

Materi Kuliah IF1220 Matematika Diskrit

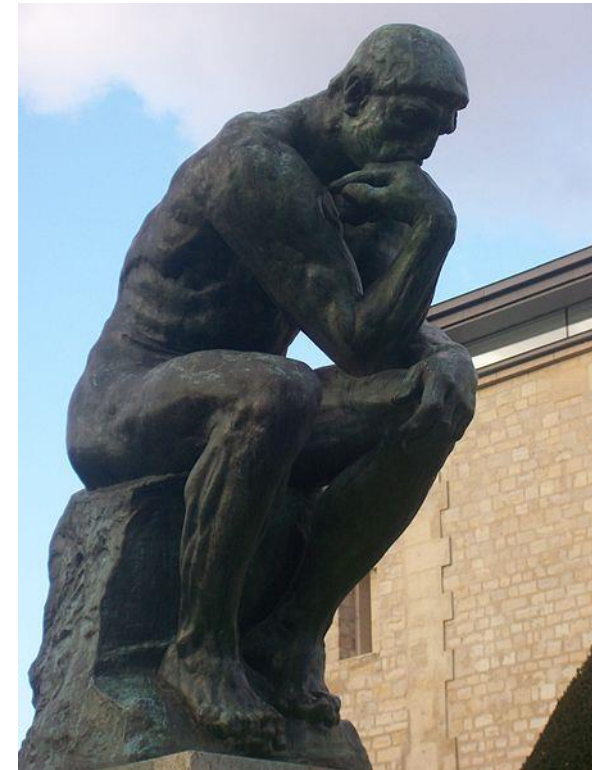
Logika (*logic*)

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB**

Logika

- Logika adalah ilmu yang membantu kita dalam berpikir dan menalar (*reasoning*)
- Menalar artinya mencapai kesimpulan dari berbagai pernyataan.



A thinker

- Perhatikan argumen di bawah ini:

*Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java.
Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika.
Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi,
anda bukan mahasiswa Informatika.*

Apakah penarikan kesimpulan dari argumen di atas valid?

Alat bantu untuk memahami argumen tsb adalah **Logika**

- Perhatikan urutan pernyataan di bawah ini:

Indra, Ical, Parry adalah sekelompok pembunuh. Mereka tertangkap dan sedang diinterogasi oleh polisi dengan *poligraph*:

Indra berkata : “Ical bersalah dan Parry tidak bersalah”

Ical berkata : “Jika indra bersalah maka Parry bersalah”

Parry berkata : “Saya tidak bersalah, tetapi Ical atau Indra bersalah”.

Tentukan siapa sajakah yang bersalah bila tes *poligraph* menunjukkan bahwa Ical telah berbohong, sementara kedua temannya mengatakan kebenaran!

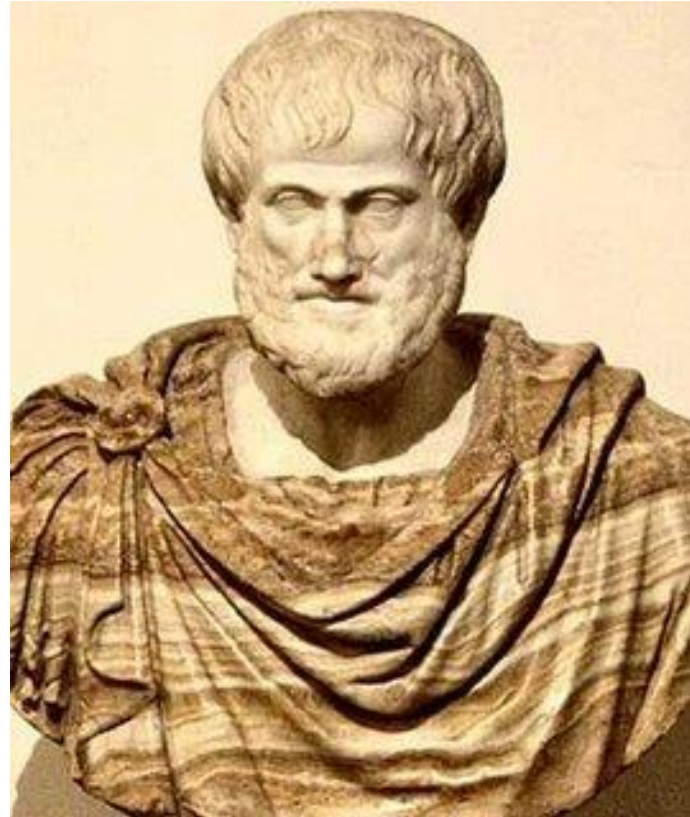
Alat bantu untuk menjawab pertanyaan ini adalah adalah **Logika**

- Banyak teorema di dalam matematika, ilmu omputer/Informatika yang membutuhkan pemahaman logika.
- Contoh:
 1. Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima **jika** $\gcd(a, b) = 1$.
 2. **Syarat cukup** graf dengan n simpul mempunyai sirkuit Hamilton adalah derajat tiap simpul $\geq n/2$.
 3. $T(n) = \Theta(f(n))$ **jika dan hanya jika** $O(f(n)) = \Omega(f(n))$.

- Bahkan, logika adalah pondasi dasar algoritma dan pemrograman.

- Contoh:

```
if x > y then
begin
    temp:=x;
    x:=y;
    y:=temp;
end;
```



Aristoteles, peletak dasar-dasar logika

Proposisi

- Logika didasarkan pada hubungan antara kalimat atau pernyataan (*statement*).
- Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang menjadi tinjauan → **proposisi**
- **Proposisi**: pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

- Contoh-contoh proposisi:

Gajah lebih besar daripada tikus (benar)

520 < 111 (salah)

Sekarang tahun 2024 dan 99 < 50 (salah)

$x + y = y + x$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$ (salah)

- Bukan proposisi:

Tolong tutup jendela itu! (kalimat perintah)

Jam berapa kuliah Matdis? (kalimat tanya)

$x > 10$ (kalimat terbuka)

$y = 2x + 5$ (kalimat terbuka)

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Contoh-contoh proposisi lainnya:

- (a) 13 adalah bilangan ganjil
- (b) Soekarno adalah alumnus UI.
- (c) $1 + 1 = 2$
- (d) $8 \geq \sqrt{8 + 8}$
- (e) Ada monyet di bulan
- (f) Hari ini adalah hari Rabu
- (g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah genap
- (h) Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh-contoh di bawah ini *bukan* proposisi

- (a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
- (b) Isilah gelas tersebut dengan air!
- (c) $x + 3 = 8$
- (d) $x > 3$

- Pernyataan yang melibatkan peubah (*variable*) disebut **predikat, kalimat terbuka**

Contoh: “ $x > 3$ ”, “ $y = x + 10$ ”

Notasi: $P(x)$, misalnya $P(x): x > 3$

- Predikat dengan *quantifier*: $\forall x P(x)$
- Materi logika di dalam kuliah Matematika Diskrit ini khusus membahas logika proposisi saja.
- Materi logika secara lebih lengkap di Teknik Informatika dibahas di dalam kuliah tersendiri, yaitu kuliah **Logika Informatika** (mencakup proposisi, predikat, inferensi, dll)

- Kembali ke proposisi
- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, \dots
- Contoh:
 - p : 13 adalah bilangan ganjil.
 - q : Soekarno adalah alumnus UGM.
 - r : $2 + 2 = 4$

Bentuk-bentuk Proposisi

- Proposisi dapat dinyatakan dalam empat bentuk:
 1. Proposisi atomik
 2. Proposisi majemuk
 3. Implikasi
 4. Bi-implikasi

Proposisi Atomik

- Proposisi tunggal
- Contoh:
 - (a) Teknik Informatika ITB dibentuk tahun 1982
 - (b) $2n$ selalu genap untuk $n=0, 1, 2, \dots$
 - (c) I'm Javanese, but I can't program using Java language
 - (d) Ibukota Maluku Utara adalah Ternate

Proposisi Majemuk

- Misalkan p dan q adalah proposisi atomik.
- Ada empat macam proposisi majemuk:
 1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q
Notasi $p \wedge q$,
 2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q
Notasi: $p \vee q$
 3. **Ingkaran** (*negation*) dari p : tidak p
Notasi: $\sim p$
 4. **Disjungsi eksklusif**: p atau q tapi bukan keduanya
Notasi: $p \oplus q$

Contoh-contoh proposisi majemuk:

p : Hari ini hujan

q : Siswa masuk sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan siswa tetap masuk sekolah

semakna dengan

(i) Hari ini hujan namun siswa masuk sekolah

(ii) Hari ini hujan tetapi siswa masuk sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan

semakna dengan

Hari ini *tidak* hujan

p : Pemilih dalam Pilkada harus berusia 17 tahun

q : Pemilih dalam Pilkada sudah menikah

$p \vee q$: Pemilih dalam Pilkada harus berusia 17 tahun atau sudah menikah

Latihan. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

- (a) Pemuda itu tinggi dan tampan
- (b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
- (c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
- (d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
- (e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
- (f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

- (a) $p \wedge q$
- (b) $p \wedge \sim q$
- (c) $\sim p \wedge \sim q$
- (d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- (e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
- (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim p$
T	F
F	T

Disjungsi Eksklusif

Kata “atau” (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. *Inclusive or*

“atau” berarti “ p atau q atau keduanya”

Contoh: “Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa C++ **atau** Java”.

2. *Exclusive or*

“atau” berarti “ p atau q tetapi bukan keduanya”.

Contoh: “Ia dihukum 5 tahun **atau** denda 10 juta”.

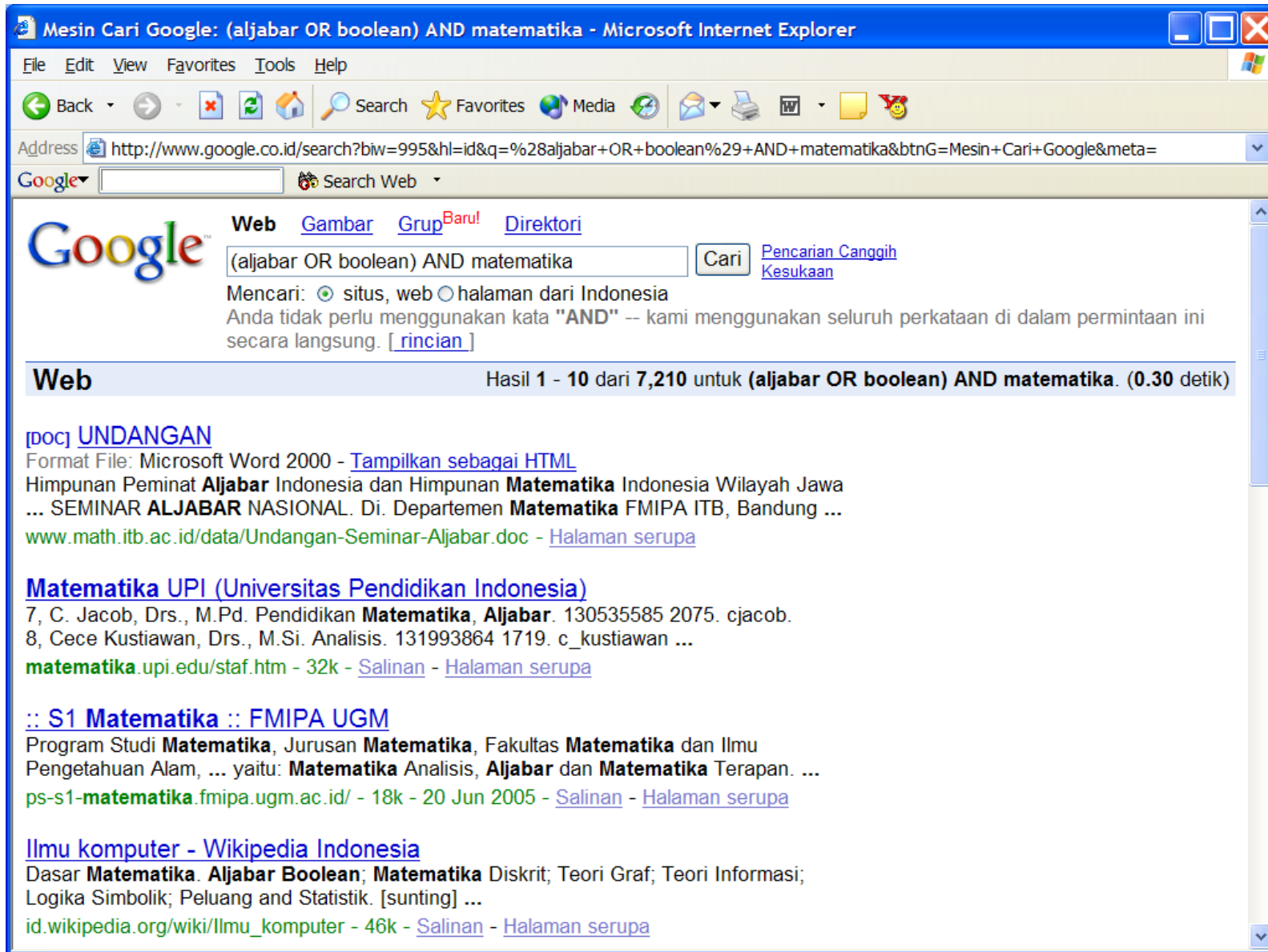
Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*

Notasi: \oplus

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Operator proposisi di dalam Google



- Nilai kebenaran proposisi majemuk dapat ditentukan dengan menggunakan “tabel kebenaran”
- Contoh proposisi majemuk: $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
- Tabel kebenaran:

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kemungkinan kasus
- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kemungkinan kasus.

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, ...)$

Contoh. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: <ul style="list-style-type: none">- $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$- $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum <i>null</i> /dominasi: <ul style="list-style-type: none">- $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$- $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: <ul style="list-style-type: none">- $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$- $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: <ul style="list-style-type: none">- $p \vee p \Leftrightarrow p$- $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): <ul style="list-style-type: none">- $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): <ul style="list-style-type: none">- $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

<p>7. Hukum komutatif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ 	<p>8. Hukum asosiatif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
<p>9. Hukum distributif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 	<p>10. Hukum De Morgan:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ - $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Latihan. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{(Hukum De Morgan)} \\ &\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum distributif)} \\ &\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum negasi)} \\ &\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Latihan. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q) && \text{(Hukum Identitas)} \\ &\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q) && \text{(Hukum distributif)} \\ &\Leftrightarrow p \vee F && \text{(Hukum Null)} \\ &\Leftrightarrow p && \text{(Hukum Identitas)} \end{aligned}$$

Latihan

Diberikan pernyataan “Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika”.

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)

(b) Berikan pernyataan yang ekuivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian

Misalkan

p : Dia belajar Algoritma

q : Dia belajar Matematika

maka,

(a) Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika:

$$\sim (p \wedge \sim q)$$

(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)

dengan kata lain: “Dia tidak belajar Algoritma atau dia belajar Matematika”

Implikasi

- Disebut juga proposisi bersyarat
- Bentuk proposisi: “jika p , maka q ”
- Notasi: $p \rightarrow q$

- p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh-contoh implikasi

- a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah motor dari Ayah
- b. Jika suhu mencapai 80°C , maka *alarm* akan berbunyi
- c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong?

Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).

∴ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

∴ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

∴ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

∴ dosen anda benar.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.
- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

“Jika $1 + 1 = 2$ maka Paris ibukota Perancis”

“Jika n bilangan bulat maka hari ini hujan”

Berbagai sintaks kalimat yang mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Jika p , maka q (*if p , then q*)
- Jika p , q (*if p , q*)
- p mengakibatkan q (*p implies q*)
- q jika p (*q if p*)
- p hanya jika q (*p only if q*)
- p syarat cukup untuk q (*p is sufficient condition for q*)
- q syarat perlu bagi p (*q is necessary condition for q*)
- q bilamana p (*q whenever p*)
- q mengikuti dari p (*q follows from p*)

Contoh. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. **Jika** hari hujan, **maka** tanaman akan tumbuh subur.
2. **Jika** tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub **mengakibatkan** permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat **jika** ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal **hanya jika** ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. **Syarat cukup** agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. **Syarat perlu** bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi **bilamana** hutan ditebangi.

Latihan.

Ubahlah proposisi di bawah ini dalam bentuk standard “jika p maka q ”:

- 1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
- 2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Jawaban

1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.”

Ingat: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** p syarat cukup untuk q

Susun sesuai format:

Percikan api dari rokok adalah syarat cukup agar pom bensin meledak.”

Identifikasi proposisi atomik:

p : Api memercik dari rokok

q : Pom bensin meledak

Notasi standard: Jika p , maka q

Jika api memercik dari rokok, maka pom bensin meledak.

2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Ingat: $p \rightarrow q$ dapat dibaca q syarat perlu untuk p

Susun sesuai format:

Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia

Identifikasi proposisi atomik:

q : Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan

p : Indonesia ikut Piala Dunia

Notasi standard: Jika p , maka q

Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan.

Latihan

Nyatakan pernyataan berikut:

“Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

dalam notasi simbolik.

Penyelesaian:

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

Format: q jika p

Susun ulang ke bentuk standard: Jika p , maka q

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

m : Anda berusia di bawah 17 tahun.

n : Anda sudah menikah.

r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$$

Latihan

Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan p : Pelayanannya baik, dan q : Tarif kamarnya murah, r : Hotelnya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):

- (a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.
- (b) Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.
- (c) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:

$$(a) \quad q \wedge \sim p$$

$$(b) \quad \sim q \oplus p$$

$$(c) \quad \sim (r \rightarrow (q \wedge \sim p)) \quad \blacksquare$$

Latihan: Ubah kalimat ini ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik)

1. Anda hanya dapat mengakses internet dari kampus hanya jika anda mahasiswa Informatika atau anda bukan seorang sarjana.

2. Anda tidak dapat menaiki *roller coaster* jika anda tingginya kurang dari 150 cm kecuali jika anda berusia lebih dari 16 tahun.

Contoh. Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto “Barang bagus tidak murah” sedangkan pedagang kedua mempunyai moto “Barang murah tidak bagus”. Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

p : Barang itu bagus

q : Barang itu murah.

Moto pedagang pertama: “Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah” atau $p \rightarrow \sim q$

Moto pedagang kedua: “Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus” atau $q \rightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\therefore p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$.

\therefore Kedua moto tersebut menyatakan hal yang sama.

- Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

if *c* **then** *S*

c : ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi

S : satu atau lebih pernyataan.

S dieksekusi jika *c* benar,

S tidak dieksekusi jika *c* salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.
- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi (\rightarrow).
- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi *c*, jika *c* benar maka *S* dieksekusi, sebaliknya jika *c* salah maka *S* tidak dieksekusi.

Contoh. Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

if $x > y$ **then** $y := x + 10;$

Berapa nilai y setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2, y = 1$

(ii) $x = 3, y = 5?$

Penyelesaian:

(i) $x = 2$ dan $y = 1$

Ekspresi $x > y$ bernilai benar

Pernyataan $y := x + 10$ dilaksanakan

Nilai y sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) $x = 3$ dan $y = 5$

Ekspresi $x > y$ bernilai salah

Pernyataan $y := x + 10$ tidak dilakukan

Nilai y tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

Latihan (spesifikasi sistem) Tentukan apakah spesifikasi sistem di bawah ini konsisten.

“Pesan diagnosa disimpan di dalam memori atau ditransmisikan”

“Pesan diagnosa tidak disimpan di dalam memori”

“Jika pesan diagnosa disimpan di dalam memori, maka ia ditransmisikan”

Penyelesaian:

p : pesan diagnosa disimpan di dalam memori

q : pesan diagnose ditransmisikan

Notasi simbolik:

$p \vee q$

$\sim p$

$p \rightarrow q$

Perhatikan:

$$p \vee q$$

$$\sim p$$

$$p \rightarrow q$$

Jika semua spesifikasi benar, maka p harus salah agar $\sim p$ benar.

Jika p salah, maka $p \vee q$ hanya benar jika q benar.

Jika p salah dan q benar, maka $p \rightarrow q$ benar.

Kesimpulan: spesifikasi sistem tersebut konsisiten.

Latihan

Indra, Ical, Parry adalah sekelompok pembunuh. Mereka tertangkap dan sedang diinterogasi oleh polisi dengan *poligraph*:

Indra berkata : Ical bersalah dan Parry tidak bersalah

Ical berkata : Jika Indra bersalah maka Parry bersalah

Parry berkata : Saya tidak bersalah, tetapi Ical atau Indra bersalah.

Tentukan siapa sajakah yang bersalah, bila tes *poligraph* menunjukkan bahwa Ical telah berbohong, sementara kedua temannya mengatakan kebenaran!

Pernyataan:

p : Indra bersalah

q : Ical bersalah

r : Parry bersalah

Proposisi logika:

Indra : $q \wedge \sim r$

Ical: $p \rightarrow r$

Parry : $\sim r \wedge (p \vee q)$

Tabel Kebenaran:

p	q	r	Indra	Ical	Parry
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	F

Dari soal diketahui Ical berbohong (pernyataan Ical salah) sedangkan dua teman lainnya mengatakan kebenaran. Hal itu bersesuaian dengan tabel kebenaran pada pada baris ke 2 (berwarna kuning).

Pada baris kedua tersebut:

p benar \rightarrow Indra bersalah (benar)

q benar \rightarrow Ical bersalah (benar)

r salah \rightarrow Parry bersalah (tidak benar)

Sehingga dapat disimpulkan bahwa yang bersalah adalah **Indra** dan **Ical**.

Ekivalensi bentuk $p \rightarrow q$

- Implikasi $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

- Kita dapat membuat negasi dari implikasi dengan menggunakan bentuk ekuivalensinya tersebut:

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

- Contoh: Jika anda berusia 17 tahun, maka anda boleh memiliki SIM

Negasinya: Anda berusia 17 tahun tetapi anda tidak boleh memiliki SIM.

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

“Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya”

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Latihan. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

- (a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
- (b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
- (c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
- (d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
- (e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
- (f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

- (a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
- (b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.
- (c) “Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar”
Kontraposisi: “Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian”
- (d) “Jika ia mendapat pekerjaan maka ia tidak terlambat”
Kontraposisi: “Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu”
- (e) “Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang” ekuivalen dengan “Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin”.
Kontraposisi: “Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang”.
- (f) “Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin”,
Ekuivalen dengan “Jika hari hujan maka hari ini dingin”.
Kontraposisi: “Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan”.

Latihan

Diberikan pernyataan “Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*”

- (a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi “jika p , maka q ”.
- (b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

- (a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah
- (b) Ingkaran: “Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah”

Konvers: “Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*”

Invers: “Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah”

Kontraposisi: “Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*”

Bi-implikasi

- Bentuk proposisi: “ p jika dan hanya jika q ”
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan “ p jika dan hanya jika q ” dapat dibaca “Jika p maka q dan jika q maka p ”.

- Contoh teorema dalam bentuk biimplikasi:

Teorema: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, yang dalam hal ini $a > 0$

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
 - (a) p jika dan hanya jika q .
 - (b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q .
 - (c) Jika p maka q , dan sebaliknya.
 - (d) p iff q

Contoh. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

- (a) $1 + 1 = 2$ jika dan hanya jika $2 + 2 = 4$.
- (b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
- (c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
- (d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Latihan

Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, “Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran”. Apakah ada emas di pulau tersebut?

Penyelesaian:

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

p : Ada emas di pulau ini

q : Saya selalu menyatakan kebenaran

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

Kasus 2, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti q benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti q salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

Latihan. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk “ p jika dan hanya jika q ”:

- (a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
- (b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
- (c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
- (d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
- (e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

- (a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
- (b) Anda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.
- (c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.
- (d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
- (e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

- Bila dua proposisi majemuk yang ekuivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi.

Teorema:

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekuivalen secara logika, dilambangkan dengan

$$P(p, q, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, \dots)$$

jika $P \Leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Argumen

- Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, \dots, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

- Sering ditulis dalam bentuk: $p_1, p_2, \dots, p_n \Rightarrow q$
- Konklusi biasanya ditandai dengan kata “Jadi”, “Oleh karen itu”, “Dengan demikian, “, dll

- Contoh sebuah argumen:

Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.

- Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Definisi. Sebuah argumen dikatakan sah jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sah, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Latihan

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sah.

Penyelesaian:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Jawaban:

Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

tautologi. Tabel berikut memperlihatkan bahwa $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sah.

Tabel $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ adalah tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Latihan

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

*“Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang
Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut”*

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah argument tersebut sah atau palsu.

Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

Tautologi atau bukan. Tabel berikut memperlihatkan bahwa $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ bukan suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan tidak sah.

Tabel $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ bukan tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Beberapa argumen yang sudah terbukti sah

1. Modus ponens

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

2. Modus tollens

$$p \rightarrow q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \sim p$$

3. Aturan transitif

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

3. Silogisme disjungtif/kontrapositif

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

4. Simplifikasi konjungtif

$$\frac{p \wedge q}{\text{-----}} \\ \therefore p$$

$$\frac{p \wedge q}{\text{-----}} \\ \therefore q$$

5. Penjumlahan disjungtif

$$p$$
$$-----$$
$$\therefore p \vee q$$

6. Konjungsi

p

q

$\therefore p \wedge q$

- Selain menggunakan tabel kebenaran, sebuah argumen juga dapat dibuktikan kesahihannya dengan menggunakan campuran hukum-hukum logika dan metode penarikan kesimpulan yang sudah terbukti sah (modus ponens, modus tollens, dsb).
- Perhatikan contoh berikut ini.

- **Contoh:** Buktikan bahwa argumen berikut benar:

$$\sim p \vee q, s \vee p, \sim q \Rightarrow s$$

Bukti:

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| (1) $\sim p \vee q$ | Premis |
| (2) $\sim q$ | Premis |
| (3) $\sim p$ | Silogisme disjungtif (1) dan (2) |
| (4) $s \vee p$ | Premis |
| (5) s | Silogisme disjungtif (3) dan (4) |

- **Contoh:** Buktikan bahwa argumen berikut benar:

$$p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \Rightarrow s \vee r$$

Bukti:

- | | | |
|-----|------------------------|------------------------------|
| (1) | $p \vee q$ | Premis |
| (2) | $\sim p \rightarrow q$ | Ekivalensi bentuk (1) |
| (3) | $q \rightarrow s$ | Premis |
| (4) | $\sim p \rightarrow s$ | Aturan transitif (2) dan (3) |
| (5) | $\sim s \rightarrow p$ | Ekivalensi bentuk (4) |
| (6) | $p \rightarrow r$ | Premis |
| (7) | $\sim s \rightarrow r$ | Aturan transitif (5) dan (6) |
| (8) | $s \vee r$ | Ekivalensi bentuk (7) |

Latihan

1. Diberikan sebuah proposisi:

Mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma jika ia telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit.

Tentukan:

(a) invers proposisi tersebut,

(b) pernyataan yang ekuivalen dengan proposisi tersebut

(jawaban ada di balik ini)

Jawaban:

p : mahasiswa telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit

q : mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma

(a) **q jika p** adalah ekspresi bentuk lain dari “jika **p** maka **q** ” (**$p \rightarrow q$**)

invers: (**$\sim p \rightarrow \sim q$**)

Jika mahasiswa belum mengambil mata kuliah Struktur Diskrit, maka ia belum dapat mengambil mata kuliah Strategi algoritma.

(b) pernyataan tersebut dapat dinotasikan dengan : **$\sim p \vee q$**

Mahasiswa tidak mengambil mata kuliah Strukur Diskrit atau mengambil mata kuliah Strategi Algoritma

2. Diberikan dua buah premis berikut:

(i) Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukai logika.

(ii) Jika matematika mudah, maka logika tidak sulit.

Tunjukkan dengan pembuktian argumen (atau cara lain) apakah masing-masing konklusi berikut sah (valid) atau tidak berdasarkan dua premis di atas:

a) Bahwa matematika tidak mudah atau logika sulit.

b) Bahwa matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika.

3. Tentukan validitas argumen berikut:

Mahasiswa diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit jika telah melewati tahun pertama dan berada pada semester ganjil. Mahasiswa jurusan Farmasi tidak diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit. Dengan demikian mahasiswa jurusan Farmasi belum melewati tahun pertama atau sedang berada pada semester genap.

4. *Proposisi: Karena Sabtu dan Minggu lalu diadakan penutupan acara PMB 2007, acara kumpul rutin Unit Tennis Meja (UTM) dibatalkan dan rapat ITB Open ditunda hingga hari ini.*
- a) Nyatakan proposisi di atas dalam notasi simbolik
 - b) Tuliskan inversinya.

5. Dari keempat argumen berikut, argumen manakah yang sah?

- Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
- Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi Amir tidak mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.
- Jika Amir mimisan maka hari panas, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
- Jika Amir tidak mimisan, maka hari tidak panas, tetapi Amir mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

- (a) Untuk semua bilangan real x dan y , berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
- (b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corollary*.

- **Lemma:** teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain
- **Corollary:** teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.
- atau, *corollary* adalah teorema yang mengikuti teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

- a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
- b. Untuk semua bilangan real x , y , dan z , jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.

Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema:** $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, dimana $a > 0$
- **Corollary:** $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, dimana $a > 0$