

Solusi Kuis ke-1 IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Relasi dan Fungsi
 Dosen: Rinaldi Munir, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
 Rabu, 1 Oktober 2024
 Waktu: 55 menit

1. Buktikan bahwa argumen $p \rightarrow t, q \rightarrow s, p \wedge q \Rightarrow t \wedge s$ benar (valid atau sah), boleh menggunakan tabel kebenaran **atau** menggunakan campuran hukum-hukum logika dan metode penarikan kesimpulan yang sudah terbukti sah (modus ponens, modus tollens, dsb). **(Nilai: 20)**

Jawaban:

Alternatif Solusi 1

Periksa apakah $[(p \rightarrow t) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow (t \wedge s)$ merupakan tautologi

p	q	t	s	$p \rightarrow t$	$q \rightarrow s$	$p \wedge q$	$[(p \rightarrow t) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)]$	$t \wedge s$	$[(p \rightarrow t) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow (t \wedge s)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F	F	F	T

Kesimpulan:

Terbukti bahwa argument tersebut valid (benar/sah) dikarenakan pada kolom validity checking semua bernilai **true** (tautologi)

Alternatif solusi 2:

Baris	Pernyataan	Alasan
(1)	$p \wedge q$	premis
(2)	p	Simplifikasi konjungtif (1)
(3)	q	Simplifikasi konjungtif (1)
(4)	$p \rightarrow t$	premis
(5)	t	Modus ponens (2) dan (4)
(6)	$q \rightarrow s$	Premis
(7)	s	Modus ponens (3) dan (6)
(8)	$t \wedge s$	Konjungsi (5) dan (7)

2. Di sebuah kelompok baca yang berjumlah 80 orang, terdapat 37 orang yang menyukai genre romantis, 31 orang menyukai genre drama, dan 28 orang menyukai genre fantasi, x orang menyukai genre romantis dan drama, y orang menyukai genre romantis dan fantasi, serta z orang menyukai genre drama dan fantasi, serta a orang menyukai ketiga genre, diketahui $x + y + z = 9a$, $x = 2z$ dan $(x + z) / 2 = y$.

- Tentukan jumlah orang yang hanya menyukai tepat 2 genre.
- Gambarkan dalam bentuk diagram Venn

(Nilai: 25)

Jawaban:

a) A = Penyuka genre romantis

B = Penyuka genre drama

C = Penyuka genre fantasi

$$|A| = 37, |B| = 31, |C| = 28$$

$$|A \cap B| = x$$

$$|A \cap C| = y$$

$$|B \cap C| = z$$

$$|A \cap B \cap C| = a$$

$$|A \cup B \cup C| = 80$$

$$x + y + z = 9a$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$80 = 37 + 31 + 28 - x - y - z + a$$

$$80 = 96 - x - y - z + a$$

$$80 + x + y + z - a = 96$$

$$80 + 9a - a = 96$$

$$8a = 16$$

$$a = 2$$

$$|A \cap B \cap C| = 2 \text{ dan } |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 18$$

$$\text{Tepat 2 genre} = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C|$$

$$= 18 - 3(2)$$

$$= 12$$

b) $x + y + z = 18$

$$2x + x + z + 2z = 36$$

$$3x + 3z = 36$$

$$x + z = 12$$

$$3z = 12$$

$$z = |B \cap C| = 4$$

$$x = |A \cap B| = 8$$

$$y = |A \cap C| = 6$$

Anggota yang hanya menyukai romantis dan drama = $8 - 2 = 6$

Anggota yang hanya menyukai romantis dan fantasi = $6 - 2 = 4$

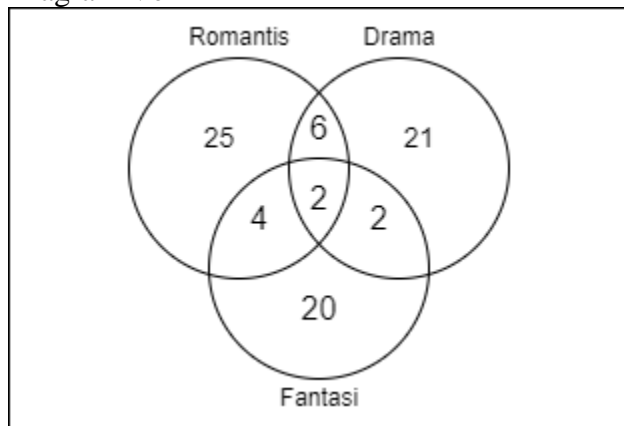
Anggota yang hanya menyukai drama dan fantasi = $4 - 2 = 2$

$$\begin{aligned} \text{Hanya menyukai genre romantis} &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 37 - 8 - 6 + 2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hanya menyukai genre drama} &= |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 31 - 8 - 4 + 2 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hanya menyukai genre fantasi} &= |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 28 - 6 - 4 + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Diagram Venn



$$\text{Jumlah anggota} = 25 + 21 + 20 + 4 + 2 + 2 + 6 = 80$$

3. Dengan menggunakan hukum-hukum himpunan dan definisi operasi, buktikan $A \cap (\overline{B \cup (A \cup \overline{B})}) = A - B$
Tuliskan pula hukum-hukum dan definisi operasi yang digunakan. **(Nilai: 20)**

Jawaban:

Jawaban:

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{B \cup (A \cup \overline{B})}) &= A \cap (\overline{B \cup (\overline{A \cap \overline{B}})}) && \text{(H. De Morgan)} \\ &= A \cap (\overline{B \cup (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}})}) && \text{(H. Involusi)} \\ &= A \cap ((\overline{B \cup \overline{A}}) \cap (\overline{\overline{B \cup B}})) && \text{(H. Distributif)} \\ &= A \cap ((\overline{B \cup \overline{A}}) \cap U) && \text{(H. Komplemen)} \\ &= A \cap (\overline{B \cup \overline{A}}) && \text{(H. Identitas)} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{\overline{A}}) && \text{(H. Distributif)} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset && \text{(H. Komplemen)} \\ &= A \cap \overline{B} && \text{(H. Identitas)} \\ &= A - B \quad \text{(terbukti)} && \text{(Definisi Operasi Selisih)} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{B \cup (A \cup \overline{B})}) &= A \cap \overline{(B \cap (A \cup \overline{B}))} && \text{(H. De Morgan)} \\ &= A \cap \overline{((B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}))} && \text{(H. Distributif)} \\ &= A \cap \overline{(B \cap A) \cup \emptyset} && \text{(H. Komplemen)} \\ &= A \cap \overline{(B \cap A)} && \text{(H. Identitas)} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) && \text{(H. De Morgan)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{A}) && \text{(H. Distribusi)} \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset && \text{(H. Komplemen)} \\
&= A \cap \bar{B} && \text{(H. Identitas)} \\
&= A - B && \text{(terbukti) (Definisi Operasi Selisih)}
\end{aligned}$$

4. Ciko adalah anak **ketiga** dari **lima** bersaudara. Kakak tertua Ciko berusia 10 tahun, dan terdapat selisih usia 2 tahun di antara setiap saudara berikutnya. Karena Ciko sangat menyukai Matematika Diskrit, Ia membuat relasi yang menghubungkan usia masing-masing saudaranya ke saudara lain yang usianya tepat dua kali lebih tua, jika memungkinkan. Jika tidak ada saudara yang usianya dua kali saudara yang lain, maka usia tersebut dihubungkan dengan usia itu sendiri. Setelah memperoleh relasi tersebut, didapati bahwa relasi ini belum memenuhi sifat **relasi kesetaraan** (relasi ekuivalen). Bantulah Ciko mencari relasi terkecil yang memenuhi sifat tersebut dengan tetap mengandung relasi mula-mula! Jelaskan relasi awal, relasi akhir, serta langkah-langkah untuk mendapatkannya sesuai dengan salindia kuliah. (Petunjuk: mulai dengan menuliskan terlebih dahulu himpunan usia 5 bersaudara)

(Nilai: 25)

Jawaban:

Asumsi: Ciko tidak termasuk ke dalam himpunan

$$A = \{2, 4, 8, 10\}$$

$$R = \{(2,4), (4,8), (8,8), (10,10)\}$$

Relasi kesetaraan (refleksif, setangkup, menghantar)

Langkah 1: Klosur refleksif

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$$\Delta = \{(2,2), (4,4), (8,8), (10,10)\}$$

$$R^* = R \cup \Delta = \{(2,4), (4,8), (8,8), (10,10), \mathbf{(2,2)}, \mathbf{(4,4)}\}$$

Langkah 2: Klosur setangkup

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(4,2), (8,4), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4)\}$$

$$R^* = R \cup R^{-1} = \{(2,4), (4,8), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4), \mathbf{(4,2)}, \mathbf{(8,4)}\}$$

Langkah 3: Klosur menghantar

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$$

Karena,

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan, } M_R^{[4]} = M_R^{[3]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$R^* = \{(2,4), (4,8), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4), (4,2), (8,4), \mathbf{(2,8)}, \mathbf{(8,2)}\}$$

Diperoleh relasi akhir,

$$R = \{(2,2), (4,4), (8,8), (10,10), (2,4), (4,2), (2,8), (8,2), (4,8), (8,4)\}$$

Jawaban Versi 5x5:

Asumsi 2: Ciko termasuk ke dalam himpunan asal

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$R = \{(2,4), (4,8), (6,6), (8,8), (10,10)\}$$

Relasi kesetaraan (refleksif, setangkup, menghantar)

Langkah 1: Klosur refleksif

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$$\Delta = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8), (10,10)\}$$

$$R^* = R \cup \Delta = \{(2,4), (4,8), (6,6), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4)\}$$

Langkah 2: Klosur setangkup

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(4,2), (8,4), (6,6), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4)\}$$

$$R^* = R \cup R^{-1} = \{(2,4), (4,8), (6,6), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4), (4,2), (8,4)\}$$

Langkah 3: Klosur menghantar

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]} \vee M_R^{[5]}$$

Karena,

$$M_R^{[2]} = M_R^{[3]} = M_R^{[4]} = M_R^{[5]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$R^* = \{(2,4), (4,8), (6,6), (8,8), (10,10), (2,2), (4,4), (4,2), (8,4), (2,8), (8,2)\}$$

Diperoleh relasi akhir,

$$R = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8), (10,10), (2,4), (4,2), (2,8), (8,2), (4,8), (8,4)\}$$

5. Jika $f_A(x) = 0.5x$, $f_B(x) = x - 40$, dan $f_C(x) = 0.7x$, tentukan komposisi fungsi $f_A \circ f_B \circ f_C$

(Nilai: 10)

Jawaban:

$$f_A \circ f_B \circ f_C = f_A(f_B(f_C(x))) = 0.5((0.7x) - 40) = 0.35x - 20$$