

Solusi Kuis ke-1 IF1220 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Relasi dan Fungsi
Dosen: Rinaldi Munir (K1), Arrival Dwi Sentosa (K2)
Rabu, 13 Maret 2025
Waktu: 55 menit

1. Ubahlah proposisi berikut ke dalam notasi ekspresi simbolik: (Nilai: 16)
- (a) Jika Suthasoma mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, maka Raden mengambil mata kuliah IF2123 Linier & Geometri bersama Suthasoma atau Marvin.
 - (b) Hanya jika Raden mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, kecuali Marvin mengambil mata kuliah IF2130 Arsitektur Komputer, maka Suthasoma akan mengambil IF2123 Aljabar Linier & Geometri.
 - (c) Jika Suthasoma dan Marvin tidak mengambil mata kuliah IF1220, maka Suthasoma mengambil mata kuliah IF2123
 - (d) Raden tidak mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier & Geometri bersama dengan Suthasoma atau Marvin

Jawaban:

- (a) Jika Suthasoma mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, maka Raden mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri bersama Suthasoma atau Marvin.
d : Suthasoma mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit
g : Raden mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
h : Suthasoma mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
i : Marvin mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Notasi ekspresi simbolik: $d \rightarrow (g \wedge (h \vee i))$
- (b) Hanya jika Raden mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, kecuali Marvin mengambil mata kuliah IF2130 Arsitektur Komputer, maka Suthasoma akan mengambil IF2123 Aljabar Linier & Geometri.

Ubah sesuai template implikasi: p hanya jika q

Suthasoma akan mengambil IF2123 Aljabar Linier & Geometri **hanya jika** Raden mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, kecuali Marvin mengambil mata kuliah IF2130 Arsitektur Komputer

- a : Suthasoma akan mengambil IF2123 Aljabar Linier & Geometri
- b : Raden mengambil mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit
- c : Marvin mengambil mata kuliah IF2130 Arsitektur Komputer

Notasi ekspresi simbolik: $a \rightarrow (b \wedge \sim c)$

- (c) Jika Suthasoma dan Marvin tidak mengambil mata kuliah IF1220, maka Suthasoma mengambil mata kuliah IF2123
j : Suthasoma mengambil mata kuliah IF1220
k : Marvin mengambil mata kuliah IF1220
d : Suthasoma mengambil mata kuliah IF2123
Notasi ekspresi simbolik: $\sim j \wedge \sim k \rightarrow d$
- (d) Raden tidak mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier & Geometri bersama dengan Suthasoma atau Marvin
g : Raden mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier & Geometri
h : Suthasoma mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier & Geometri
i : Marvin mengambil mata kuliah IF2123 Aljabar Linier & Geometri
Notasi ekspresi simbolik: $\sim(g \wedge (h \vee i))$

2. Buktikan dengan menggunakan definisi operasi dan hukum-hukum himpunan bahwa (Nilai: 20)
 $((\underline{A} \cup B) \cap A) \cup (((\underline{A} - (A \cap C)) \cup B) \cap \underline{B}) = \underline{A} \oplus B$

Jawaban:

$$\begin{aligned} & ((\underline{A} \cup B) \cap A) \cup (((\underline{A} - (A \cap C)) \cup B) \cap \underline{B}) \\ = & ((\underline{A} \cup B) \cap A) \cup (((\underline{A} \cap \underline{A} \cap C) \cup B) \cap \underline{B}) && \text{(Definisi selisih)} \\ = & ((\underline{A} \cup B) \cap A) \cup (((\underline{A} \cap (\underline{A} \cup C)) \cup B) \cap \underline{B}) && \text{(H. de Morgan)} \\ = & ((\underline{A} \cup B) \cap A) \cup ((\underline{A} \cup B) \cap \underline{B}) && \text{(H. absorpsi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\underline{A} \cup B) \cap (A \cup \underline{B}) && \text{(H. distribusi)} \\
&= (\underline{A} \cup B) - A \cup B && \text{(Definisi selisih)} \\
&= (\underline{A} \cup B) - \underline{(A \cap B)} && \text{(H. de Morgan)} \\
&= \underline{A} \oplus B && \text{(Definisi beda setangkep)}
\end{aligned}$$

3. Dari 1200 mahasiswa IF diketahui 582 menguasai Python, 627 menguasai C++, 543 menguasai Java, 227 menguasai Python dan C++, 307 menguasai Python dan Java, 250 menguasai C++ dan Java, 222 orang menguasai ketiganya. **(Nilai: 24)**
- (a) Berapa orang yang tidak menguasai ketiga jenis bahasa pemrograman di atas?
(b) Berapa orang yang hanya menguasai Python tetapi tidak menguasai C++ dan Java?

Jawaban:

Misalkan himpunan-himpunan berikut:

- P: himpunan mahasiswa yang menguasai Python, $|P|=582$
- C: himpunan mahasiswa yang menguasai C++, $|C|=627$
- J: himpunan mahasiswa yang menguasai Java, $|J|=543$

Diketahui juga:

- $|P \cap C| = 227$
- $|P \cap J| = 307$
- $|C \cap J| = 250$
- $|P \cap C \cap J| = 222$
- Jumlah total mahasiswa $|S| = 1200$

- (a) Menghitung jumlah mahasiswa yang menguasai minimal satu bahasa pemrograman
Gunakan prinsip inklusi-eksklusi tiga himpunan:

$$|P \cup C \cup J| = |P| + |C| + |J| - |P \cap C| - |P \cap J| - |C \cap J| + |P \cap C \cap J|$$

Substitusi nilai yang diketahui:

$$|P \cup C \cup J| = 582 + 627 + 543 - 227 - 307 - 250 + 222$$

Hitung nilainya:

$$|P \cup C \cup J| = 1752 - 784 + 222 = 1190$$

Menghitung jumlah mahasiswa yang tidak menguasai ketiga jenis bahasa pemrograman:

Jumlah mahasiswa yang tidak menguasai ketiganya adalah komplement dari $(P \cup C \cup J)$:

$$|S| - |P \cup C \cup J| = 1200 - 1190 = \mathbf{10}$$

- (b) Menghitung jumlah mahasiswa yang hanya menguasai Python saja:

$$|P - (C \cup J)| = |P| - |P \cap C| - |P \cap J| + |P \cap C \cap J|$$

$$|P - (C \cup J)| = 582 - 227 - 307 + 222$$

$$|P - (C \cup J)| = \mathbf{270}$$

4. Di sebuah perusahaan teknologi terdapat 6 karyawan dengan nama: Naufal, Scifo, Ojan, Ikhwan, Eka, dan Sutha. Gaji mereka tersusun secara berurutan dari yang tertinggi hingga terendah dengan besaran sebagai berikut (dalam ribuan rupiah): Naufal: 18, Scifo: 15, Ojan: 12, Ikhwan: 9, Eka: 6, Sutha: 3. Seorang analis HR, Riko, ingin memetakan gaji para karyawan menggunakan aturan berikut: Didefinisikan relasi R pada himpunan karyawan dengan ketentuan: **(Nilai: 20)**

I. Untuk dua karyawan x dan y , $x R y$ berlaku jika dan hanya jika gaji y adalah tepat setengah gaji x .

II. Jika tidak terdapat karyawan dengan gaji tepat setengah gaji x , maka x dipetakan ke dirinya sendiri, yaitu $x R x$.

- (a) Tuliskan anggota relasi R yang terbentuk berdasarkan aturan di atas, dengan notasi (x,y) , x dan y adalah nama.
(b) Apakah relasi R merupakan relasi kesetaraan? Jelaskan alasannya. **Bonus (5):** Tuliskan agar R menjadi relasi kesetaraan.

Jawaban:

- a) Untuk setiap karyawan, periksa:

- **Naufal (18):**

$$\frac{18}{2} = 9. \text{ Ada karyawan dengan gaji } 9, \text{ yaitu } \mathbf{Ikhwan}.$$

→ Pasangan: (Naufal, Ikhwan).

- **Scifo (15):**
 $\frac{15}{2} = 7.5$. Tidak ada karyawan dengan gaji 7.5.
 → Pasangan: (Scifo, Scifo).
- **Ojan (12):**
 $\frac{12}{2} = 6$. Ada karyawan dengan gaji 6, yaitu **Eka**.
 → Pasangan: (Ojan, Eka).
- **Ikhwan (9):**
 $\frac{9}{2} = 4.5$. Tidak ada karyawan dengan gaji 4.5.
 → Pasangan: (Ikhwan, Ikhwan).
- **Eka (6):**
 $\frac{6}{2} = 3$. Ada karyawan dengan gaji 3, yaitu **Sutha**.
 → Pasangan: (Eka, Sutha).
- **Sutha (3):**
 $\frac{3}{2} = 1.5$. Tidak ada karyawan dengan gaji 1.5.
 → Pasangan: (Sutha, Sutha).

Jadi, relasi awal R (menggunakan notasi pasangan berurut) adalah:

$R = \{(Naufal, Ikhwan), (Scifo, Scifo), (Ojan, Eka), (Ikhwan, Ikhwan), (Eka, Sutha), (Sutha, Sutha)\}$.

b) Syarat relasi kesetaraan adalah:

- **Refleksif:** Untuk setiap x , harus $x R x$.
 - Di sini, misalnya **Naufal** tidak memiliki (Naufal, Naufal) karena aturan memetakan Naufal ke Ikhwan (ada gaji setengahnya).
 Jadi, R tidak refleksif untuk semua elemen.
- **Simetris:** Jika $(x, y) \in R$, maka harus ada (y, x) .
 - Contoh: (Naufal, Ikhwan) ada, namun tidak ada (Ikhwan, Naufal).
 Jadi, R tidak simetris.
- **Transitif:** Jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka harus ada (x, z) .
 - Contoh: (Ojan, Eka) dan (Eka, Sutha) ada, sehingga seharusnya harus ada (Ojan, Sutha) agar transitif, tetapi belum ada.
 Jadi, R tidak transitif.

Karena tidak memenuhi ketiga syarat tersebut, relasi awal R belum merupakan relasi kesetaraan.

c) Bonus: Untuk mendapatkan relasi kesetaraan, kita harus menambahkan pasangan-pasangan sehingga relasi menjadi:

- **Refleksif:**
 Tambahkan pasangan (x, x) untuk karyawan yang belum memiliki pasangan ini.
 - Yang belum memiliki:
 Naufal : tambahkan (Naufal, Naufal).
 Ojan : tambahkan (Ojan, Ojan).
 Eka : tambahkan (Eka, Eka).
- **Simetris:**
 Untuk setiap $(x, y) \in R$ (dengan $x \neq y$), tambahkan (y, x) jika belum ada.
 - Dari (Naufal, Ikhwan) → tambahkan (Ikhwan, Naufal).

- Dari (Ojan, Eka) → tambahkan (Eka, Ojan).
- Dari (Eka, Sutha) → tambahkan (Sutha, Eka).

- **Transitif:**

Tambahkan pasangan yang diperlukan untuk menghubungkan rantai.

- Diperoleh rantai: (Ojan, Eka) dan (Eka, Sutha) → harus ditambahkan (Ojan, Sutha).
- Karena simetri harus dijaga, juga tambahkan (Sutha, Ojan).

Alternatif lain menggunakan klosur transitif

Setelah penambahan tersebut, perhatikan bahwa karyawan-karyawan terhubung akan membentuk kelas ekivalensi.

Relasi R menjadi : $\{(Naufal, Ikhwan), (Scifo, Scifo), (Ojan, Eka), (Ikhwan, Ikhwan), (Eka, Sutha), (Sutha, Sutha), (Naufal, Naufal), (Ojan, Ojan), (Eka, Eka), (Ikhwan, Naufal), (Eka, Ojan), (Sutha, Eka), (Ojan, Sutha), (Sutha, Ojan)\}$

5. Tentukan sifat dari fungsi berikut. Apakah fungsi tersebut injektif, surjektif, bijektif, atau bukan ketiganya? Jelaskan alasannya! (Nilai: 20)

- (a) $f(x) = |x^2 - 4|, f: R \rightarrow R$
- (b) $g(x) = 2x + 5, g: R \rightarrow R$
- (c) $h(x) = e^x, h: R \rightarrow R$

Jawaban:

a. Bukan ketiganya

- i. Bukan injektif, karena ada dua nilai berbeda yang menghasilkan nilai fungsi yang sama, misalnya $f(-2) = f(2) = 0$.
- ii. Bukan surjektif, karena tidak semua bilangan real dapat dicapai (nilai negatif tidak mungkin muncul karena nilai absolut).
- iii. Dari I dan ii maka f tidak bijektif

b. Bijektif

- i. Injektif, karena jika $g(a) = g(b)$, maka $2a + 5 = 2b + 5$ yang berarti $a = b$.
- ii. Surjektif, karena untuk setiap $y \in R$, kita bisa menemukan $x = \frac{y-5}{2}$ yang memenuhi $g(x) = y$.

Karena injektif dan surjektif, maka fungsi ini bijektif.

c. Injektif

- i. Injektif, karena fungsi eksponensial bersifat monoton naik, sehingga tidak ada dua nilai input berbeda yang memiliki output yang sama.
- ii. Bukan surjektif, karena untuk semua x , e^x selalu positif, sehingga tidak mungkin mencapai nilai negatif dalam R .