Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi UTS IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Nur Ulfa Maulidevi, Fariska Zakhralatifa Ruskanda, Rinaldi Munir, Monterico Adrian
Jumat, 13 Oktober 2023
Waktu: 100 menit

1. Pada sebuah eksperimen dengan 1000 pot tanaman (pot tanaman dinomori dengan angka 1 sampai 1000), ternyata tanaman yang hidup hanyalah tanaman bernomor ganjil yang habis dibagi 13 namun tidak habis dibagi 3. Berapa banyak jumlah seluruh tanaman yang hidup? **(Nilai: 15)**

Jawaban:

Total pot = 1000

A = himpunan pot tanaman yang habis dibagi 2

B = himpunan pot tanaman yang habis dibagi 3

C = himpunan pot tanaman yang habis dibagi 13

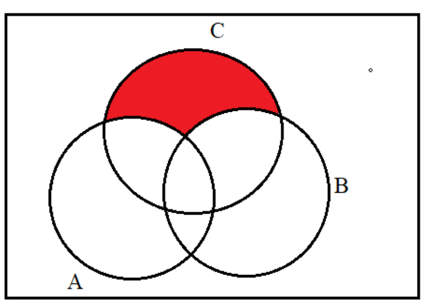
n(C) = floor(1000/13) = 76

n(A ∩ C) = floor(1000/26) = 38

n(B ∩ C) = floor(1000/(3 x 13)) = 25

n(A ∩ B ∩ C) = floor(1000/(2 x 3 x 13) = 12

Ditanya: n(~A ∩ C ∩ ~B) = ?



Jumlah tanaman yang hidup = n(~A ∩ C ∩ ~B)

= n(C) - (n(A ∩ C) + n(B ∩ C) - n(A B ∩ C))

= 76 - (38 + 25 - 12)

= 25

2. Diketahui A adalah himpunan tahun yang habis dibagi 100 dan B adalah himpunan tahun kabisat yang habis dibagi 100 (Defenisi: tahun kabisat adalah tahun yang habis dibagi 4 namun tidak habis dibagi 100 atau tahun yang habis dibagi 400). Tentukan apakah suatu relasi R termasuk injektif, surjektif, bijektif, bukan fungsi, atau bukan keempatnya beserta alasannya jika:
    1. R adalah suatu relasi dari A ke B yang memetakan nilai yang sama
    2. R adalah suatu relasi dari B ke A yang memetakan nilai yang sama

(Nilai: 10)

Jawaban:

A = {100, 200, ..., 1900, 2000, ...}

B = {400, 800, ..., 1600, 2000, …}

R = {(400, 400), (800, 800), ..., (1600, 1600), (2000, 2000), …}

a. **bukan fungsi, karena tidak semua elemen pada A dapat dihubungkan ke elemen B (memiliki nilai yang sama) (poin: 5)**
b. **injektif, karena semua elemen B tidak ada yang memiliki bayangan di A yang sama, dan tidak surjektif yaitu tidak semua elemen A merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen B. karena tidak surjektif maka tidak bijektif (poin: 5)**

3. Buatlah klosur refleksif, klosur setangkup, dan klosur menghantar dari relasi R = {(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2)} **(Nilai: 15)**

Jawaban:

a. **Refleksif (poin: 3)**

Δ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
R $\cup$ Δ = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 4)}

b. **Setangkup (poin: 3)**

R^{-1} = {(2, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 3)}
$R \cup R^{-1}$ = {(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

c. Menghantar (poin: 9)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = M_R \, . \, M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 \, . \, M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^4 = M_R^3 \, . \, M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

4. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, nilai dari $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi 21. **(Nilai: 10)**

Jawaban:

(i) Basis Induksi:

Untuk n = 1, diperoleh $4^{(1)+1} + 5^{2(1)-1} = 4^2 + 5^1 = 16 + 5 = 21$. Bilangan 21 habis bila dibagi dengan 21 sendiri sehingga pernyataan *p*(1) bernilai benar.

(ii) Langkah Induksi:

Misalkan *p*(n) bernilai benar, yaitu pernyataan

$$4^{n+1} + 5^{2n-1} \text{ habis dibagi } 21$$

Akan dibuktikan bahwa *p*(n+1) juga bernilai benar, yaitu

$$4^{n+2} + 5^{2(n+1)-1} \text{ habis dibagi } 21$$

Berikut ini adalah langkah induksi untuk membuktikan kebenaran dari *p*(n+1).

$$\begin{aligned} 4^{n+2} + 5^{2(n+1)-1} &= 4^{n+1} . 4^1 + 5^{2n+2-1} \\ &= 4(4^{n+1}) + 5^{2n-1} . 5^2 \\ &= 4(4^{n+1}) + 25(5^{2n-1}) \\ &= 4(4^{n+1}) + 4(5^{2n-1}) + 21(5^{2n-1}) \\ &= 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21(5^{2n-1}) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

- **$21(5^{2n-1})$ habis dibagi 21**
- **$4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi dengan 21 sesuai dengan hipotesis induksi *p*(n)**
- **$4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21(5^{2n-1})$ merupakan penjumlahan dua buah bilangan yang sama-sama habis dibagi dengan 21 sehingga $4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21(5^{2n-1})$ juga habis dibagi dengan 21.**

Maka, pernyataan p(n+1) bernilai benar.

Karena langkah (i) dan langkah (ii) telah diperlihatkan dengan benar, maka terbukti bahwa untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi 21.

5. Tentukan apakah relasi berikut adalah relasi rekurens homogen lanjar atau bukan, jelaskan dengan singkat untuk tiap butir soal. Tanpa alasan, jawaban tidak akan dinilai. **(Nilai: 10)**

a. $a_n = 6\, a_{n-1} - 11\, a_{n-2} + 6$

b. $a_n = \; - a_{n-2}$

c. $a_n = a_{n-3} + 2\, a_{n/2}$

d. $a_n = a_{n-3} \,.\, 4\, a_{n-4}$

e. $a_n = \; a_{n-5}$

Jawaban:

a. **Bukan, karena persamaan tersebut tidak bersifat homogen, mengandung konstanta 6 namun tidak bukan kelipatan dari a_j.**
b. Homogen lanjar, lanjar karena sisi kanan adalah penjumlahan dari pemanggilan rekursif, homogen juga karena tidak ada suku yang bukan merupakan kelipatan dari a_j.
c. Bukan, karena term ke-2 di sisi kanan tanda = bukan merupakan pemanggilan rekursif dari sekuens sebelumnya.
d. Bukan, karena sisi kanan tanda = bukankah penjumlahan linear, tapi perkalian.
e. Homogen lanjar dengan derajat 5, lanjar karena berisi sekuens dari rekursif sebelumnya (5 tahap), homogen karena term merupakan kelipatan dari pemanggilan rekursif sebelumnya.

6. Untuk setiap relasi rekurens berikut, tentukan apakah solusi yang disebutkan benar atau salah untuk relasi rekurens tersebut, atau tidak dapat ditentukan. Jelaskan dengan langkah yang seharusnya dilakukan untuk menghasilkan jawaban, tanpa menunjukkan langkah/ alasan, jawaban tidak dinilai. **(Nilai: 9)**

a. Formula $a_n = 1 - 2^n + (2 \cdot 3^n)$ adalah solusi dari relasi rekurens: $a_n = 6\, a_{n-1} - 11\, a_{n-2} + 6\, a_{n-3}$; dengan $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.

b. Formula $a_n = 4^n$ adalah solusi dari relasi rekurens: $a_n = 3\, a_{n-1} + 4\, a_{n-2}$; dengan $a_1 = 4$.

c. Formula $a_n = 3^n + 2$ adalah solusi relasi rekurens: $a_n = 3\, a_{n-1} + 2$; dengan $a_0 = 1$.

Jawaban:

a. **Kita coba dengan cara substitusi formula ke dalam relasi rekurens.**

$a_n = 6 a_{n-1} - 11 a_{n-2} + 6 a_{n-3} \Rightarrow a_n$

$= 6 (1 - 2^{n-1} + (2.3^{n-1})) - 11 (1 - 2^{n-2} + (2.3^{n-2})) + 6 (1 - 2^{n-3} + (2.3^{n-3}))$

$= 6 - 6.2^n/2 + 12.3^n/3 - 11 + 11.2^n/4 - 22.3^n/9 + 6 - 6.2^n/8 + 12.3^n/27$

$= 1 + (-6/2 + 11/4 - 6/8).2^n + (12/3 - 22/9 +12/27)\ 3^n$

$= 1 + (-1)\ 2^n + 2.3^n$

$= 1 - 2^n + (2 \cdot 3^n)$

Jadi benar formula tersebut adalah solusi dari relasi rekurens.

b. Kita coba dengan cara substitusi formula ke dalam relasi rekurens.

$a_n = 3 a_{n-1} + 4 a_{n-2}$

$= 3 (4^{n-1}) + 4 (4^{n-2})$

$= \frac{3}{4} 4^n + \frac{1}{4} 4^n$

$= 4^n$

Jadi benar formula tersebut adalah solusi dari relasi rekurens.

c. Kita coba dengan cara substitusi formula ke dalam relasi rekurens.

$a_n = 3 a_{n-1} + 2$

$= 3 (3^{n-1} + 2) + 2$

$= 3^n + 6 + 2$

$= 3^n + 8$

Jadi formula tersebut bukan solusi dari relasi rekurens.

7. Sebuah unit usaha kelas menengah yang menjual produk aksesoris buatan tangan, berusaha memprediksi banyaknya produk yang bisa dihasilkan pada beberapa tahun mendatang. Pembuatan produk ini bergantung pada harga bahan, dan trend daya beli masyarakat. Perusahaan ini memulai dengan membuat seribu produk, dan satu tahun berikutnya bisa membuat dua ribu produk. Setelah diamati ternyata di tahun ke-n, banyaknya produk yang bisa dibuat adalah dua kali dari tahun sebelumnya, kemudian dikurangi banyaknya produk yang dibuat dua tahun sebelumnya. **(Nilai: 6)**

a. Tentukan relasi rekurens untuk prediksi banyaknya produk yang dibuat di tahun ke-n (dalam satuan ribu), lengkap dengan basisnya.

b. Tentukan banyaknya produk yang bisa dibuat oleh perusahaan pada tahun ke-24. Tuliskan dengan langkah lengkap menggunakan pendekatan sistematis untuk mencari solusi relasi rekurens.

Jawaban:

a. **$a_n = 2 a_{n-1} - a_{n-2}$; dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$**

b. $a_n = 2 a_{n-1} - a_{n-2}$

Persamaan karakteristik: $r^2 - 2r + 1 = 0$
Akar persamaan kuadrat: $(r - 1)(r - 1) = 0 \rightarrow$ akar kembar: $r_0 = 1$.
Solusi: $a_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2 n(1)^n$
$a_0 = 1 \rightarrow 1 = \alpha_1 + \alpha_2.0 \rightarrow \alpha_1 = 1$
$a_1 = 2 \rightarrow 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 2 = 1 + \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = 1$
Jadi solusi relasi rekurens: $a_n = 1 + n$
Pada tahun ke-24, banyaknya produk yang bisa dibuat:
$a_{24} = 1 + 24 = 25$
Jadi pada tahun ke-24 banyaknya produk yang bisa dibuat perusahaan adalah 25 ribu.

8. Gunakan peta Karnaugh untuk membuat rangkaian logika yang menerima masukan berupa kode biner dari suatu digit desimal dan menghasilkan keluaran 1 jika digit yang berkoresponden dengan masukan tersebut habis dibagi 3 atau jumlah digit 1-nya 3 buah. Tuliskan fungsi minimasi dalam bentuk baku SOP dan gambarkan rangkaian logikanya. **(Nilai: 15)**

Jawaban:

Tabel Kebenaran untuk fungsi f yaitu fungsi yang menerima masukan berupa kode biner dari suatu digit desimal dan menghasilkan keluaran 1 jika digit yang berkoresponden dengan masukan tersebut habis dibagi 3 atau jumlah digit 1-nya 3 buah:

Biner masukan				Decimal	Keluaran
w	x	y	z		f
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	2	0
0	0	1	1	3	1
0	1	0	0	4	0
0	1	0	1	5	0
0	1	1	0	6	1
0	1	1	1	7	1
1	0	0	0	8	0
1	0	0	1	9	1
1	0	1	0	-	X
1	0	1	1	-	X
1	1	0	0	-	X
1	1	0	1	-	X
1	1	1	0	-	X
1	1	1	1	-	X

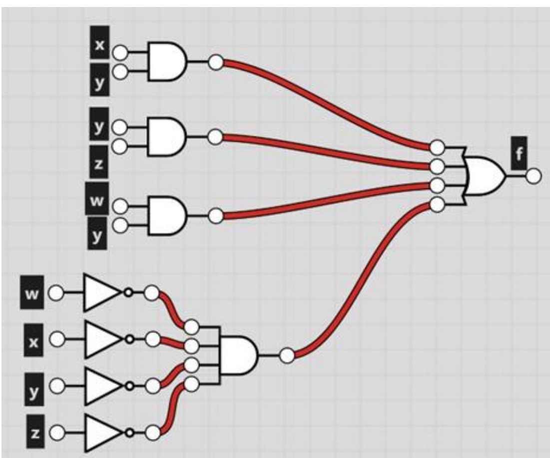
Peta Karnaugh untuk penyederhanaan f:

	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	0	1	1
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

Hasil penyederhanaan:

f(w,x,y,z) = xy + yz + wz + w’x’y’z’

Rangkaian Logika hasil penyederhanaan f:



9. Diketahui rangkaian logika berikut: **(Nilai: 10)**

a. Deskripsikan fungsi apa yang direpresentasikan rangkaian logika tersebut dalam bentuk uraian, bukan persamaan fungsi.
b. Sederhanakan rangkaian logika tersebut, dan tuliskan hasil penyederhanaannya dalam bentuk fungsi dalam bentuk POS dan gambarkan juga dalam bentuk rangkaian logika.

Jawaban:

a. **[Nilai 5] Fungsi f adalah fungsi yang menerima masukan kode biner 3 bit yang merepresentasikan bilangan desimal kurang dari 8, menghasilkan keluaran nilai 1 jika desimalnya genap, dan nilai 0, jika bukan genap. [Nilai 5]**

b. [Nilai 5] f(x,y,z) = xyz’ + xy’z’ + x’yz’ + x’y’z’

Penyederhanaan dengan Peta Karnaugh dalam bentuk POS:

	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

f(x,y,z) = z’ (dalam POS)

Rangkaian logika: