5^{2021} mod\ 11 + 5^{2021} mod\ 7)\ mod\ 3 = 2$

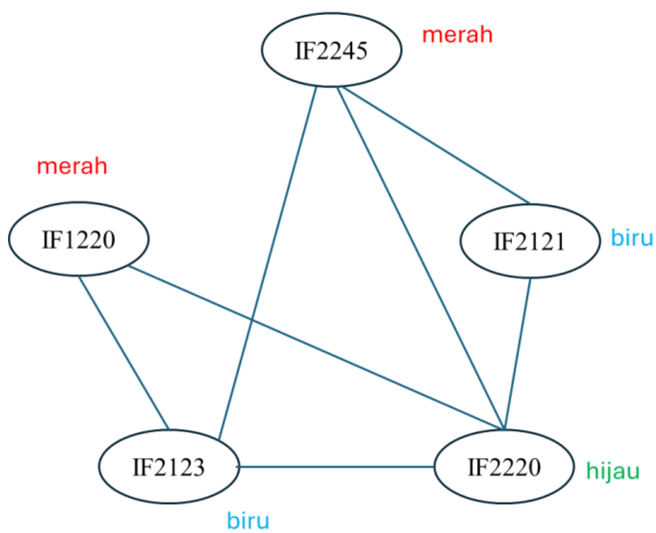
4. Di bawah ini adalah daftar dosen dan mata kuliah yang diampunya. Untuk kelas paralel, diberi kode K1, K2, dan K3.

Nama Dosen	**Mata kuliah yang diampu dan kelasnya**
Dr. Rinaldi.	IF1220(K1), IF2123(K2)
Dr. Judhi Santoso	IF1220(K3), IF2123(K1)
Dr. Fariska Zakhralativa.	IF1220(K2), IF2220(K1)
Dr. Ayu Purwarianti	IF2220(K3), IF2121(K1)
Nugraha Priya. Utama, Ph.D	IF2121(K3), IF2245(K3)
Dr. Rila Mandala.	IF2123(K3), IF2220(K2), IF2245 (K1)
Windy Gambetta MBA	IF2121(K2), IF2245(K2)

Setiap dosen tidak boleh mengajar lebih dari satu kuliah dalam satu hari. Untuk setiap mata kuliah yang diajar pada jadwal tertentu, ketiga kelas paralel harus diselenggarakan secara bersama-sama pada jadwal tersebut. Berapa sedikitnya jumlah hari agar dosen dapat mengajar tidak lebih dari satu kuliah dalam satu hari? Tentukan susunan jadwal kuliah yang memenuhi kriteria tersebut! (dalam menjawab persoalan ini, modelkan persoalan ke dalam suatu graf, lalu tentukan solusinya). **(Nilai = 15)**

Jawaban:

Modelkan persoalan ini dengan graf, simpul menyatakan mata kuliah, sisi menyatakan dosen yang sama mengajar kedua mata kuliah tersebut. Dosen yang sama mengajar dua mata kuliah berbeda tidak boleh dialokasikan jadwal mengajar pada hari yang sama. Ini adalah persoalan pewarnaan graf.



Bilangan kromatis graf t ersebut adalah 3, jadi dibutuhkan 3 hari jadwal kuliah.

Hari ke-1 (merah), misal hari Senin: IF1220 dan IF2245

Hari ke-2 (biru), misal hari Selasa: IF2121 dan IF2123

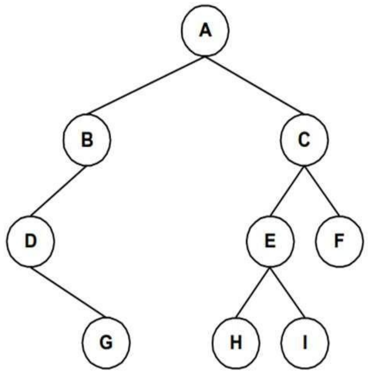
Hari ke-3 (hijau), misal hari Rabu: IF2220

(Jawaban susunan mata kuliah pada setiap hari bisa berbeda bergantung memmulai mewarnai dari simpul mana, namun jumlah hari kuliah tetap sama, minimal 3 hari)

Setiap dosen hanya mengajar 1 kuliah saja setiap hari:

Nama Dosen	**Mata kuliah yang diampu dan kelasnya**	**Jadwal mengajar setiap kuliah**
Dr. Rinaldi.	IF1220(K1), IF2123(K2)	Senin, Selasa
Dr. Judhi Santoso	IF1220(K3), IF2123(K1)	Senin, Selasa
Dr. Fariska Zakhralativa.	IF1220(K2), IF2220(K1)	Senin, Rabu
Dr. Ayu Purwarianti	IF2220(K3), IF2121(K1)	Rabu, Senin
Nugraha Priya. Utama, Ph.D	IF2121(K3), IF2245(K3)	Selasa, Senin
Dr. Rila Mandala.	IF2123(K3), IF2220(K2), IF2245 (K1)	Selasa, Rabu, Senin
Windy Gambetta MBA	IF2121(K2), IF2245(K2)	Selasa, Senin

5. Diketahui *binary tree* di bawah ini:



(a) Telusurilah binary tree tersebut secara pre-order
(b) Telusurilah binary tree tersebut secara in-order

(Nilai = 5)

Jawaban:

Secara preorder : ABDGCEHIF
Secara inorder : DGBAHEICF
Secara postorder : GDBHIEFCA

6. Sebuah algoritma pengkodean Huffman digunakan untuk mengompresi teks berikut (tidak termasuk tanda petik dua):

teks: "ECCLESIASTICAL"

(a) Bangun pohon Huffman berdasarkan frekuensi karakter yang telah ditemukan
(b) Tentukan kode Huffman untuk setiap karakter
(c) Hitung rata-rata panjang kode (average code length) dari teks tersebut
(d) Bandingkan hasil kompresi Huffman dengan pengkodean tetap 4-bit per karakter dan hitung rasio pemampatannya

(Nilai = 4 + 4 + 4 + 3 = 15)

Jawaban:

(a) Membangun Pohon Huffman

Frekuensi: C: 3 kali, E: 2 kali, L: 2 kali, S: 2 kali, I: 2 kali, A: 2 kali, T: 1 kali

1. **Urutkan karakter berdasarkan frekuensi (ascending)**:
   T(1), A(2), E(2), I(2), L(2), S(2), C(3)

2. **Gabungkan dua simpul dengan frekuensi paling kecil** secara berulang:

   - Gabungkan T(1) dan A(2) ⇒ node baru TA(3)
     Sekarang simpul-simpulnya:
     E(2), I(2), L(2), S(2), C(3), TA(3)
   - Gabungkan E(2) dan I(2) ⇒ node baru EI(4)
     Sekarang simpul-simpulnya:
     L(2), S(2), C(3), TA(3), EI(4)

- Gabungkan L(2) dan S(2) ⇒ node baru LS(4)
  Sekarang simpul-simpulnya:
  C(3), TA(3), EI(4), LS(4)
- Gabungkan C(3) dan TA(3) ⇒ node baru CTA(6)
  Sekarang simpul-simpulnya:
  EI(4), LS(4), CTA(6)
- Gabungkan EI(4) dan LS(4) ⇒ node baru EILS(8)
  Sekarang simpul-simpulnya:
  CTA(6), EILS(8)
- Terakhir, gabungkan CTA(6) dan EILS(8) ⇒ node root(14).

3. Sehingga struktur pohon Huffman (dari atas ke bawah) dapat direpresentasikan sebagai:

```
                (14)

             /       \

       (6) CTA     EILS (8)

         /   \       /     \

    (3) C   TA(3)  EI(4)  LS(4)

           /  \    / \     / \

      T(1) A(2)  E  I   L  S
```

(b) Kode Huffman

- C: 00
- T: 010
- A: 011
- E: 100
- I: 101
- L: 110
- S: 111

(c) Menghitung Rata-Rata Panjang Kode

Total bit=$(3\times2)+(1\times3)+(2\times3)+(2\times3)+(2\times3)+(2\times3)+(2\times3)$

$6+3+6+6+6+6+6=39$ bit

Rata-rata panjang kode per karakter:

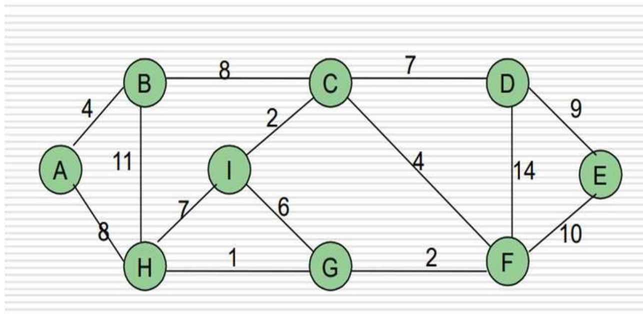
$39/14\approx 2.79$ bit / karakter

(d) Perbandingan dengan Pengkodean Tetap 4-bit

- Panjang teks dengan pengkodean 4-bit = $14\times4 = 56$ bit.
- Panjang kode Huffman = 39 bit

Rasio pemampatan: Rasio = 56 - 3956 x 100% ≈ 30%

7. Diketahui Graph di bawah ini :



(a) Gambarkan *minimum spanning tree* nya langkah per langkah boleh menggunakan algoritma Prim.
(b) Gambarkan *minimum spanning tree* nya langkah per langkah boleh menggunakan algoritma Kruskal.
(c) Berapa bobot total *minimum spanning tree* nya ?

(Nilai = 5 + 5 + 2 = 12)

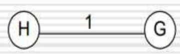
Jawaban:

(a) Minimum spanning tree dengan Algoritma Prim Langkah-langkahnya adalah sbb :

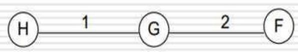
LANGKAH	SISI	BOBOT
1	(H,G)	1
2	(G,F)	2
3	(F,C)	4
4	(C,I)	2
5	(C,D)	7
6	(C,B)	8
7	(B,A)	4
8	(D,E)	9

Algorithm Prim

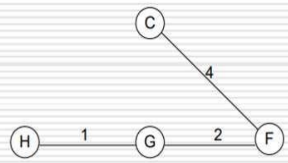
Langkah 1



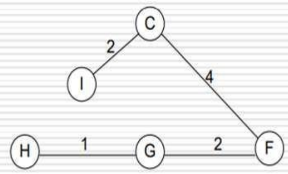
Langkah 2



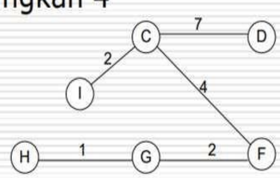
Langkah 3



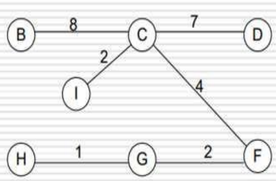
Langkah 3



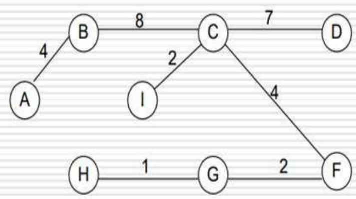
Langkah 4



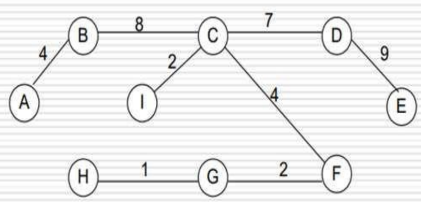
Langkah 5



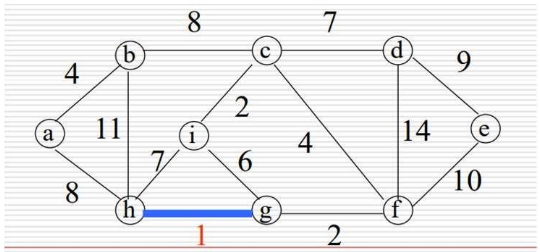
Langkah 6

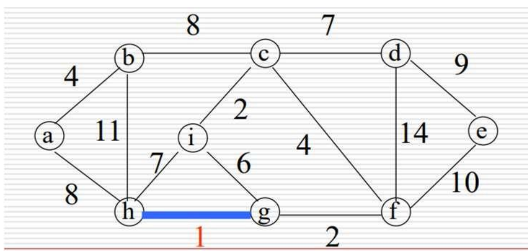


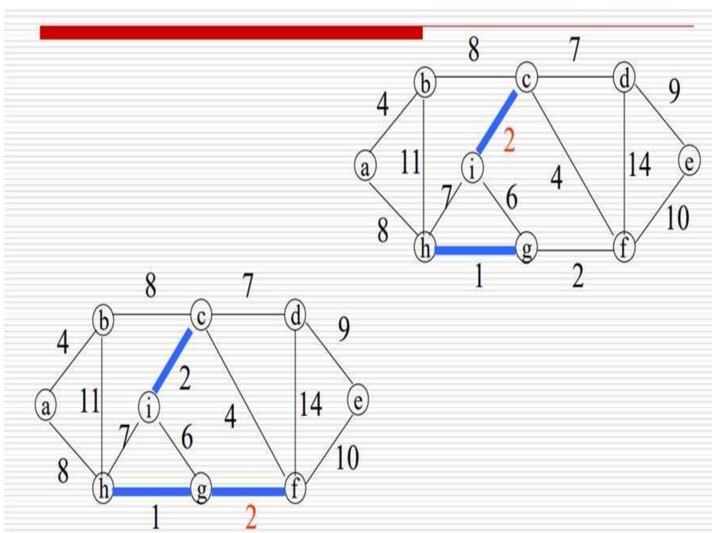
Langkah 7

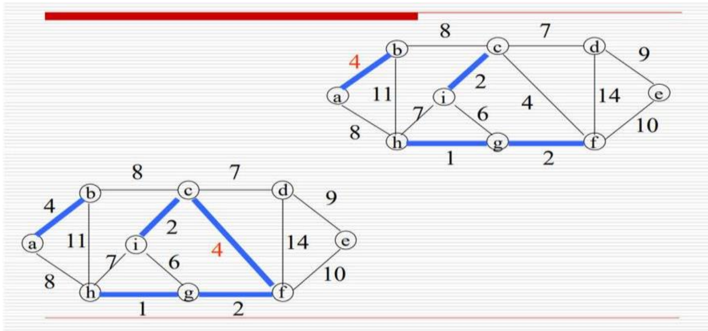


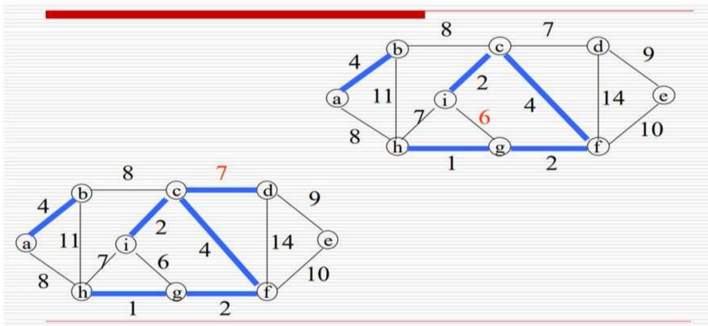
(b) Minimum spanning tree dengan algoritma Kruskal adalah sbb :

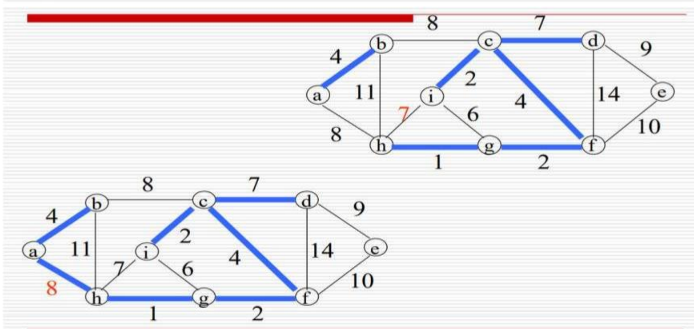


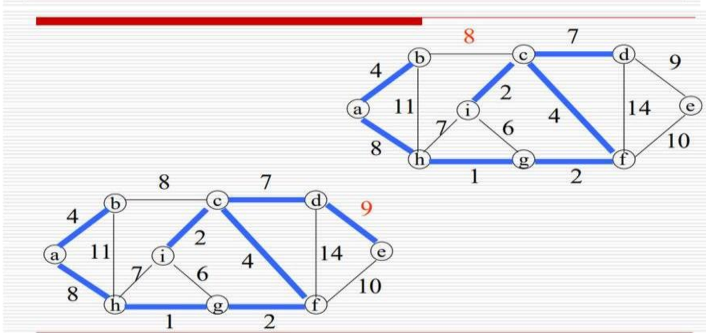












(c) Total bobot minimal spanning tree adalah : 37

8. Sederhanakan bentuk dibawah ini!
   (a) $O(N^2 + \log N + N \log N)$
   (b) $O(N^3 + NM + M^3)$
   (c) $O(N(\log N)^2 + N^2(\log N))$
   (d) $O(N^3 + N^2(\log N))$ **(Nilai = 2 + 2 + 2 + 2 = 8)**

Jawaban:

a. $\boldsymbol{O(N^2)}$
b. $\boldsymbol{O\left(N^3 + NM + M^3\right)}$
c. $\boldsymbol{O(N^2(\log N))}$
d. $\boldsymbol{O(N^3)}$

9. Perhatikan *pseudocode* berikut:

```
function computeValue(n)
   sum ← 0
   for i from 1 to n do
      for j from 1 to i do
         k ← 1
         while k <= j do
            sum ← sum + (i * j * k)
            k ← k * 2
         end while
      end for
   end for
return sum
```

(a) Tentukan kompleksitas waktu (Big-O) dari fungsi **computeValue(n)** di atas
(b) Tentukan pengaruh perubahan kompleksitas waktu jika pada baris **k ← k*2** diganti menjadi **k ←k+1**
(c) Jika ditambahkan satu loop luar (yaitu **for x from 1 to n**) yang membungkus seluruh kode (termasuk dua *for* dan satu *while* di dalamnya), Tuliskan kompleksitas waktu Big-O yang baru

(Nilai = 15)

Jawaban:

(a) Analisis Kompleksitas Awal

- Loop for i from 1 to n: berjalan n kali
- Loop for j from 1 to 1: dalam kasus terburuk, saat i = n (berjalan hingga n kali). Rata-rata nya adalah n/2 jika ditinjau dari i = 1 sampai i = n. Maka dapat gunakan batas atas (worst case) i=1ni=O(n2)
- Loop while k <= j dengan k <- k * 2: Jumlah iterasinya ≈ log2(j) Pada batas atas, j dapat mencapai n.

  T(n)=i=1n(i .O(log i))=i=1nO(i log i)

  T(n)=O(i=1ni log i)=O(n2 log n)

(b) Perubahan k ← k + 1

T(n)=i=1nj=1iO(j)

T(n)=O(i=1nj=1ij)=O(i=1ni22)=O(i=1ni2)=O(n3)

(c) Penambahan satu loop luar (wrap)

```
function computeValue(n)
   sum ← 0
   for x from 1 to n:
      for i from 1 to n:
         for j from 1 to i:
            k ← 1
            while k <= j:
               sum ← sum + (i * j * k)
               k ← k * 2
            end while
         end for
      end for
   end for
return sum
```

Maka semua proses di dalamnya (O(n2 log n) pada kondisi semula dengan k ← k * 2) akan berjalan x n lagi dari loop for x from 1 to n. Sehingga:

$$T(n)=n \times O(n2 \log n)=O(n3 \log n)$$

10. Apa prediksi nilaimu untuk kuliah ini? (A/AB/B/BC/C/D/E) **(Nilai = 2)**

Total Nilai = 102