Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi UAS IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Nur Ulfa Maulidevi, Fariska Zakhralatifa Ruskanda, Rinaldi Munir, Monterico Adrian
Senin, 11 Desember 2023
Waktu: 150 menit (2,5 jam)

Berdoalah terlebih dahulu sebelum ujian dimulai

1. Sebuah peubah acak x adalah sebuah bilangan bulat positif yang merupakan faktor prima terbesar dari bilangan sisa pembagian 9^{51} dibagi dengan 53. Bilangan x digunakan sebagai umpan (*seed*) untuk pembangkit bilangan acak; dan x juga akan digunakan sebagai salah satu angka yang digunakan pada kode ISBN 947-2**x**09-97**t**, dengan t adalah karakter ujinya.
   (a) Tentukan semua faktor dari bilangan sisa pembagian 9^{51} dibagi dengan 53.
   (b) Jika dibuat pembangkit bilangan acak yang berbasis kekongruenan lanjar (linear congruential generator atau LCG) dengan formula: Xn = (4Xn–1 + b) mod m; dengan umpan (seed) adalah bilangan x (lihat uraian soal di atas), nilai b adalah 11, dan m adalah 17; tentukan bilangan acak ke-2 (X_2) yang dihasilkan.
   (c) Tuliskan kode ISBN 947-2**x**09-97**t** yang lengkap dengan angka (termasuk karakter ujinya), dengan bilangan x sesuai dengan uraian pada soal di atas.

   Catatan: jawaban harus dilengkapi dengan cara memperoleh setiap bilangan yang terlibat dalam penentuan jawaban. **(Nilai: 15)**

Jawaban:

a. Penentuan sisa pembagian 9^{51} dibagi dengan 53:
   PBB(9,53) = 1; dan 53 adalah bilangan prima, sehingga berlaku teorema Fermat: $9^{53-1} \equiv 9^{52} \equiv 1$ (mod 53)
   Maka: $9^{51} \equiv 9^{(52-1)}$ (mod 53)
   $\equiv 9^{52} . 9^{-1}$ (mod 53)
   $\equiv 9^{-1} . 1$ (mod 53)
   $\equiv 9^{-1}$ (mod 53) → balikan dari 9 dalam mod 53
   Misal balikan 9 dalam mod 53 adalah y, maka:
   9.y ≡ 1 (mod 53) → y = (1 + 53k)/ 9 → jika k =1 maka y = 6
   Jadi sisa pembagian 9^{51} dibagi dengan 53 adalah 6.
   Faktor dari 6 adalah: 1, 2, 3, 6.

b. Umpan X_0 adalah x, yaitu faktor prima terbesar dari sisa pembagian 9^{51} dibagi dengan 53. Jadi x = 3.
   X_1 = (4.3 + 11) mod 17 = 6
   X_2 = (4.6 + 11) mod 17 = 1
   Jadi X_2 = 1.

c. Karena x = 3, maka karakter uji untuk ISBN 947-2**x**09-97 adalah:
   t = $\sum_{i=1}^{9} ix_i$ mod 11
   =[(1x9) + (2x4) + (3x7) + (4x2) + (5x3) + (6x0) + (7x9) + (8x9) + (9x7)] mod 11
   = 259 mod 11
   = 6
   Jadi kode ISBN: 947-2**3**09-97-**6** (Nilai 1)

2. Terdapat sistem kekongruenan berikut ini: **(Nilai 10)**

$x \equiv 5 \pmod{6}$, $x \equiv 3 \pmod{10}$, $x \equiv 8 \pmod{15}$

(a) Apakah sistem kekongruenan tersebut dapat langsung diselesaikan dengan Chinese Remainder Theorem (CRT)? Jelaskan dengan singkat jawaban anda.

(b) Tentukan solusi dari sistem kekongruenan tersebut; jika menurut anda tidak ada solusinya cukup tuliskan "Tidak ada solusi".

Jawaban:

a. Tidak dapat langsung diselesaikan dengan CRT, karena modulo 6 dan 10 PBB nya ≠ 1, oleh karena itu bentuk sistem kekongruenan tersebut perlu diubah pada sistem padanannya, dengan cara disederhanakan, sedemikian sehingga modulo antar kekongruenan memiliki PBB = 1 atau semuanya relatif prima.

b. Penyederhanaan sistem kekongruenan agar bisa memanfaatkan CRT:

$x \equiv 5 \pmod{6}$ menjadi $x \equiv 1 \pmod{2}$

$x \equiv 3 \pmod{10}$ menjadi $x \equiv 2 \pmod{3}$

$x \equiv 8 \pmod{15}$ menjadi $x \equiv 3 \pmod{5}$

$m = 2.3.5 = 30$

$M1 = \mathbf{15}$; $M2 = \mathbf{10}$; $M3 = \mathbf{6}$.

$y1 = \mathbf{1}$ (yaitu $15^{-1} \pmod{2}$); $y2 = \mathbf{1}$ (yaitu $10^{-1} \pmod{3}$); $y3 = \mathbf{1}$ (yaitu $6^{-1} \pmod{5}$)

Maka solusi unik dari sistem kekongruenan tersebut adalah:

$x \equiv a1M1y1 + a2M2y2 + a3M3y3 = 1 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 = \mathbf{53}$

$\mathbf{\equiv 23 \pmod{30}}$

3. Jabarkan $(4a - 2y)^4$ menggunakan teorema binomial. **(Nilai: 10)**

Jawaban:

$(4a - 2y)^4$

$= C(4, 0)(4a)^4 + C(4, 1)(4a)^3(-2y) + C(4, 2)(4a)^2(-2y)^2 + C(4, 3)(4a)(-2y)^3 + C(4, 4)(-2y)^4$

$= 1 \times 256a^4 + 4 \times 64a^3 \times -2y + 6 \times 16a^2 \times 4y^2 + 4 \times 4a \times -8y^3 + 1 \times 16y^4$

$= 256a^4 - 512a^3y + 384a^2y^2 - 128ay^3 + 16y^4$

4. Suatu tim sepakbola memiliki 23 pemain dengan rincian 3 penjaga gawang, 7 pemain bertahan, 8 pemain tengah, dan 5 penyerang. **(Nilai: 15)**

(a) Tentukan berapa susunan pemain yang dapat dibuat jika 11 pemain yang dimainkan oleh tim tersebut memiliki formasi 3 pemain bertahan, 5 pemain tengah, dan 2 penyerang (plus 1 penjaga gawang)

(b) Jika selama pertandingan berlangsung dapat dilakukan pergantian pemain dengan pemain cadangan sebanyak 3 kali, tentukan banyak kemungkinan pertukaran pemain yang dapat dilakukan dengan aturan:

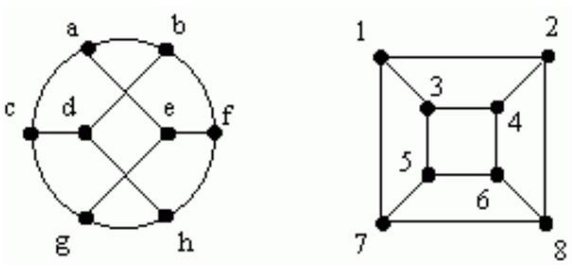
i. pemain yang sudah diganti tidak dapat bermain kembali
ii. pemain manapun dalam tim yang bermain dapat digantikan oleh pemain manapun dalam tim cadangan walaupun berbeda posisinya
iii. pemain cadangan yang sudah masuk menggantikan diasumsikan tidak akan diganti dengan pemain cadangan yang lain

Jawaban:

a. 1 dari 3 penjaga gawang: C(3, 1)
   3 dari 7 pemain bertahan: C(7, 3)
   5 dari 8 pemain tengah: C(8, 5)
   2 dari 5 penyerang: C(5, 2)
   Maka susunan yang dapat dibuat: C(3, 1) x C(7, 3) x C(8, 5) x C(5, 2)
   = 3 x 35 x 56 x 10 = 58800 cara

b. Pergantian pertama: 12 x 11 = 132
   Pergantian kedua: 11 x 10 = 110
   Pergantian ketiga: 10 x 9 = 90
   Maka banyak kemungkinan pertukaran: 132 x 110 x 90 = 1306800 kemungkinan

5. Perhatikan kedua graf berikut. **(Nilai: 10)**



(a) Apakah kedua graf di atas isomorfik? Jelaskan alasannya.
(b) Manakah di antara kedua graf tersebut yang merupakan graf Euler, semi-Euler, Hamilton, atau semi-Hamilton? Sebutkan alasannya.

Jawaban:

a. Isomorfik. Karena dapat ditemukan korespondensi simpul kedua graf sbb:
   a → 2, b → 4, c → 1, d → 3, e → 8, f → 6, g → 7, h → 5
b. Keduanya bukan graf Euler, karena semua simpul tidak berderajat genap, tidak sesuai teorema 1.
   Keduanya bukan graf semi-Euler, karena semua simpul derajat ganjil, tidak sesuai teorema 2.
   Keduanya graf Hamilton, contoh sirkuit 1-2-8-7-5-6-4-3-1 atau c-a-e-g-h-f-b-d-c.
   Merupakan graf semi-Hamilton, contoh lintasan 1-2-8-7-5-6-4-3 atau c-a-e-g-h-f-b-d

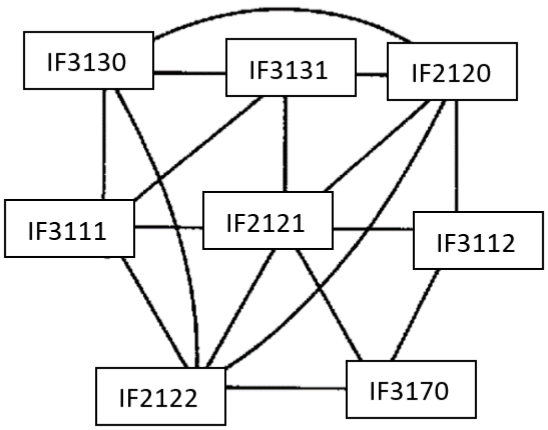
6. Prodi Teknik Informatika akan mengadakan UAS untuk 8 mata kuliah tingkat 2 dan 3. Berhubung keterbatasan waktu, semua ujian tersebut harus dilaksanakan dalam 1 hari yang sama. 1 hari dapat terdiri atas beberapa sesi ujian. Aturan penjadwalan ujian yang harus dipenuhi adalah mata kuliah wajib tingkat 2 tidak boleh saling bentrok, begitu juga mata kuliah wajib tingkat 3. Berikut adalah mata kuliah wajib tingkat 2: IF2120, IF2121, IF2122, dan tingkat 3: IF3111, IF3130, IF3131. Kemudian, ada beberapa mahasiswa tingkat 3 yang mengulang mata kuliah tingkat 2, sehingga jadwal ujiannya tidak boleh bentrok. Ditambah lagi, juga ada beberapa mahasiswa tingkat 2 yang mengambil mata kuliah tingkat 3. Berikut data mata kuliah yang tidak boleh berbarengan karena alasan tersebut.
   IF3130 tidak dapat berbarengan dengan MK IF2120, IF2122
   IF3131 tidak dapat berbarengan dengan MK IF2120, IF2121
   IF2120 tidak dapat berbarengan dengan MK IF3130, IF3131, IF3112
   IF3111 tidak dapat berbarengan dengan MK IF2121, IF2122
   IF2121 tidak dapat berbarengan dengan MK IF3131, IF3111, IF3112, IF3170
   IF3112 tidak dapat berbarengan dengan MK IF2120, IF2121, IF3170
   IF2122 tidak dapat berbarengan dengan MK IF3130, IF3111, IF3170
   IF3170 tidak dapat berbarengan dengan MK IF2121, IF3112, IF2122
   (a) Gambarkan graf yang merepresentasikan penjadwalan sesi ujian di atas, jelaskan apa arti dari simpul dan sisinya.

(b) Berapa minimal jumlah sesi ujian yang diperlukan untuk mengadakan ujian dalam 1 hari tersebut? Tuliskan mata kuliah apa saja dalam setiap sesi ujian.

(Nilai: 15)

Jawaban:

a. Graf yang merepresntasikan persoalan tersebut adalah sbb, dengan menggunakan simpul: nama MK, dan sisi: kedua MK tidak boleh berbarengan.



Catatan: boleh juga menggambarkan graf dengan sisi: kedua MK boleh berbarengan, dengan keterhubungan yang berbeda dengan graf di atas.

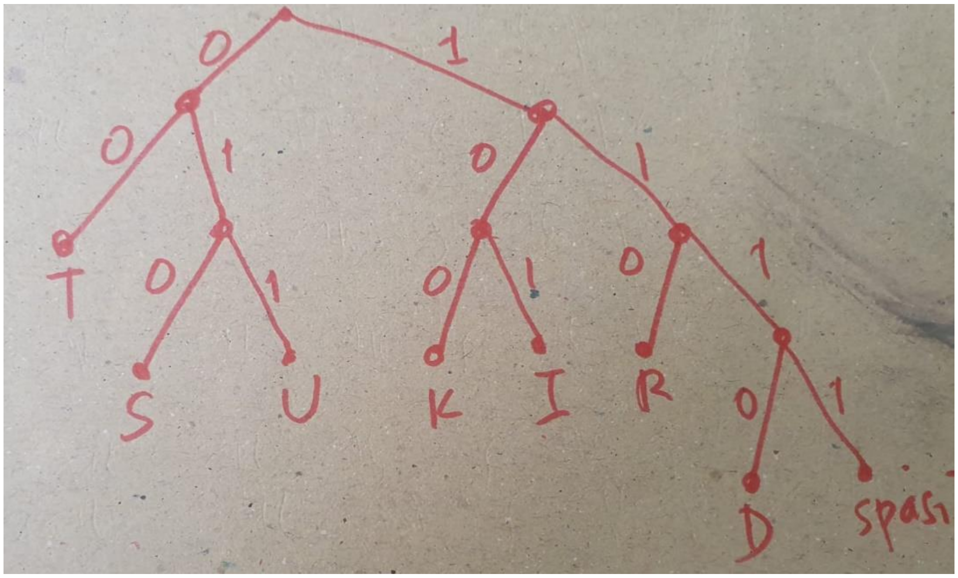
b. Penjadwalan menggunakan prinsip Graph coloring, yaitu mencari jumlah warna minimal untuk mewarnai graf.
Hasil pewarnaan mendapatkan bilangan kromatis 3. Artinya ada 3 sesi ujian.
I: Merah: IF3130, IF2121
II: Biru: IF2120, IF3111, IF3170
III: Hijau: IF3131, IF3112, IF2122

7. Kode Huffman adalah contoh sebuah kode prefix. Diketahui hasil pengkodean Huffman sebuah pesan sebagai berikut:
T = 00, S = 010, U = 011,K = 100, I = 101, R = 110, D = 1110, spasi = 1111
(a) Bangunlah pohon Huffman yang bersesuain dengan kode tersebut
(b) Lakukan decoding pada pesan dalam bentuk kode Huffman sebagai berikut:
01000110011100000111101111111010101010011010100
(c) Berapa nisbah (ratio) pemampatan yang dihasilkan jika dibandingkan dengan penkodean tetap (fixed code), setiap karakter = 8 bit?

(Nilai: 15)

Jawaban:

(a) Pohon Huffman



(b) STRUKTUR DISKRIT

(c) Untuk fixed code, setiap karakter = 8 bit, jadi pesan STRUKTUR DISKRIT membutuhkan 16 x 8 = 128 bit.

Total bit kode Huffman untuk pesan STRUKTUR DISKRIT = 47 bit

Jadi, nisbah pemampatan = 47/128 x 100% =

8. (a) Tentukan kompleksitas waktu T(n) dari algoritma di bawah ini dari banyaknya operasi penjumlahan (+) dan perkalian (*), lalu nyatakan T(n) dalam notasi O-besar, Omega-Besar,dan Tetha-besar

```
for i ← 1 to n do
   j ← n
   temp ← 0
   while (i ≤ j) do
        for k ← 1 to n do
            temp ← temp + A[i] * B[j][k]
        end for
        j ← j – 1
        res[i] ← temp
   end while
end for
```

(b) Diberikan waktu proses T(n) beberapa algoritma untuk menyelesaikan sebuah masalah dengan algoritma tertentu. Tambahkan baris ke-6 dengan T(n) dari jawaban (a) di atas, lalu tentukan notasi Big-O untuk nomor 1 sampai 6 (tulis ulang tabel pada lembar jawaban dan isi kolom sebelah kanan). Selanjutkan urutkan kompleksitas waktu algoritma berdasarkan waktu yang tercepat hingga terlama berdasarkan notasi Big-O tersebut.

	$\mathbf{T}(\boldsymbol{n})$	$\mathbf{O}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}))$
1	$(n^2+8)(n+1)$	
2	$(n\ \log n + n^2)(n^3+2)$	
3	$(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$	
4	$n\ \log(n^2+1) + n^2 \log n$	
5	$(n\ \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2+1)$	

(Nilai: 10)

Jawaban:

(a) Di dalam iterasi for-loop, pernyataan $temp \leftarrow temp + A[i] * B[j][k]$ dihitung sebagai dua operasi (pertambahan dan perkalian). Sehingga banyaknya operasi tiap iterasi dalam loop *k* adalah 2.

Banyaknya iterasi pengulangan = (n + (n-1) + (n-2) + ... + 1)(n) = $\frac{(n+1)(n)}{2}$. n = $\frac{1}{2}$(n^3 + n^2)

Secara keseluruhan, T(n) = 2 ($\frac{1}{2}$(n^3 + n^2)) = n^3 + n^2

Teorema 3 (lihat slide), bila $T(n) = a_m n^m + a_{m-1}{}^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ adalah polinom derajat $\leq m$ maka $T(n)$ adalah berorde n^m. Karena T(n) = n^3 + n^2 , maka menurut Teorema 3 tersebut T(n) berorde n^3 . Jadi, T(n) = O(n^3), T(n) = Ω(n^3) dan T(n) = θ(n^3).

(b)

	$\mathbf{T}(\boldsymbol{n})$	$\mathbf{O}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}))$
1	$(n^2+8)(n+1)$	$O(n^3)$
2	$(n\ \log n + n^2)(n^3+2)$	$O(n^5)$
3	$(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$	$O(n^3 n!)$
4	$n\ \log(n^2+1) + n^2 \log n$	$O(n^2 \log n)$
5	$(n\ \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2+1)$	$O(n^2(\log n)^2)$
6	(n^3+n^2)	$O(n^3)$

Urutan dari tercepat ke terlambat: **4, 5, 1 = 6, 2, 3**

9. Apa perkiraan nilai untuk mata kuliah ini (A/AB/B/BC/C/D/E)? **(Nilai: 2)**