

Kompleksitas Algoritma (Bagian 1)

Bahan Kuliah

(Update 2024)

IF1220 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Rinaldi M/IF1220 Matdis

```
for (i = 1; i <= n, i++) {  
    for (j = 1; j <= n; j++) {  
        for (k = 1; k <= j; k++) {  
            p = p * 20 * z;  
        }  
    }  
}
```

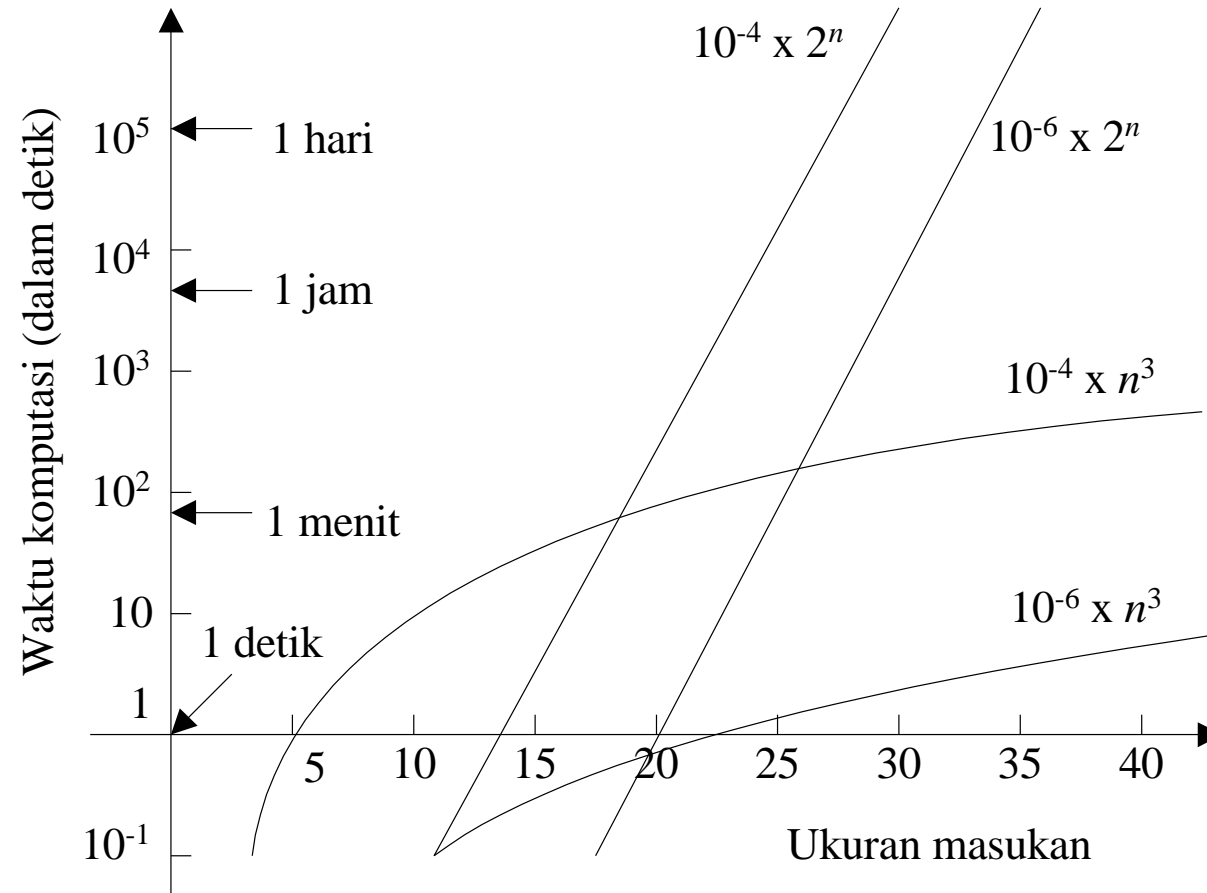


Pendahuluan

- Sebuah algoritma tidak saja harus benar (sesuai spesifikasi persoalan), tetapi juga harus sangkil (*efisien*).
- Algoritma yang bagus adalah algoritma yang sangkil (*efficient*).
- Kesangkilan algoritma diukur dari waktu (*time*) yang diperlukan untuk menjalankan algoritma dan ruang (*space*) memori yang dibutuhkan oleh algoritma tersebut.
- Algoritma yang sangkil ialah algoritma yang **meminimumkan** kebutuhan waktu dan ruang memori.

- Kebutuhan waktu dan ruang memori suatu algoritma bergantung pada ukuran masukan (n), yang menyatakan ukuran data yang diproses oleh algoritma.
- Kesanggupan algoritma dapat digunakan untuk menilai algoritma yang bagus dari sejumlah algoritma penyelesaian persoalan.
- Sebab, sebuah persoalan dapat memiliki banyak algoritma penyelesaian. Contoh: persoalan pengurutan (*sort*), ada puluhan algoritma pengurutan (*selection sort*, *insertion sort*, *bubble sort*, dll).

- Mengapa kita memerlukan algoritma yang sangkil? Lihat grafik di bawah ini.



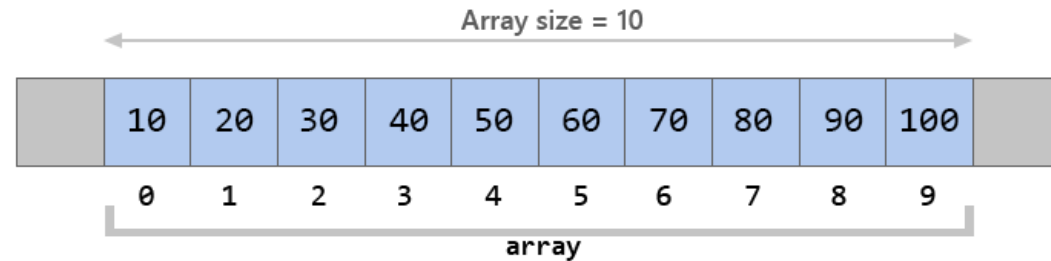
Model Perhitungan Kebutuhan Waktu

- Menghitung kebutuhan waktu algoritma dengan mengukur waktu eksekusi riilnya (dalam satuan detik atau mikrodetik) saat program (yang merepresentasikan sebuah algoritma) dijalankan oleh komputer bukanlah cara yang tepat.
- Alasan:
 1. Setiap komputer dengan arsitektur berbeda memiliki bahasa mesin yang berbeda → akibatnya, waktu setiap operasi antara satu komputer dengan komputer lain tidak sama.
 2. *Compiler* bahasa pemrograman yang berbeda menghasilkan kode bahasa mesin yang berbeda → akibatnya, waktu setiap operasi antara *compiler* dengan *compiler* lain tidak sama.

- Model abstrak pengukuran waktu/ruang memori algoritma harus independen dari pertimbangan mesin (*computer*) dan *compiler* apapun.
- Besaran yang dipakai untuk menerangkan model abstrak pengukuran waktu/ruang ini adalah **kompleksitas algoritma**.
- Ada dua macam kompleksitas algoritma, yaitu: **kompleksitas waktu** (*time complexity*) dan **kompleksitas ruang** (*space complexity*).

- Kompleksitas waktu, $T(n)$, diukur dari jumlah tahapan komputasi yang dilakukan di dalam algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n .
- Kompleksitas ruang, $S(n)$, diukur dari memori yang digunakan oleh struktur data yang terdapat di dalam algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n .
- Dengan menggunakan besaran kompleksitas waktu/ruang algoritma, kita dapat menentukan *laju* peningkatan waktu (ruang) yang diperlukan algoritma dengan meningkatnya ukuran masukan n .
- Di dalam kuliah ini kita hanya membatasi bahasan kompleksitas waktu saja, karena dua alasan:
 1. Materi struktur data diluar lingkup mata kuliah matematika diskrit
 2. Saat ini memori komputer bukan persoalan yang kritis dibandingkan waktu

- Ukuran masukan (n) menyatakan banyaknya data yang diproses oleh sebuah algoritma.



Contoh:

1. algoritma pengurutan 10 elemen larik (*array*), maka $n = 10$.
 2. algoritma pencarian pada 500 elemen larik, maka $n = 500$
 3. algoritma *TSP* pada sebuah graf lengkap dengan 100 simpul, maka $n = 100$.
 4. algoritma perkalian 2 buah matriks berukuran 50×50 , maka $n = 50$.
 5. algoritma menghitung polinom dengan derajat ≤ 100 , maka $n = 100$
- Dalam perhitungan kompleksitas waktu, ukuran masukan dinyatakan sebagai variabel n saja (bukan instans suatu nilai).

Kompleksitas Waktu

- Pekerjaan utama di dalam kompleksitas waktu adalah menghitung (*counting*) jumlah tahapan komputasi di dalam algoritma .
- Jumlah tahapan komputasi dihitung dari berapa kali suatu operasi dilakukan sebagai fungsi ukuran masukan (n).
- Di dalam sebuah algoritma terdapat banyak jenis operasi:
 - Operasi baca/tulis (contoh: input a, print a)
 - Operasi aritmetika (+, -, *, /) (contoh: $a + b$, $M * N$)
 - Operasi pengisian nilai (*assignment*) (contoh: $a \leftarrow 10$)
 - Operasi perbandingan (contoh: $a < b$, $k \geq 10$)
 - Operasi pengaksesan elemen larik, pemanggilan prosedur/fungsi, dll
- Untuk menyederhanakan perhitungan, kita tidak menghitung semua jenis operasi yang ada di dalam sebuah algoritma, tetapi kita hanya focus menghitung jumlah operasi yang khas (tipikal) yang *mendasari* algoritma tersebut.

Contoh operasi khas di dalam algoritma

- Algoritma pencarian (*searching*)
Operasi khas: operasi perbandingan elemen larik



- Algoritma pengurutan (*sorting*)
Operasi khas: operasi perbandingan elemen dan operasi pertukaran elemen

- Algoritma perkalian dua buah matriks $AB = C$
Operasi khas: operasi perkalian dan penjumlahan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10 + 2 \times 20 + 3 \times 30 & 1 \times 11 + 2 \times 21 + 3 \times 31 \\ 4 \times 10 + 5 \times 20 + 6 \times 30 & 4 \times 11 + 5 \times 21 + 6 \times 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 40 + 90 & 11 + 42 + 93 \\ 40 + 100 + 180 & 44 + 105 + 186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix}$$

- Algoritma menghitung nilai sebuah polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
Operasi khas: operasi perkalian dan penjumlahan

Contoh 1. Tinjau algoritma menghitung rerata elemen di dalam sebuah larik (*array*) $a[1..n]$.

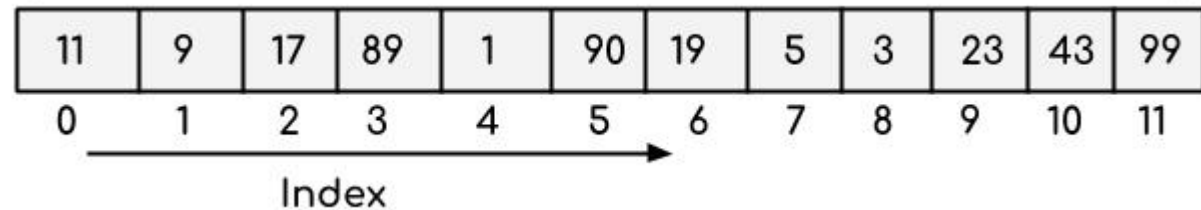
$sum \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$sum \leftarrow sum + a[i]$

endfor

$rata_rata \leftarrow sum/n$



- Operasi yang mendasar pada algoritma tersebut adalah operasi penjumlahan elemen-elemen larik (yaitu $sum \leftarrow sum + a[i]$) yang dilakukan sebanyak n kali.
- Kompleksitas waktu: $T(n) = n$.

Contoh 2. Algoritma untuk mencari elemen terbesar di dalam sebuah larik (*array*) yang berukuran n elemen.

```
procedure CariElemenTerbesar(input  $a_1, a_2, \dots, a_n$  : integer, output  $maks$  : integer)
```

```
{ Mencari elemen terbesar dari sekumpulan elemen larik integer  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
```

```
  Luaran prosedur, yaitu elemen terbesar, disimpan di dalam  $maks$ . }
```

Kamus

k : **integer**

Algoritma

```
 $maks \leftarrow a_1$ 
```

```
 $k \leftarrow 2$ 
```

```
while  $k \leq n$  do
```

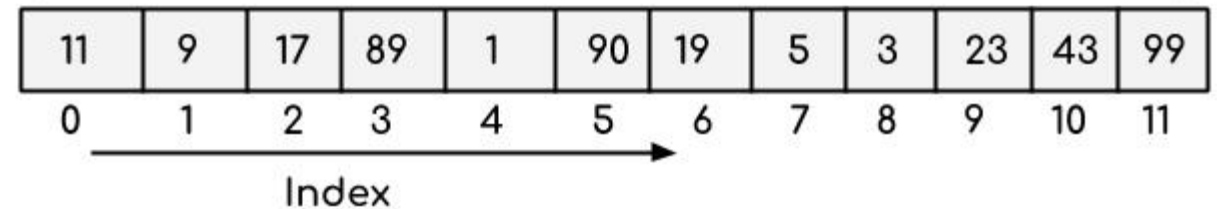
```
  if  $a_k > maks$  then
```

```
     $maks \leftarrow a_k$ 
```

```
  endif
```

```
   $k \leftarrow k + 1$ 
```

```
endwhile
```



Kompleksitas waktu algoritma dihitung dari jumlah operasi perbandingan elemen larik ($a_k > maks$).

Kompleksitas waktu *CariElemenTerbesar* : $T(n) = n - 1$.

Kompleksitas waktu dibedakan atas tiga macam :

1. $T_{max}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terburuk (*worst case*),
→ kebutuhan waktu maksimum.
2. $T_{min}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terbaik (*best case*),
→ kebutuhan waktu minimum.
3. $T_{avg}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus rata-rata (*average case*)
→ kebutuhan waktu secara rata-rata

Contoh 3. Algoritma *sequential search* (*linear search*)

procedure PencarianBeruntun(**input** a_1, a_2, \dots, a_n : **integer**, x : **integer**, **output** idx : **integer**)

{ Mencari elemen x di dalam larik a yang berisi n elemen. Jika x ditemukan, maka indeks elemen larik disimpan di dalam idx , idx bernilai -1 jika x tidak ditemukan

Kamus

k : **integer**

$ketemu$: **boolean** { bernilai *true* jika x ditemukan atau *false* jika x tidak ditemukan }

Algoritma:

$k \leftarrow 1$

$ketemu \leftarrow \text{false}$

while ($k \leq n$) **and** (**not** $ketemu$) **do**

if $a_k = x$ **then**

$ketemu \leftarrow \text{true}$

else

$k \leftarrow k + 1$

endif

endwhile

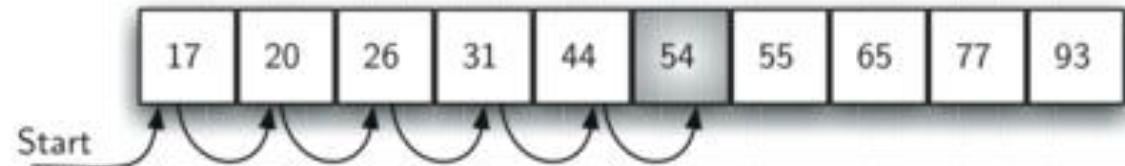
if $ketemu$ **then** { x ditemukan }

$idx \leftarrow k$

else

$idx \leftarrow -1$ { x tidak ditemukan }

endif



Jumlah operasi perbandingan elemen tabel:

1. *Kasus terbaik*: ini terjadi bila $a_1 = x$.

$$T_{\min}(n) = 1$$

2. *Kasus terburuk*: bila $a_n = x$ atau x tidak ditemukan.

$$T_{\max}(n) = n$$

3. *Kasus rata-rata*: Jika x ditemukan pada posisi ke- j , maka operasi perbandingan ($a_k = x$) akan dieksekusi sebanyak j kali.

$$T_{\text{avg}}(n) = \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(1 + n)}{n} = \frac{(n + 1)}{2}$$

Cara lain: asumsikan bahwa $P(a_j = x) = 1/n$. Jika $a_j = x$ maka T_j yang dibutuhkan adalah $T_j = j$. Jumlah perbandingan elemen larik rata-rata:

$$\begin{aligned} T_{\text{avg}}(n) &= \sum_{j=1}^n T_j P(a[j] = x) = \sum_{j=1}^n T_j \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Contoh 4: Algoritma pengurutan seleksi (*selection sort*)

procedure *SelectionSort*(**input/output** a_1, a_2, \dots, a_n : **integer**)

{ Mengurutkan elemen-elemen larik a yang berisi n elemen integer sehingga terurut menaik }

Kamus

$i, j, imin, temp$: **integer**

Algoritma

for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do** { *pass sebanyak $n - 1$ kali* }

$imin \leftarrow i$

for $j \leftarrow i + 1$ **to** n **do**

if $a_j < a_{imin}$ **then**

$imin \leftarrow j$

endif

endfor

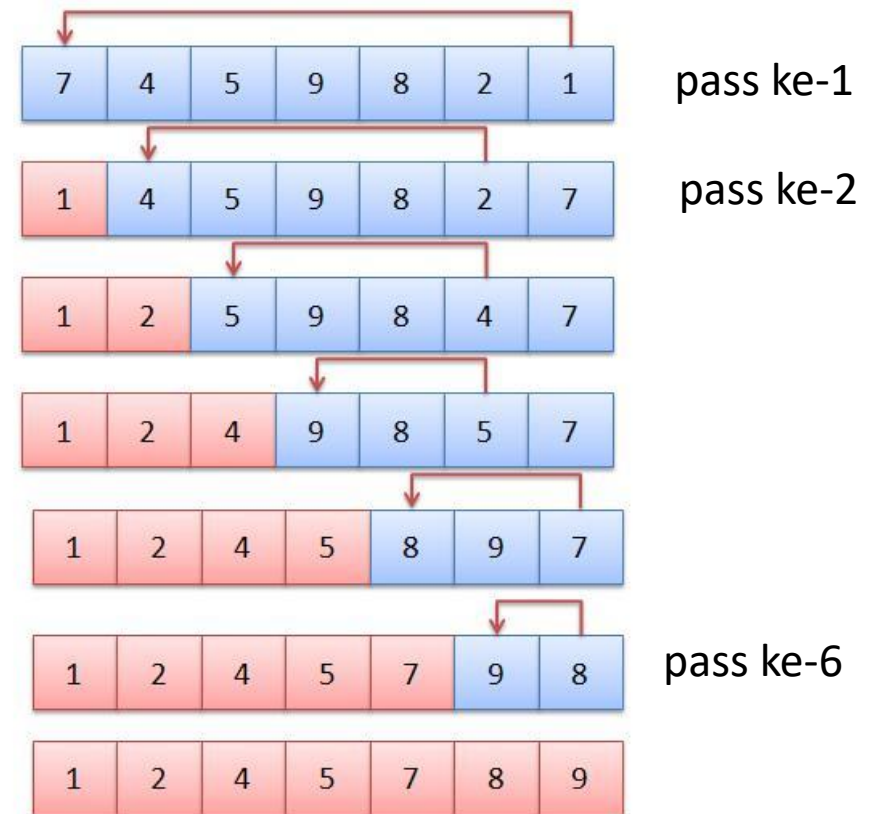
{ *pertukarkan a_{imin} dengan a_i* }

$temp \leftarrow a_i$

$a_i \leftarrow a_{imin}$

$a_{imin} \leftarrow temp$

endfor



(i) Jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik ($a_j < a_{imin}$)

Cara ke-1:

Untuk setiap *pass* ke-*i*,

$i = 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 1$

$i = 2 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 2$

$i = 3 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 3$

\vdots

$i = n - 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan = 1

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do { pass sebanyak  $n - 1$  kali }
   $imin \leftarrow i$ 
  for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
    if  $a_j < a_{imin}$  then
       $imin \leftarrow j$ 
    endif
  endfor
  { pertukarkan  $a_{imin}$  dengan  $a_i$  }
   $temp \leftarrow a_i$ 
   $a_i \leftarrow a_{imin}$ 
   $a_{imin} \leftarrow temp$ 
endfor
```

Jumlah seluruh operasi perbandingan elemen-elemen larik adalah

$$T(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ini adalah kompleksitas waktu untuk kasus terbaik dan terburuk, karena algoritma *SelectionSort* tidak bergantung pada apakah data masukannya sudah terurut atau acak.

Cara ke-2 (gunakan sumasi):

Ini adalah kalang bersarang (*nested loop*). Pada kalang terdalam dihitung **satu** kali operasi perbandingan pada setiap iterasi. Iterasinya dari $j = i + 1$ sampai n (yaitu sebanyak $n - (i+1) + 1$ kali = $n - i$ kali). Kalang terluar iterasinya dari $i=1$ sampai $n - 1$, yaitu sebanyak $n - 1$ kali, maka

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} n - i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n^2 - 2n - n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

(ii) Jumlah operasi pertukaran

Untuk setiap i dari 1 sampai $n - 1$, terjadi satu kali pertukaran elemen, sehingga jumlah operasi pertukaran seluruhnya adalah

$$T(n) = n - 1.$$

Ini adalah jumlah pertukaran untuk semua kasus.

Jadi, algoritma pengurutan seleksi membutuhkan $n(n - 1)/2$ buah operasi perbandingan elemen dan $n - 1$ buah operasi pertukaran.

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do { pass sebanyak  $n - 1$  kali }
   $i_{min} \leftarrow i$ 
  for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
    if  $a_j < a_{i_{min}}$  then
       $i_{min} \leftarrow j$ 
    endif
  endfor
  { pertukarkan  $a_{i_{min}}$  dengan  $a_i$  }
   $temp \leftarrow a_i$ 
   $a_i \leftarrow a_{i_{min}}$ 
   $a_{i_{min}} \leftarrow temp$ 
endfor
```

Contoh 5: Diberikan algoritma pengurutan *bubble-sort* seperti berikut ini. Hitung kompleksitas waktu algoritma didasarkan pada jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik dan jumlah operasi pertukaran.

```

procedure BubbleSort(input/output  $a[1..n]$  : integer)
  { Mengurut larik A yang berisi  $n$  elemen integer sehingga terurut menaik }

```

Kamus

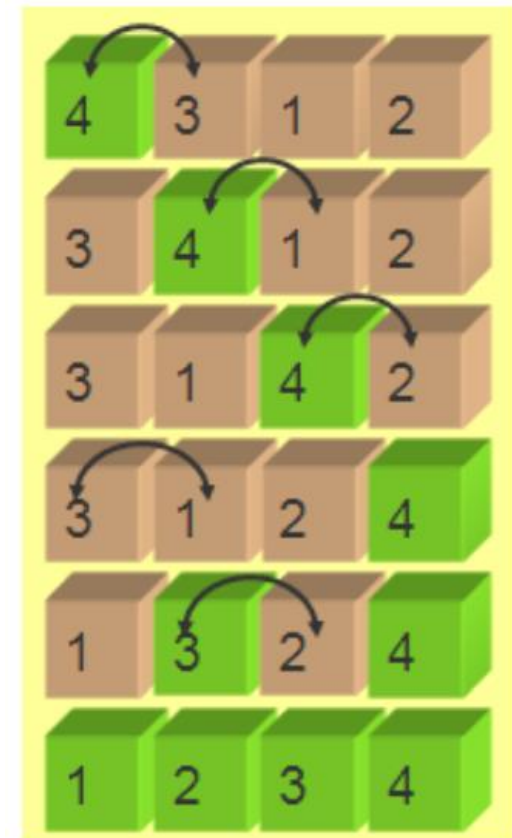
$i, j, temp$: **integer**

Algoritma

```

for  $i \leftarrow n - 1$  downto 1 do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do
    if  $a_{j+1} < a_j$  then
      { pertukarkan  $a_j$  dengan  $a_{j+1}$  }
       $temp \leftarrow a_j$ 
       $a_j \leftarrow a_{j+1}$ 
       $a_{j+1} \leftarrow temp$ 
    endif
  endfor
endfor

```



(i) Jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik ($a_{j+1} < a_j$)

Untuk setiap *pass* ke-*i*,

$i = n - 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 1$

$i = n - 2 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 2$

$i = n - 3 \rightarrow$ jumlah perbandingan = $n - 3$

\vdots

$i = 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan = 1

```
for  $i \leftarrow n - 1$  downto 1 do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do
    if  $a_{j+1} < a_j$  then
      { pertukarkan  $a_j$  dengan  $a_{j+1}$  }
       $temp \leftarrow a_j$ 
       $a_j \leftarrow a_{j+1}$ 
       $a_{j+1} \leftarrow temp$ 
    endif
  endfor
endfor
```

Jumlah seluruh operasi perbandingan elemen-elemen larik adalah

$$T(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ini adalah kompleksitas waktu untuk kasus terbaik dan terburuk, karena algoritma *BubbleSort* tidak bergantung pada apakah data masukannya sudah terurut atau acak. Jumlah operasi perbandingan sama dengan *selection sort*.

(ii) Jumlah operasi pertukaran ($temp \leftarrow a_i ; a_i \leftarrow a_{imin} ; a_{imin} \leftarrow temp$)

Jumlah operasi pertukaran di dalam *bubble sort* hanya dapat dihitung pada kasus terbaik dan kasus terburuk. Kasus terbaik adalah tidak ada pertukaran (yaitu jika **if** $a_{j+1} < a_j$ false), yaitu semua elemen larik pada awalnya sudah terurut menaik, sehingga

$$T_{min}(n) = 0.$$

Pada kasus terburuk, (yaitu jika **if** $a_{j+1} < a_j$ bernilai true), pertukaran elemen selalu dilakukan. Jadi, jumlah operasi pertukaran elemen pada kasus terburuk sama dengan jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik, yaitu

$$T_{max}(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Jadi, algoritma pengurutan *bubble sort* membutuhkan $n(n - 1)/2$ buah operasi pertukaran, lebih banyak daripada algoritma *selection sort*. Ini berarti secara keseluruhan *bubble sort* lebih buruk daripada *selection sort*.

Latihan 1

Hitung kompleksitas waktu algoritma berikut berdasarkan jumlah operasi perkalian.

procedure *Kali*(**input** x : **integer**, n : **integer**, **output** *jumlah* : **integer**)

{Mengalikan x dengan $i = 1, 2, \dots, j$, yang dalam hal ini $j = n, n/2, n/4, \dots, 1$. Hasil perkalian disimpan di dalam peubah jumlah. }

Kamus

i, j, k : **integer**

Algoritma

$j \leftarrow n$

while $j \geq 1$ **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** j **do**

$x \leftarrow x * i$

endfor

$j \leftarrow j \text{ div } 2$

endwhile

$jumlah \leftarrow x$

Jawaban

Untuk

$j = n$, jumlah operasi perkalian = n

$j = n/2$, jumlah operasi perkalian = $n/2$

$j = n/4$, jumlah operasi perkalian = $n/4$

...

$j = 1$, jumlah operasi perkalian = 1

Jumlah operasi perkalian seluruhnya adalah

= $n + n/2 + n/4 + \dots + 2 + 1 \rightarrow$ deret geometri

$$= \frac{n(1 - 2^{-2^{\log n - 1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 2n - 1$$

```
 $j \leftarrow n$   
while  $j \geq 1$  do  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $j$  do  
     $x \leftarrow x * i$   
  endfor  
   $j \leftarrow j \text{ div } 2$   
endwhile  
 $jumlah \leftarrow x$ 
```

Latihan 2

Di bawah ini adalah algoritma untuk menguji apakah dua buah matriks, A dan B , yang masing-masing berukuran $n \times n$, sama.

function *samaMatriks*($A, B : \text{matriks}; n : \text{integer}$) \rightarrow *boolean*
{ *true* jika A dan B sama; sebaliknya *false* jika $A \neq B$ }

Kamus

$i, j : \text{integer}$

Algoritma:

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
    if  $A_{i,j} \neq B_{i,j}$  then
      return false
    endif
  endfor
endfor
return true
```

- Apa kasus terbaik dan terburuk untuk algoritma di atas?
- Tentukan kompleksitas waktu terbaik dan terburuknya.

Jawaban:

(a) Kasus terbaik terjadi jika ketidaksamaan matriks ditemukan pada elemen pertama ($A_{1,1} \neq B_{1,1}$)

Kasus terburuk terjadi jika ketidaksamaan matriks ditemukan pada elemen ujung kanan bawah ($A_{n,n} \neq B_{n,n}$) atau pada kasus matriks A dan B sama, sehingga seluruh elemen matriks dibandingkan.

(b) $T_{\min}(n) = 1$

$$T_{\max}(n) = n^2$$

Latihan Mandiri

1. Diberikan matriks persegi berukuran $n \times n$. Hitung kompleksitas waktu untuk memeriksa apakah matriks tersebut merupakan matriks simetri terhadap diagonal utama.
2. Berapa kompleksitas waktu untuk menjumlahkan matriks A dan B yang keduanya berukuran $n \times n$?
3. Ulangi soal 2 untuk perkalian matriks A dan B.
4. Tulislah algoritma pengurutan *insertion sort* pada larik yang berukuran n elemen, hitung masing-masing kompleksitas waktu algoritma diukur dari jumlah operasi perbandingan dan jumlah operasi pertukaran elemen-elemen larik.

5. Berapa kali operasi penjumlahan pada potongan algoritma ini dilakukan?

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do  
        for  $k \leftarrow 1$  to  $j$  do  
             $x \leftarrow x + 1$   
        endfor  
    endfor  
endfor
```

6. Algoritma di bawah ini menghitung nilai polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

function $p(\text{input } x:\text{real}) \rightarrow \text{real}$

{ Mengembalikan nilai $p(x)$ }

Kamus

j, k : **integer**

$\text{jumlah}, \text{suku}$: **real**

Algoritma

$\text{jumlah} \leftarrow a_0$

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

{ hitung a_jx^j }

$\text{suku} \leftarrow a_j$

for $k \leftarrow 1$ **to** j **do**

$\text{suku} \leftarrow \text{suku} * x$

endfor

$\text{jumlah} \leftarrow \text{jumlah} + \text{suku}$

endfor

return jumlah

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma tsb

Algoritma menghitung polinom yang lebih baik dapat dibuat dengan metode Horner berikut: $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{n-1} + a_n x))))$

```
function p2(input x:real)→real
{ Mengembalikan nilai p(x) dengan metode Horner}
Kamus
  k : integer
  b1, b2, ..., bn : real
Algoritma
  bn ← an
  for k ← n - 1 downto 0 do
    bk ← ak + bk+1 * x
  endfor
  return b0
```

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma di atas? Manakah yang terbaik, algoritma p atau $p2$?

Bersambung ke Bagian 2