Bahan kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 2 - Update 2024)

Oleh: Rinaldi Munir

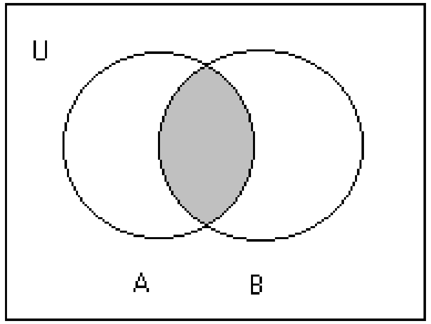
Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



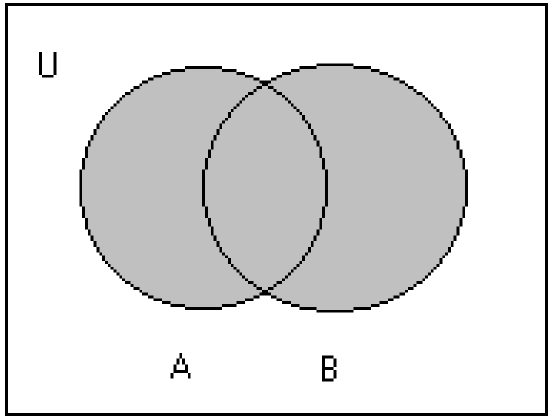
Contoh 14.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: $A \mathbin{//} B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



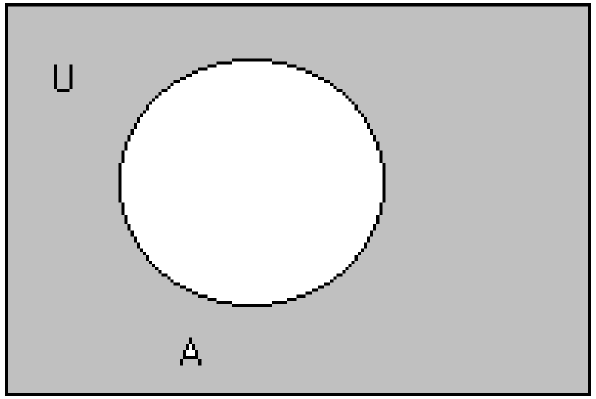
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



(Keterangan: $\overline{A}$ sering ditulis juga dengan notasi A^C atau A')

Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

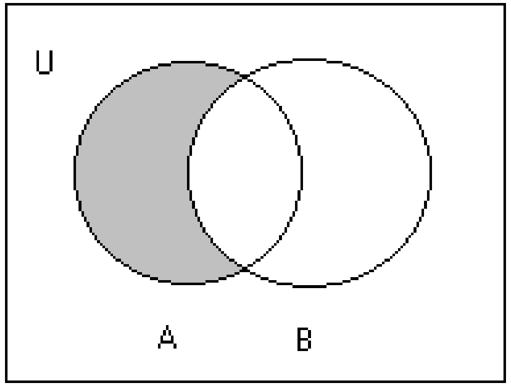
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



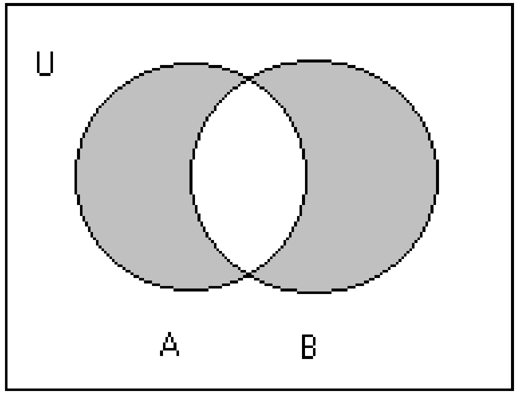
Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.
Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

Latihan

Misalkan X adalah himpunan mahasiswa IF, Y adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit (Matdis), dan Z adalah mahasiswa yang menyukai mata kuliah Matdis. Buatlah ekspresi matematika himpunan dari pernyataan berikut dalam istilah X, Y, dan Z.

a. Himpunan mahasiswa IF yang tidak menyukai kuliah Matdis
b. Himpunan mahasiswa IF yang tidak mengambil kuliah Matdis tetapi menyukainya
c. Himpunan mahasiswa ITB bukan IF yang mengambil kuliah Matdis atau menyukai kuliah Matdis
d. Himpunan mahasiswa ITB yang bukan merupakan mahasiswa IF atau yang tidak mengambil kuliah Matdis atau yang tidak menyukai kuliah Matdis

Jawaban:

a) $X - Z$

b) (X – Y) $\cap Z$ atau $X \cap \bar{Y} \cap Z$

c) $(\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Z)$

d) $\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z}$ atau $\overline{X \cap Y \cap Z}$

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $\left| A \times B \right| = \left| A \right| \, . \, \left| B \right|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

5. Perkalian kartesian dari dua himpunan atau lebih didefinisikan sebagai: $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n = \{(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n) \mid \mathrm{a}_i \in \mathrm{A}_i \text{ for } 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 22. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\emptyset)$ (b) $\emptyset \times P(\emptyset)$ (c) $\{\emptyset\}\times P(\emptyset)$ (d) $P(P(\{3\}))$

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(b) $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$ (ket: jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = \emptyset$)

(c) $\{\emptyset\}\times P(\emptyset) = \{\emptyset\}\times \{\emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \emptyset, \{3\} \}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\} \}$

Latihan

Misalkan X dan Z merupakan himpunan pada himpunan semesta U yang tidak terukur besarnya dengan anggota masing-masing himpunan berbeda. Diketahui X dan Z saling lepas. Urutkan kardinalitas di bawah ini secara terurut membesar:

- $| P(X \cap Z) |$
- $| X – Z |$
- $| X \oplus Z |$
- $| X \cap Z |$
- $| P(X) \cup P(Z) |$
- $| \overline{P(X) \cup P(Z)} |$

Jawaban:

$| X \cap Z | \leq | P(X \cap Z) | \leq | X - Z | \leq | X \oplus Z | \leq | P(X) \cup P(Z)| \leq |\overline{P(X) \cup P(Z)}|$

Penjelasan:

- $| X \cap Z | = 0$, karena saling lepas
- $| P(X \cap Z) | = 1$, karena saling lepas dan $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $| X – Z | = |X|$
- $| X \oplus Z | = |X + Z|$ atau $|X \cup Z|$
- $| P(X) \cup P(Z) | = 2^{|X|} + 2^{|Z|}$
- $| \overline{P(X) \cup P(Z)} | = \infty - 2^{|X|} + 2^{|Z|} = \infty$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 23.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha),$
$(2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

(iii) Misalkan A = {a, b}, B = {5, 6}, C = {x, y, z}

maka, A × B × C = {(a, 5, x), (a, 5, y), (a, 5, z},
(a, 6, x), (a, 6, y), (a, 6, z),
(b, 5, x), (b, 5, y), (b, 5, z),
(b, 6, x), (b, 6, y), (b, 6, z)}

Latihan

1. Jika $A = \{a, b, \{a, c\}, \varnothing\}$ dan $B = \{a, \{a\}, d, e\}$, tentukan himpunan berikut:

   (a) $A - \varnothing$ (b) $A - \{\varnothing\}$ (c) $\{\{a, c\}\} - A$

   (d) $A \oplus B$ (e) $\{a\} - \{A\}$ (f) $P(A-B)$

   (g) $\varnothing - A$ (h) B^2 (i) $A \cup (B \cap A)$

   (j) $A \cap P(A)$

2. Diketahui A = {+, – }, B = {00, 01, 10, 11}.

   (a) Daftarkan A x B

   (b) Berapa banyak elemen A^4 dan $(A \times B)^3$?

3. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Tunjukkan bahwa
   (a) $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$
   (b) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
   (c) $(A - B) - C \subseteq A - C$

4. Apa yang dapat dikatakan tentang himpunan A dan B jika kesamaan berikut benar?
   (a) $A - B = B - A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$

5. Dapatkah disimpulkan $A = B$ jika A, B, dan C adalah himpunan sedemikian sehingga
   (a) $A \cup C = B \cup C$
   (b) $A \cap C = B \cap C$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

Pembuktian Kesamaan dengan menggunakan hukum-hukum himpunan

Contoh 24. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= A \cap \mathrm{U} && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}$$

Contoh 25. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A})$ (Definisi operasi selisih)

$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$ (Hukum distributif)

$= (A \cup B) \cap U$ (Hukum komplemen)

$= A \cup B$ (Hukum identitas)

Contoh 26. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$ (H. distributif)

$= U \cap (A \cup B)$ (H. komplemen)

$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cap B$ (H. identitas)

Latihan

Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan dan prinsip dualitas untuk menentukan hasil dari operasi himpunan berikut:

(a) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

(b) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Jawaban:

a. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$ [Hukum Asosiatif]

$= (B \cap (A \cup \overline{A})) \cup (\overline{B} \cap (A \cup \overline{A}))$ [Hukum Distributif]

$= (B \cap U) \cup (\overline{B} \cap U)$ [Hukum Komplemen]

$= U \cap (B \cup \overline{B})$ [Hukum Distributif]

$= U \cap U$ [Hukum Komplemen]

$= U$ [Hukum Idempoten]

b. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= \emptyset$ [Hukum Dualitas dari jawaban a]

Latihan. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan bahwa

$$(A - B) \cap (A - \mathrm{C}) = A - (B \cup C).$$

(Jawaban pada halaman berikut)

Jawaban:

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{(Definisi Selisih)} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{(Hukum Distributif)} \\
&= A \cap \overline{B \cup C} && \text{(Hukum DeMorgan)} \\
&= A - (B \cup C) && \text{(Definisi Selisih)}
\end{aligned}
$$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \overline{A}$ (c) $\overline{A} \oplus U$

Penyelesaian:

(a) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (\varnothing) \cup (\overline{A})$ (Definisi opearsi selisih)

$= \overline{A}$ (Hukum Identitas)

(b) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A})$ (Definisi operasi selisih)

$= A \cup \overline{A}$ (Hukum Idempoten)

$= U$ (Hukum Komplemen)

(c) $\overline{A} \oplus U = (\overline{A} \cup U) - (\overline{A} \cap U)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= U - \overline{A}$ (Hukum Null dan Hukum Identitas)

$= A$ (Definisi operasi selisih)

Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: Di AS → kemudi mobil di kiri depan
Di Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,
- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,
- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**: Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

Setir mobil di Amerika

Mobil berjalan di jalur kanan di AS

Setir mobil di Inggris/Indonesia

Mobil berjalan di jalur kiri di Indonesia

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti

$\cup \rightarrow \cap$,

$\cap \rightarrow \cup$,

$\emptyset \rightarrow$ U,

U $\rightarrow \emptyset$,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S** juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

Contoh 27. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

Tetapi, dual dari

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

tidak ada karena mengandung operasi selisih

Latihan

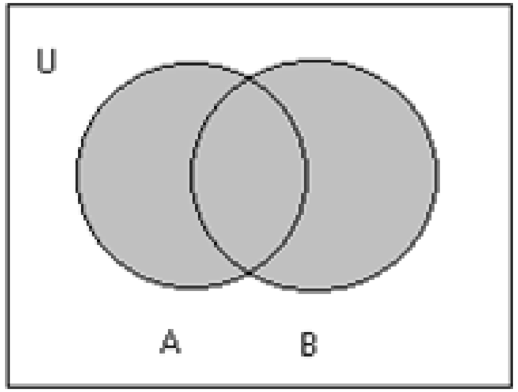
Tentukan dual dari kesamaan berikut:

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \varnothing$

(b) $(A \cap \mathbf{U}) \cap (\varnothing \cup \overline{A}) = \varnothing$

(c) $A = (\overline{B} \cap A) \cup (A \cap B)$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

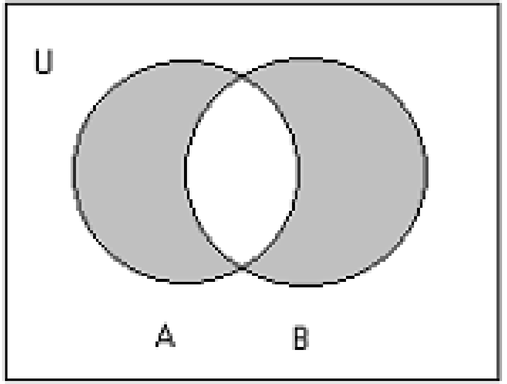


$A \cup B$

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



$A \oplus B$

Contoh 28. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

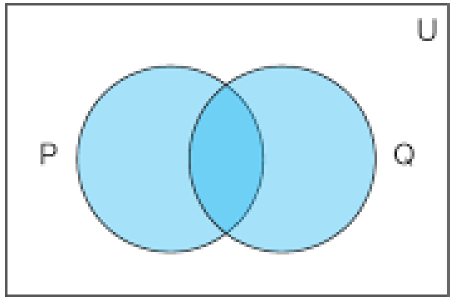
Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Contoh 29. Dari 32 orang mahasiswa yang mengumpulkan koran bekas atau botol (atau keduanya) untuk didaur ulang, 30 orang mengumpulkan koran bekas dan 14 orang mengumpulkan botol. Tentukan (a) berapa orang yang mengumpulkan keduanya? (b) berapa orang yang hanya mengumpulkan botol saja?

Jawaban:

P = himpunan mahasiswa yang mengumpulkan koran bekas

Q = himpunan mahasiswa yang mengumpulkan botol



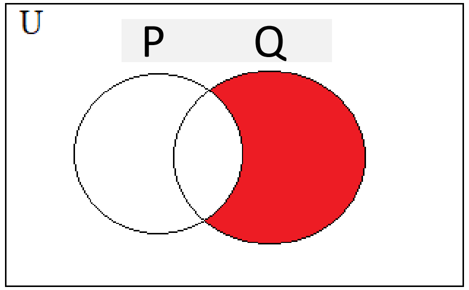
a) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$

$n(P \cap Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cup Q)$

$= 30 + 14 - 32 = 12$

b) Jumlah orang yang mengumpulkan botol saja = $n(Q) - n(P \cap Q) = 30 - 12 = 18$

(bagian yang diarsir)



Contoh 30. Sejumlah mahasiswa dalam sebuah asrama ditanya apakah mereka mempunyai kamus atau ensiklopedi di dalam kamar mereka. Hasilnya menunjukkan bahwa 650 orang memiliki kamus, 150 orang tidak memiliki kamus, 175 orang memiliki ensiklopedi, dan 50 orang tidak memiliki kamus maupun ensiklopedi.

(a) Berapa orang jumlah mahasiswa di asrama tersebut?

(b) Berapa orang mahasiswa yang memiliki keduanya (kamus dan ensiklopedi)

(c) Hanya mempunyai ensiklopedi

Jawaban:

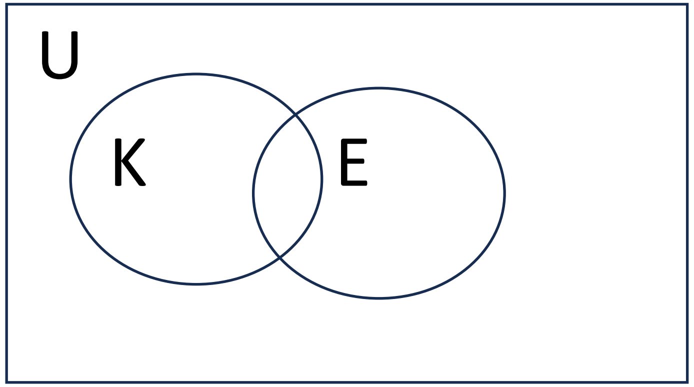
K = himpunan mahasiswa memiliki kamus, n(K) = 650

E = himpunan mahasiswa memiliki ensiklopedi , n(E) = 175

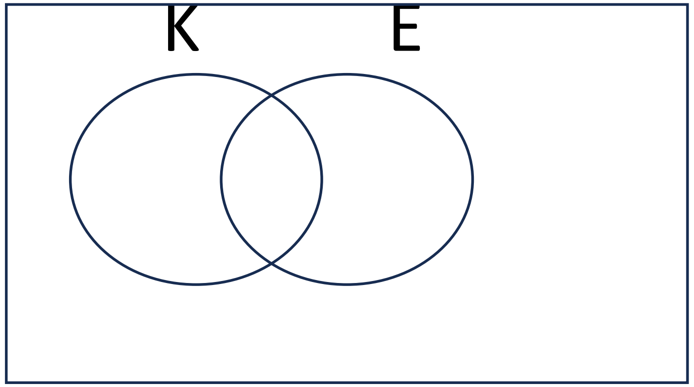
Dikethui: n(K') = 150

$n((K \cup E)') = 50$

(a) n(U) = n(K) + n(K') = 650 + 150 = 800



(b)

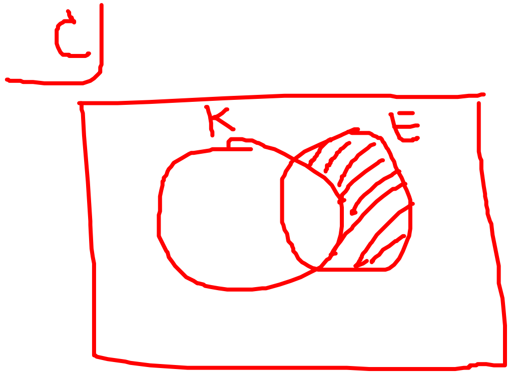


$$n(K \cup E) = n(K) + n(E) - n(K \cap E) \rightarrow n(K \cap E) = n(K) + n(E) - n(K \cup E)$$

$$n(K \cup E) = 800 - 50 = 750$$

$$n(K \cap E) = n(K) + n(E) - n(K \cup E) = 650 + 175 - 750 = 75$$

(c) $n(E\ ) - n(K \cap E) = 175 - 75 = 100$



Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$$

Untuk himpunan A_1, A_2, …, A_r, berlaku:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r\right| = \sum_{i} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i \le j \le r} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{r-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r\right|$$

Contoh 31. Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

(jawaban setelah slide ini)

Penyelesaian:
Diketahui:

$|U| = 500$
$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$
$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$
$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Latihan

- Berapakah banyak bilangan bulat di antara 1-500 (inklusif, termasuk 1 dan 500) yang dapat dibagi 7 atau 5, tetapi tidak dapat dibagi 3?

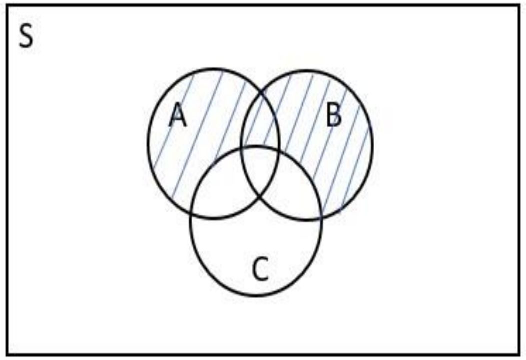
(jawaban setelah slide ini)

Penyelesaian:

Misalkan:

- S = himpunan bilangan dari 1 sampai 500
- A = himpunan bilangan bulaty dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 7
- B = himpunan bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 5
- C = himpunan bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 3

Pernyataan himpunan bilangan bulat di antara 1 dan 500 (inklusif) yang dapat dibagi 7 atau 5, tetapi tidak dapat dibagi 3 dapat digambarkan dalam diagram Venn berikut:



Dari Diagram Venn di atas, banyak bilangan bulat dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 7 atau 5, tetapi tidak habis dibagi oleh 3 didefinisikan sebagai (A U B U C) – C atau yang diarsir biru pada Diagram Venn.

n(A) = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 = $\lfloor 500/7 \rfloor$ =71

n(B) = Banyak bilangan yang habis dibagi 5 = $\lfloor 500/5 \rfloor$ = 100

n(C) = Banyak bilangan yang habis dibagi 3 = $\lfloor 500/3 \rfloor$ = 166

n(A ∩ B) = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 dan 5 = $\lfloor 500/35 \rfloor$ = 14

n(B ∩ C) = Banyak bilangan yang habis dibagi 5 dan 3 = $\lfloor 500/15 \rfloor$ = 33

n(A ∩ C) = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 dan 3 = $\lfloor 500/21 \rfloor$ = 23

n(A ∩ B ∩ C) = Banyak bilangan yang habis dibagi 7, 5, dan 3 = $\lfloor 500/105 \rfloor$ =4

Dengan prinsip eksklusi-inklusi dalam perhitungan A U B U C, maka

$$n((A \cup B \cup C)) - n(C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) - n(C)$$

$$= 71 + 100 + 166 - 14 - 33 - 23 + 4 - 166$$

$$= 105 \text{ bilangan}$$

Jadi, banyak bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 7 atau 5, tetapi tidak habis dibagi 3 adalah 105 bilangan.

Latihan

1. Hitunglah banyak bilangan ganjil antara 1 dan 1000 yang habis dibagi 13 dan tidak habis dibagi 3.
2. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 200 (termasuk 1 dan 200) yang habis dibagi 3, 5 atau 7 (3 atau 5 atau 7)?
3. Misalkan Messi adalah seseorang yang bekerja menangani sebuah database. Pada database tersebut, terdapat 300 entry (dari nomor 1 hingga 300). Suatu hari, perusahaan Messi terkena virus sehingga semua nomor entry yang mengandung angka 8 atau habis dibagi 3 menghilang. Ada berapa banyak entry yang masih tersisa pada database Messi?

Bersambung ke Bagian 3