

Solusi Kuis ke-3 IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS) – Teori Bilangan, Kombinatorika  
Dosen: Rinaldi, Arrival Dwi Sentosa  
Kamis, 15 Mei 2025  
Waktu: 60 menit

1. Diberikan dua bilangan bulat  $a = 144$  dan  $b = 100$ . Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut: (15)

- a) Dengan menggunakan Algoritma Euclidean, tentukan PBB( $a, b$ )  
b) Nyatakan PBB( $a, b$ ) sebagai kombinasi linier dari  $a$  dan  $b$

**Jawaban:**

- a. Berdasarkan Algoritma Euclidean, didapatkan hasil sebagai berikut:

$$144 = 1 \times 100 + 44$$

$$100 = 2 \times 44 + 12$$

$$44 = 3 \times 12 + 8$$

$$12 = 1 \times 8 + 4$$

$$8 = 2 \times 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka  $\text{PBB}(144, 100) = 4$

- b. Dari jawaban bagian a, didapatkan persamaan sebagai berikut:

i.  $4 = 12 - 1 \times 8$

ii.  $4 = 12 - 1 \times (44 - 3 \times 12) = 12 - 44 + 3 \times 12 = -44 + 4 \times 12$

iii.  $4 = -44 + 4 \times (100 - 2 \times 44) = -44 + 4 \times 100 - 8 \times 44$

$$= 4 \times 100 - 9 \times 44$$

iv.  $4 = 4 \times 100 - 9 \times (144 - 1 \times 100) = 4 \times 100 - 9 \times 144 + 9 \times 100$

$$= -9 \times 144 + 13 \times 100$$

Maka kombinasi linier PBB(144, 100) dari 144 dan 100 adalah

$$4 = -9 \times 144 + 13 \times 100$$

2. Tentukan seluruh nilai  $x$  sedemikian sehingga  $x^{86} \equiv 6 \pmod{29}$ . (15)

**Jawaban:**

Berdasarkan Fermat's Little Theorem,  $x^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ , sehingga

$$x^{86} \equiv 6 \pmod{29}$$

$$(x^{28})^3(x^2) \equiv 6 \pmod{29}$$

$$(1)^3(x^2) \equiv 6 \pmod{29}$$

$$x^2 \equiv 6 \pmod{29}$$

Diketahui bilangan kuadrat yang memenuhi kekongruenan tersebut adalah 64 ( $64 \equiv 6 \pmod{29}$ ). Sehingga kekongruenan tersebut dapat ditulis ulang menjadi sebagai berikut:

$$x^2 \equiv 64 \pmod{29}$$

$$x^2 - 64 \equiv 0 \pmod{29}$$

$$(x + 8)(x - 8) \equiv 0 \pmod{29}$$

- a.  $x + 8 \equiv 0 \pmod{29}$

$$x \equiv -8 \pmod{29}$$

$$x \equiv 21 \pmod{29}$$

$$x = 29k + 21$$

- b.  $x - 8 \equiv 0 \pmod{29}$

$$x \equiv 8 \pmod{29}$$

$$x = 29k + 8$$

Maka seluruh nilai  $x$  yang memenuhi kekongruenan tersebut adalah  $x = 29k + 21$  atau  $x = 29k + 8$

3. Seorang matematikawan kuno meninggalkan petunjuk untuk menemukan sebuah bilangan bulat positif  $x$ . Bilangan  $x$  tersebut memenuhi tiga kondisi berikut:

- i. Ketika  $x$  dibagi 5, sisanya sama dengan sisa dari  $2^{2027}$  dibagi 5  $\rightarrow x \equiv 2^{2027} \pmod{5}$
- ii. Ketika  $x$  dibagi 7, sisanya sama dengan sisa dari  $3^{7004}$  dibagi 7,  $\rightarrow x \equiv 3^{7004} \pmod{7}$
- iii. Ketika  $4x$  dibagi 11, sisanya sama dengan sisa dari  $5^{1003}$  dibagi 11  $\rightarrow 4x \equiv 5^{1003} \pmod{11}$

Tentukan bilangan bulat positif terkecil  $x$  yang memenuhi semua kondisi tersebut.

(20)

**Jawaban:**

Teorema Kecil Fermat menyatakan bahwa jika  $p$  adalah bilangan prima dan  $a$  tidak habis dibagi  $p$ , maka:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

**1. Kondisi Pertama:**  $x \equiv 2^{2027} \pmod{5}$

$$\begin{aligned} 2^4 &\equiv 1 \pmod{5} \\ 2027 \div 4 &= 506 \text{ sisa } 3 \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} 2^{2027} &\equiv 2^3 \pmod{5} \equiv 3 \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

**2. Kondisi Kedua:**  $x \equiv 3^{7004} \pmod{7}$

$$\begin{aligned} 3^6 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 7004 \div 6 &= 1167 \text{ sisa } 2 \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} 3^{7004} &\equiv 3^2 \pmod{7} \equiv 2 \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

**3. Kondisi Ketiga:**  $4x \equiv 5^{1003} \pmod{11}$

$$\begin{aligned} 5^{1003} \pmod{11} &\equiv 5^3 \pmod{11} \\ 5^3 \pmod{11} &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{11} \\ x &\equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

**Menggunakan Chinese Remainder Theorem (CRT)**

Dari langkah sebelumnya, kita punya sistem kongruensi:

$$x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 2 \pmod{7}, x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$N = 5 \times 7 \times 11 = 385$$

Komponen CRT:

$$N_1 = 77, N_2 = 55, N_3 = 35$$

Invers modul:

$$\begin{aligned} 77y_1 &\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow y_1 = 3 \\ 55y_2 &\equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow y_2 = 6 \\ 35y_3 &\equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow y_3 = 6 \end{aligned}$$

### Menghitung Nilai Akhir

$$\begin{aligned} x &\equiv (3 \cdot 77 \cdot 3) + (2 \cdot 55 \cdot 6) + (1 \cdot 35 \cdot 6) \pmod{385} \\ x &\equiv 693 + 660 + 210 \pmod{385} \\ x &\equiv 1563 \pmod{385} \end{aligned}$$

Bagi 1563 dengan 385:

$$1563 = 4 \cdot 385 + 23$$

Maka, solusi terkecil adalah:

$$x = 23$$

### Verifikasi:

1.  $23 \div 5 = 4$ , sisa 3
2.  $23 \div 7 = 3$ , sisa 2
3.  $23 \div 11 = 2$ , sisa 1

Semua kondisi terpenuhi. Bilangan misterius tersebut adalah **23**.

4. Sebagai persiapan dalam Festival Fakultas Teknik Informatika seluruh anggota HMIF Institut Teknologi Bandung dari mata kuliah Matematika Diskrit diminta untuk membentuk 5 kelompok presentasi. Kelompok ini dinomori dari 1 sampai 5 (Perhatikan: penomoran dimulai dari 1, bukan dari 0). Kelompok yang akan dimasuki oleh seorang mahasiswa ditentukan dengan sebuah fungsi *hash*. Fungsi hash tersebut menentukan nomor kelompok untuk setiap mahasiswa berdasarkan dua angka terakhir dari NIM mahasiswa tersebut. **(15)**
- a) Tentukan fungsi *hash* (*h*) untuk penentuan kelompok yang dimasuki setiap mahasiswa.
  - b) Tentukan kelompok awal untuk mahasiswa-mahasiswa dengan NIM berikut: 13522025, 13522047, 13522092, 13522011, 13522083, 13522064, 13522036, 13522055, 13522072, 13522019.
  - c) Jika setiap kelompok hanya dapat menampung maksimal 2 mahasiswa, dan teknik *linear probing* digunakan untuk menangani *collision* (yaitu, jika suatu kelompok sudah penuh, mahasiswa akan ditempatkan pada kelompok berikutnya yang tersedia secara berurutan, dengan kembali ke kelompok 1 jika diperlukan), tentukan penempatan kelompok akhir untuk mahasiswa-mahasiswa pada bagian b, dengan asumsi mereka datang secara berurutan seperti yang terdaftar.

### Jawaban:

Syarat Hash:

- Menggunakan 2 angka terakhir dari NIM

- Menempatkan mahasiswa ke dalam 5 kelompok bernomor 1-5

Fungsi hash yang sesuai adalah:  $h(\text{NIM}) = (x \bmod 5) + 1$  dimana  $x$  adalah 2 angka terakhir dari NIM.

**a. Kelompok awal untuk setiap mahasiswa**

Menghitung kelompok awal berdasarkan fungsi hash:

1. 13522025: 2 angka terakhir = 25  $h(25) = (25 \bmod 5) + 1 = 0 + 1 = 1$
2. 13522047: 2 angka terakhir = 47  $h(47) = (47 \bmod 5) + 1 = 2 + 1 = 3$
3. 13522092: 2 angka terakhir = 92  $h(92) = (92 \bmod 5) + 1 = 2 + 1 = 3$
4. 13522011: 2 angka terakhir = 11  $h(11) = (11 \bmod 5) + 1 = 1 + 1 = 2$
5. 13522083: 2 angka terakhir = 83  $h(83) = (83 \bmod 5) + 1 = 3 + 1 = 4$
6. 13522064: 2 angka terakhir = 64  $h(64) = (64 \bmod 5) + 1 = 4 + 1 = 5$
7. 13522036: 2 angka terakhir = 36  $h(36) = (36 \bmod 5) + 1 = 1 + 1 = 2$
8. 13522055: 2 angka terakhir = 55  $h(55) = (55 \bmod 5) + 1 = 0 + 1 = 1$
9. 13522072: 2 angka terakhir = 72  $h(72) = (72 \bmod 5) + 1 = 2 + 1 = 3$
10. 13522019: 2 angka terakhir = 19  $h(19) = (19 \bmod 5) + 1 = 4 + 1 = 5$

**c. Penempatan kelompok akhir dengan linear probing**

1. 13522025: Kelompok awal = 1 Kelompok 1 kosong → Ditempatkan di Kelompok 1
2. 13522047: Kelompok awal = 3 Kelompok 3 kosong → Ditempatkan di Kelompok 3
3. 13522092: Kelompok awal = 3 Kelompok 3 berisi 1 mahasiswa → Ditempatkan di Kelompok 3
4. 13522011: Kelompok awal = 2 Kelompok 2 kosong → Ditempatkan di Kelompok 2
5. 13522083: Kelompok awal = 4 Kelompok 4 kosong → Ditempatkan di Kelompok 4
6. 13522064: Kelompok awal = 5 Kelompok 5 kosong → Ditempatkan di Kelompok 5
7. 13522036: Kelompok awal = 2 Kelompok 2 berisi 1 mahasiswa → Ditempatkan di Kelompok 2
8. 13522055: Kelompok awal = 1 Kelompok 1 berisi 1 mahasiswa → Ditempatkan di Kelompok 1
9. 13522072: Kelompok awal = 3 Kelompok 3 sudah penuh (2 mahasiswa) Linear probing: cek Kelompok 4 Kelompok 4 berisi 1 mahasiswa → Ditempatkan di Kelompok 4
10. 13522019: Kelompok awal = 5 Kelompok 5 berisi 1 mahasiswa → Ditempatkan di Kelompok 5

Hasil Akhir Penempatan:

- Kelompok 1: 13522025, 13522055
- Kelompok 2: 13522011, 13522036
- Kelompok 3: 13522047, 13522092
- Kelompok 4: 13522083, 13522072
- Kelompok 5: 13522064, 13522019

5. Diberikan sebuah fungsi  $f(n)$ ,  $n > 0$ , untuk menentukan banyak cara menaiki anak tangga ke- $n$  dengan cara:

- menaiki 1 anak tangga, atau
- menaiki 2 anak tangga sekaligus.

Untuk menaiki anak tangga ke-1 ( $n = 1$ ) hanya diperlukan satu cara, yaitu menaiki 1 anak tangga, untuk menaiki anak tangga ke-2 ( $n = 2$ ) dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu dengan menaiki 1 anak tangga 2 kali atau menaiki 2 anak tangga sekaligus, dan seterusnya. Tentukan nilai:

(15)

- $f(10)$
- $f(15)$

**Jawaban:**

a.  $f(10)$

Dengan menyusun kemungkinan penjumlahan 1 dan 2 (langkah)

$$1\ 1\ 1\ \dots\ 1, n(1) = 10, P(10; 10, 0) = 1$$

$$1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 2, n(1) = 8, P(9; 8, 1) = 9$$

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2, n(1) = 6, P(8; 6, 2) = 28$$

$$1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2, n(1) = 4, P(7; 4, 3) = 35$$

$$1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2, n(1) = 2, P(6; 2, 4) = 15$$

$$2\ 2\ 2\ 2\ 2, n(1) = 0, P(5; 0, 5) = 1$$

$$\begin{aligned} f(10) &= P(10; 10,0) + P(9; 8, 1) + P(8; 6, 2) + P(7; 4,3) + \\ &\quad P(6; 2,4) + P(5; 0,5) \\ &= 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 \\ &= 89 \end{aligned}$$

b.  $f(15)$

Dengan menyusun kemungkinan penjumlahan 1 dan 2 (langkah)

$$1\ 1\ 1\ \dots\ 1, n(1) = 15, P(15; 15, 0) = 1$$

$$1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 2, n(1) = 13, P(14; 13, 1) = 14$$

$$1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 2\ 2, n(1) = 11, P(13; 11, 2) = 78$$

...

$$1\ 1\ 1\ 2\ 2\ \dots\ 2, n(2) = 6, P(9; 3, 6) = 84$$

$$1\ 2\ 2\ \dots\ 2, n(2) = 7, P(8; 1, 7) = 8$$

$$\begin{aligned} f(15) &= P(15; 15,0) + P(14; 13, 1) + P(13; 11, 2) + P(12; 9,3) + \\ &\quad P(11; 7,4) + P(10; 5, 5) + P(9; 3, 6) + P(8; 1,7) \\ &= 1 + 14 + 78 + 220 + 330 + 252 + 84 + 8 \\ &= 987 \end{aligned}$$

6. Prodi IF ingin membuka mata kuliah baru yang bernama Komputasi Kalkulus yang terbuka untuk seluruh mahasiswa di ITB. Karena lab-lab di IF dan STI sudah memegang banyak mata kuliah, prodi ingin melakukan seleksi asisten langsung kepada mahasiswa IF dan STI tingkat 3. Masing masing jurusan membuka 3 kelas untuk angkatan yang berada di tingkat 3. Prodi IF membutuhkan jumlah asisten sebanyak 35 baik dari IF maupun STI karena kelasnya cukup banyak. Karena Kelas K02 dari IF memiliki rataan nilai yang lebih tinggi dibandingkan kelas lain, mereka dipastikan mendapatkan asisten lebih dari 14 orang. Sama dengan kelas tersebut, Kelas K01 dari STI juga diberikan asisten lebih dari 7 orang karena rataan nilai yang juga cukup tinggi. Kelas K03 dari IF tidak memiliki jumlah mahasiswa yang cukup banyak sehingga diberi asisten lebih dari 2 dan kurang dari sama dengan 6. Berapakah jumlah kemungkinan kombinasi asisten yang mungkin untuk memenuhi kuota diatas jika disebarakan berdasarkan semua kelas? (20)

### Jawaban:

Jumlah kelas = Jumlah kelas per jurusan (Setiap jurusan 3 kelas)\*jurusan (2 karena IF dan STI)

Jumlah kelas = 6

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 35$$

Kelas K02 IF (misal  $x_2$ ) dan Kelas K01 STI (misal  $x_4$ ) mendapatkan tempat lebih 14 dan 7 sehingga persamaan dikurangi 15 lalu 8 sehingga menjadi seperti ini ( $35-15-8 = 12$ ).

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

Untuk K03 IF (misal  $x_3$ ) akan dibagi per kasus

**Kasus 1:**  $x_3 = 3$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

$r = 9, n = 5$

$$C(n+r-1, r) = C(13,9) = 715$$

**Kasus 2:**  $x_3 = 4$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$$

$$r = 8, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(12, 8) = 495$$

**Kasus 3:**  $x_3 = 5$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$$

$$r = 7, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(11, 7) = 330$$

**Kasus 4:**  $x_3 = 6$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$$

$$r = 6, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(10, 6) = 210$$

**Jawaban:**  $715 + 495 + 330 + 210 = 1750$

**Alternatif Jawaban jika diasumsikan tidak ada kelas kosong:**

$x_1, x_5, x_6$  dikurangi 1 hasilnya:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$

**Kasus 1:**  $x_3 = 6$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$$

$$r = 6, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(10, 6) = 210$$

**Kasus 2:**  $x_3 = 5$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$$

$$r = 5, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(9, 5) = 126$$

**Kasus 3:**  $x_3 = 4$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$$

$$r = 4, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(8, 4) = 70$$

**Kasus 4:**  $x_3 = 3$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$$

$$r = 3, n = 5$$

$$C(n+r-1, r) = C(7, 3) = 35$$

**Jumlah:**  $210 + 126 + 70 + 35 = 441$

7. **(Bonus, tidak wajib)** Terdapat 7 kursi tersusun melingkar dan 7 mahasiswa yang masing-masing mengenakan kaos dengan warna berbeda. Dua mahasiswa yang mengenakan warna primer (merah, biru, kuning) tidak boleh duduk berdampingan. Berapa banyak susunan duduk yang mungkin? (5)

**Jawaban:**

Banyak susunan duduk melingkar dari 7 mahasiswa ( $7!$  disimbolkan  $(7-1)!$  untuk susunan melingkar) sedemikian sehingga ketiga pemakai kaos merah, biru, dan kuning tidak saling berdampingan adalah **144**.

**a. Total susunan melingkar tanpa syarat**

Untuk 7 orang berdiri di kursi melingkar, jumlah total susunan adalah  $(7-1)! = 6! = 720$ .

**b. Memisahkan kelompok primer dan non-primer**

- Ada 3 mahasiswa “primer” (merah, biru, kuning).
- Ada 4 mahasiswa “non-primer” (warna selain primer).

Kita ingin menempatkan ketiga primer sehingga tidak ada dua primer yang berdampingan.

**c. Menata non-primer sebagai kerangka**

- Pertama, susun keempat non-primer di kursi melingkar:

$$(4 - 1)! = 3! = 6 \text{ cara}$$

- Setelah itu kita punya 4 “celah” di antara non-primer (karena kursi melingkar, setiap non-primer membentuk sebuah celah sebelum orang berikutnya).

**d. Menempatkan primer di celah**

- Dari 4 celah tersedia, kita pilih 3 celah untuk menaruh masing-masing satu primer (agar primer tidak berdampingan):

$$C(4, 3) = 4$$

- Kemudian atur susunan 3 primer yang berbeda ke dalam 3 celah tersebut:

$$3! = 6$$

**e. Mengalikan semua pilihan**

Dengan prinsip multiplikasi, total konfigurasi yang memenuhi adalah  $(4 - 1)! \times 4 \times 3! = 144$

**Total nilai: 100 + bonus 5 = 105**