Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi UTS IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Rinaldi M, Arrival Dwi Sentosa
Kamis, 17 April 2025
Waktu: 120 menit

==

Berdoalan terlebih dahulu sebelum mengerjakan ujian ini.

1. Tentukan apakah argumen di bawah ini benar (valid): **(Nilai: 10)**

   Jika Anda mahasiswa Informatika maka Anda tidak sulit belajar pemrograman. Syarat cukup Anda mahasiswa Informatika adalah Anda suka bikin tugas kuliah sampai lewat tengah malam. Tetapi, anda sulit belajar pemrograman dan anda tidak suka bikin tugas sampai lewat tengah malam. Jadi, Anda bukan mahasiswa Informatika.

Jawaban: Misalkan:

p : Anda mahasiswa Informatika

q : Anda sulit belajar pemrograman

r : Anda suka bikin tugas kuliah sampai lewat tengah malam

Jika Anda mahasiswa Informatika maka Anda tidak sulit belajar pemrograman: $p \to {\sim}q$

Syarat cukup Anda mahasiswa Informatika adalah Anda suka bikin tugas kuliah sampai lewat tengah malam: $r \to p$

Anda sulit belajar pemrograman dan anda tidak suka bikin tugas sampai lewat tengah malam: $q \wedge {\sim}r$

Anda bukan mahasiswa Informatika: ${\sim}p$

Argumen di atas ditulis menjadi:

$p \to {\sim}q$
$r \to p$
$q \wedge {\sim}r$

$\therefore\ {\sim}p$

Untuk membuktikan validitas argumen dapat menggunakan tabel kebenaran atau menggunakan teknik resolusi dengan menerapkan serangkain hukum-hukum inferensi (modus ponne, moduls tollens, dsb) dan hukum-hukum logika. Jika menggunakan tabel kebenaran, maka harus ditunjukkan bahwa $[(p \to {\sim}q) \wedge (r \to p) \wedge (q \wedge {\sim}r)] \to {\sim}p$ adalah tautologi.

p	q	r	${\sim}p$	${\sim}q$	${\sim}r$	$p \to {\sim}q$	$r \to p$	$q \wedge {\sim}r$	$[(p \to {\sim}q) \wedge (r \to p) \wedge (q \wedge {\sim}r)] \to {\sim}p$
T	T	T	F	F	F	F	T	F	**T**
T	T	F	F	F	T	F	T	T	**T**
T	F	T	F	T	F	T	T	F	**T**
T	F	F	F	T	T	T	T	F	**T**
F	T	T	T	F	F	T	F	F	**T**
F	T	F	T	F	T	T	T	T	**T**
F	F	T	T	T	F	T	F	F	**T**
F	F	F	T	T	T	T	T	F	**T**

Karena $[(p \to {\sim}q) \wedge (r \to p) \wedge (q \wedge {\sim}r)] \to {\sim}p$ adalah sebuah tautologi, maka argument tersebut valid! (terbukti)

Cara kedua:

1) $p \to {\sim}q$ (premis 1)
2) $r \to p$ (premis 2)
3) $q \wedge {\sim}r$ (premis 3)
4) q (simplifikasi 3)
5) $q \to {\sim}p$ (ekivalen premis 1, transposisi)
6) ${\sim}p$ (modus ponen 5 dan 4) (terbukti)

2. Farhan adalah seorang pedagang kelontong yang berjualan di warung rumahnya di desa. Dalam setahun (365 hari), dihitung dari hari pertama, Farhan rutin berbelanja ke kota setiap hari kelipatan 7 dan hari kelipatan 10. Namun setiap hari kelipatan 6 Farhan beristirahat di rumah (tidak pergi ke kota). Dalam setahun berapa kali Farhan pergi berbelanja ke kota? (Petunjuk: Gambarkan diagram Venn yang memperlihatkan jumlah hari yang ditanyakan) **(Nilai: 10)**

Jawaban:

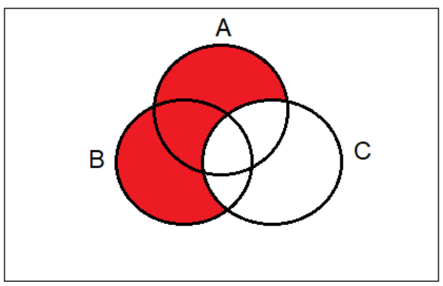
Misalkan:

A = himpunan hari kelipatan 7 (habis dibagi 7)
B = himpunan hari kelipatan 10 (habis dibagi 10)
C = himpunan hari kelipatan 6 (habis dibagi 6)

$|U| = 365$
$|A| = \lfloor 365 / 7 \rfloor = 52$
$|B| = \lfloor 365 / 10 \rfloor = 36$
$|C| = \lfloor 365 / 6 \rfloor = 60$
$|A \cap B| = \lfloor 365 / 70 \rfloor = 5$
$|A \cap C| = \lfloor 365 / 42 \rfloor = 8$
$|B \cap C| = \lfloor 365 / 30 \rfloor = 12$
$|A \cap B \cap C| = \lfloor 365 / 210 \rfloor = 1$

Yang ditanyakan : $|(A \cup B) - (C)| = ?$

Diagram Venn:



$|(A \cup B) - (C)| = |A \cup B| - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)|$
$= (|A| + |B| - |A \cap B|) - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)|$
$= (52 + 36 – 5) – 8 – 12 + 1$
$= 64$

|Atau dengan cara berikut:

$|(A \cup B \cup C)| - |C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|) - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)| - |C|$
$= |A| + |B| + - |A \cap B|) - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)|$
$= 52 + 36 – 5 – 8 – 12 + 1$
$= 64$

3. Misalkan f adalah fungsi dari $X = \{100, 101, 102, 103, 104\}$ ke $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 10x$ mod 11. Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Jelaskan apakah f injektif, surjektif, dan bijektif? **(Nilai: 10)**

Jawaban:

x = 100 $\rightarrow$ f(100) = 10(100) mod 11 = 10

x = 101 $\rightarrow$ f(101) = 10(101) mod 5 = 9

x = 102 $\rightarrow$ f(102) = 10(102) mod 5 = 8

x = 103 $\rightarrow$ f(103) = 10(103) mod 5 = 7

x = 104 $\rightarrow$ f(104) = 10(104) mod 5 = 6

Jadi, f = {(100,10), (101,9), (102,8), (103,7), (104,6)}

Fungsi f adalah fungsi satu-ke-satu (injektif) karena tidak ada dua elemen di X yang mempunyai peta yang sama di himpunan hasil. Fungsi f dipetakan pada (surjektif) karena setiap elemen di Y adalah peta dari himpunan daerah asal (X). Dengan kata lain, f adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu (bijektif).

4. Sebuah maskapai penerbangan melayani empat kota seperti pada tabel di bawah ini. Misalkan $(a, b) \in R$ jika ada rute penerbangan dari kota a ke kota b. **(Nilai: 15)**

Asal	Tujuan
Jakarta	Medan
Jakarta	Surabaya
Medan	Surabaya
Surabaya	Makassar
Makassar	Medan

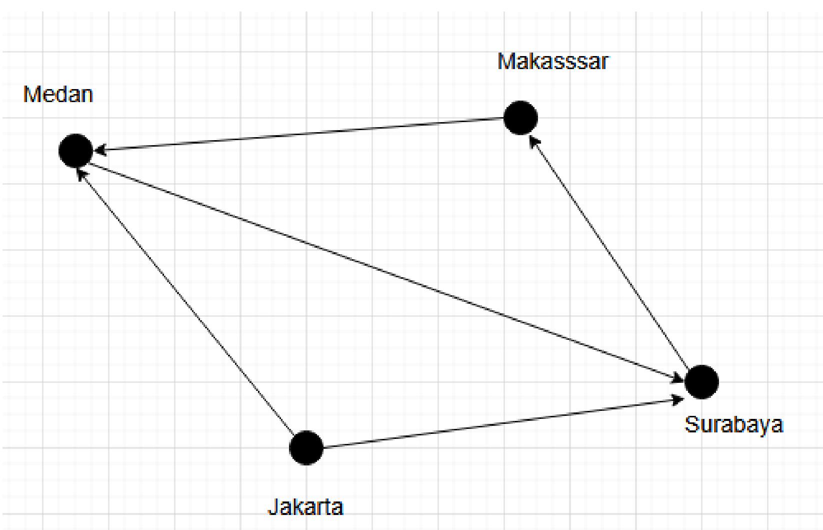
(a) Tuliskan matriks yang merepresentasikan relasi R

(b) Gambarkan graf berarah yang merepresentasikan R

(c) Misalkan pihak maskapai perlu membuat ulang rute penerbangan sedemikan sehingga antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui kota antara. Carilah relasi paling minimal sehingga antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui kota antara.

Jawaban: R = {(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Medan, Surabaya), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan)}

(a)



(b)

	Jakarta	Medan	Surabaya	Makassar
Jakarta	**0**	**1**	**1**	**0**
Medan	**0**	**0**	**1**	**0**
Surabaya	**0**	**0**	**0**	**1**
Makassar	**0**	**1**	**0**	**0**

(d) Relasi paling minimal sehingga antara dua kota terdapat rute penerbangan langsung atau melalui kota antara adalah klosur menghantar dari relasi R.

Klosur menghantar dari relasi R adalah $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan R, maka maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(1\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^{[4]} = M_R^{[3]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge0) \\ (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

	Jakarta	Medan	Surabaya	Makassar
Jakarta	**0**	**1**	**1**	**1**
Medan	**0**	**1**	**1**	**1**
Surabaya	**0**	**1**	**1**	**1**
Makassar	**0**	**1**	**1**	**1**

Jadi, R* = {(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Jakarta, Makassar), (Medan, Medan), (Medan, Surabaya), (Medan, Makassar), (Surabaya, Medan), (Surabaya, Surabaya), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan), (Makassar, Surabaya), (Makassar, Makassar)}

Dengan asumsi tidak ada penerbangan dari kota yang sama ke kota yang sama, maka (Medan, Medan), (Surabaya, Surabaya), dan (Makassar, Makassar) bisa dibuang dari R*, sehingga

R* = {(Jakarta, Medan), (Jakarta, Surabaya), (Jakarta, Makassar), (Medan, Surabaya), (Medan, Makassar), (Surabaya, Medan), (Surabaya, Makassar), (Makassar, Medan), (Makassar, Surabaya)}

Asal	Tujuan
Jakarta	Medan
Jakarta	Surabaya
Jakarta	Makassar
Medan	Surabaya
Medan	Makassar
Surabaya	Makassar
Surabaya	Medan
Makassar	Medan
Makassar	Surabaya

5. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan bulat n ≥ 1, deret $S(n) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2)\cdot 2^k$ memenuhi $S(n) = (3n-5)\cdot\ 2^{n+1} + 10$. **(Nilai: 10)**

Jawaban:

(i) Basis induksi

Untuk n = 1, $S(1) = (3\cdot 1 - 2)2 = 2,\ (3\cdot 1-5)2^2 + 10 = (-2)4 + 10 = 2$

Pernyataan benar untuk n = 1.

(ii) Langkah induksi

Hipotesis induksi : Untuk $n \geq 1$, asumsikan $S(n) = (3n-5)2^{n+1} + 10$ benar

Harus ditunjukkan bahwa $S(n+1) = (3(n+1)-5)2^{(n+1)+1} + 10$

Caranya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= (3(n+1)-5)2^{(n+1)+1} + 10 \\
&= (3(n+1)-5)2^{(n+1)}\cdot 2 + 10 \\
&= (3(n+1)-5)2^{(n+1)} + (3(n+1)-5)2^{(n+1)} + 10 \\
&= [(3(n+1)-5)2^{(n+1)} + 10] + (3(n+1)-5)2^{(n+1)} \\
&\quad \longleftarrow\text{-------- } S(n) \text{----------------}\longrightarrow \\
&= S(n) + (3(n+1)-2)2^{n+1} \\
&= (3n-5)2^{n+1} + 10 + (3n+1)2^{n+1} \\
&= (3n-5+3n+1)2^{n+1} + 10 \\
&= (6n-4)2^{n+1} + 10 \\
&= (3(n+1)-5)2^{(n+1)+1} + 10
\end{aligned}
$$

Karena Langkah basis dan Langkah induksi terbukti benar, maka terbukti semua bilangan bulat n ≥ 1, deret $S(n) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2)\cdot 2^k$ memenuhi $S(n) = (3n-5)\cdot\ 2^{n+1} + 10$.

6. Sebuah start-up meluncurkan perangkat Smart-Home X yang dapat merekrut pembeli baru melalui rekomendasi mulut-ke-mulut. Setiap bulan atau dua bulan ada penambahan pembeli baru sebagai berikut:
   - Setiap bulan, 50 % dari pemilik Smart-Home X bulan sebelumnya berhasil meyakinkan satu orang baru untuk membeli.
   - Selain itu, 20 % dari pemilik dua bulan sebelumnya baru berhasil meyakinkan temannya karena proses pertimbangan yang lebih lama.
   - Diasumsikan tidak ada perangkat yang berhenti digunakan.

Data penjualan awal:

- Bulan ke-0 terjual 400 unit (dinyatakan sebagai pemilik aktif).
- Bulan ke-1 terjual 520 unit.

(a) Tuliskan solusi relasi rekursif P_n yang menyatakan banyaknya pemilik aktif pada bulan ke-n.

(b) Temukan solusi umum P_n menggunakan metode penyelesaian relasi rekursif linier homogen orde dua.

(c) Hitung banyaknya pemilik aktif pada bulan ke-5. Bulatkan ke satuan terdekat.

(Nilai: 15)

Jawaban:

(a) Pemilik aktif bulan ke-n berasal dari

- 100% pemilik bulan lalu P_{n-1} + tambahan 50% dari mereka (karena masing-masing merekrut satu teman) → $1.5P_{n-1}$
- Tambahan 20% dari pemilih dua bulan lalu $0.2P_{n-2}$

Model matematikanya dalam relasi rekurens: $P_n = 1.5P_{n-1} + 0.2P_{n-2},\ n \geq 2$, dengan $P_0 = 400, P_1 = 520$

(b) Solusi umum

Bentuk karakteristik:

$$r^2 - 1.5r - 0.2 = 0$$
$$r = \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 0.8}}{2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{3.05}}{2} \approx \begin{cases} r1 \approx 1.62 \\ r2 \approx -0.12 \end{cases}$$

$$P_n = A(1.62)^n + B(-0.12)^n$$

Menentukan A dan B

$$P_0 = A + B = 400$$
$$P_1 = 1.62A - 0.12B = 520$$
$$A \approx 326.1, \qquad B \approx 73.9$$

Maka: $P_n = 326.1(1.62)^n + 73.9(-0.12)^n$

(c) Jumlah pemilik aktif pada bulan ke 5

$$P_5 = 326.1(1.62)^5 + 73.9(-0.12)^5 \approx 326.1 \cdot 11.26 + 73.9 \cdot (-2.8 \cdot 10^{-4})$$
$$P_5 \approx 3672$$

7. Carilah bentuk komplemen dari fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'z(y + y'z' + x')$ **(Nilai: 10)**

Jawaban:

$f'(x,y,z) = (x'z(y + y'z' + x'))'$

$f'(x,y,z) = (x'z)' + (y + y'z' + x')'$ (Hukum De Morgan)

$f'(x,y,z) = (x + z') + xy'(y'z')'$ (Hukum De Morgan)

$f'(x,y,z) = (x + z') + xy'(y + z)$ (Hukum De Morgan)

$f'(x,y,z) = (x + z') + xy'(y + z)$ (Hukum De Morgan)

$f'(x,y,z) = x + z' + xyy' + xy'z$ (Hukum Distributif)

$f'(x,y,z) = x + z' + xy'z$ (Hukum Komplemen)

Dengan demikian, bentuk komplemennya adalah $f'(x,y,z) = x + z' + xy'z$

Catatan: Bentuk komplemen lain juga dapat diterima asalkan ekivalen

8. Sebuah sistem keamanan pintu otomatis menggunakan empat variabel input:

- *A*: Kartu akses valid terdeteksi (1 jika valid, 0 tidak).
- *B*: Sidik jari terdaftar terdeteksi (1 jika cocok, 0 tidak).
- *C*: Waktu operasional (1 jika jam kerja, 0 jika di luar jam kerja).

- *D*: Mode darurat aktif (1 jika ya, 0 jika tidak).

Pintu terbuka (Output = 1) jika memenuhi salah satu kondisi berikut:

1. Aktivasi normal:
   - Pada jam kerja: Pintu terbuka jika sidik jari valid.
   - Diluar jam kerja: Pintu terbuka jika kartu akses valid tanpa sidik jari.
2. Mode darurat:
   - Pintu terbuka otomatis jika mode darurat aktif.
3. Kondisi *don't care*:
   - Jika kartu dan sidik jari tidak valid bersamaan, output tidak terdefinisi (X).

(Nilai: 20)

(a) Buat tabel kebenaran lengkap untuk semua kombinasi input.
(b) Susun peta Karnaugh 4 variabel berdasarkan tabel tersebut.
(c) Tentukan fungsi boolean minimal untuk membuka pintu.
(d) Gambarkan rangkaian logika dari fungsi minimal tersebut.

Jawaban:

a. Buat tabel kebenaran lengkap untuk semua kombinasi input

A	B	C	D	Output
0	0	0	0	X
0	0	0	1	1
0	0	1	0	X
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$F = A'B'C'D + A'B'CD + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + AB'C'D' + AB'C'D + AB'CD + ABC'D + ABCD' + ABCD$$

Keterangan:

A = Kartu valid

B = Sidik jari valid

C = Jam kerja

D = Mode darurat

b. Susun peta Karnaugh 4 variabel berdasarkan tabel tersebut

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

c. Tentukan fungsi boolean minimal untuk membuka pintu

$$F(A,B,C,D) = D + B'C' + BC$$

d. Gambarkan rangkaian logika dari fungsi minimal tersebut