Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Teori Bilangan, Kombinatorial
Dosen: Rinaldi Munir, Fariska Zakhralativa, Nur Ulfa Maulidevi, Monterico Adrian
Rabu, 1 November 2023
Waktu: 50 menit

1. Tentukan minimal 5 buah nilai balikan (*inverse*) dari -7 (mod 13). (Keterangan: pakai cara perhitungan)

Jawaban:

Mislakan balikan -7 (mod 13) = x, maka

$-7x \equiv 1 \pmod{13}$
$-7x = 1 + 13k$
$x = (1 + 13k)/(-7)$

Untuk k=1 diperoleh nilai x yang bulat, yaitu $x = (1 + 13(1))/(-7) = 14/(-7) = -2$
Diperoleh balikan -7 (mod 13) yang pertama adalah -2
Lima balikan -7 (mod 13) adalah -2, 11, 24, 37, 50

2. Pada suatu kelas akan dilakukan pembagian kelompok untuk tugas besar. Para asisten sedang mendiskusikan berapa banyaknya anggota untuk satu kelompok, di mana hanya terdapat 3 pilihan yaitu, 5 anggota per kelompok, 6 anggota per kelompok, atau 7 anggota per kelompok. Namun, banyaknya anggota untuk satu kelompok tidak habis membagi banyaknya mahasiswa di kelas tersebut, sehingga terdapat kelompok yang jumlah anggotanya lebih banyak atau lebih sedikit dari kelompok lainnya. Jika kelompok terdiri dari 5 mahasiswa, maka akan ada satu kelompok yang beranggota 6 mahasiswa dan sisanya beranggota 5 mahasiswa. Jika kelompok terdiri dari 6 mahasiswa, maka akan ada 1 kelompok yang beranggota 5 mahasiswa dan sisanya beranggota 6 mahasiswa. Jika kelompok terdiri dari 7 mahasiswa, maka akan ada 3 kelompok yang beranggota 8 mahasiswa dan sisanya beranggota 7 mahasiswa. Tentukan banyaknya mahasiswa di kelas tersebut jika diketahui banyaknya mahasiswa di kelas tersebut lebih dari 100 mahasiswa dan kurang dari 200 mahasiswa.

Jawaban:

Misal x adalah banyaknya mahasiswa pada kelas tersebut. Kita dapat menerjemahkan pernyataan-pernyataan pada soal menjadi suatu kekongruenan sebagai berikut.

Jika kelompok terdiri dari 5 mahasiswa, maka akan ada satu kelompok yang beranggota 6 mahasiswa dan sisanya beranggota 5 mahasiswa

$x = 6 + 5k$
$x = 1 + 5 + 5k$
$x = 1 + 5(k + 1)$
$x \equiv 1 \pmod{5} \qquad \cdots(1)$

Jika kelompok terdiri dari 6 mahasiswa, maka akan ada 1 kelompok yang beranggota 5 mahasiswa dan sisanya beranggota 6 mahasiswa

$x = 5 + 6p$
$x \equiv 5 \pmod{6} \qquad \cdots(2)$

Jika kelompok terdiri dari 7 mahasiswa, maka akan ada 3 kelompok yang beranggota 8 mahasiswa dan sisanya beranggota 7 mahasiswa

$x = 3(8) + 7s$
$x = 24 + 7s$
$x = 21 + 3 + 7s$
$x = 3 + 7(s + 3)$

$x \equiv 3 \pmod 7$ $\cdots(3)$

Dari ketiga kekongruenan di atas, kita dapat menggunakan *chinese remainder theorem* sehingga diperoleh
m = 5 . 6 . 7 = 210

$M_1 = 6 . 7 = 42$
$M_2 = 5 . 7 = 35$
$M_3 = 5 . 6 = 30$

$y_1 = 42^{-1} \bmod 5 = 3$
$y_2 = 35^{-1} \bmod 6 = 5$
$y_3 = 30^{-1} \bmod 7 = 4$

$x \equiv a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 \pmod m$
$x \equiv 126 + 875 + 360 \pmod{210}$
$x \equiv 1361 \pmod{210}$
x = 101

(Hanya ada satu kemungkinan solusi, yaitu 101 karena 101 + 210 >= 200 dan 101 - 210 <= 100)

3. Seorang mahasiswa diberi tugas oleh dosennya untuk menghitung ekspresi matematika berikut : $(9^{1947} \bmod 11 - 6^{2023} \bmod 13) \bmod 15$. Tentukan hasil ekspresi tersebut.

Jawaban:

Dengan menggunakan Teorema Fermat, karena 11 dan 13 adalah bilangan ganjil, maka dapat digunakan fakta bahwa :

$\mathbf{9^{10} \equiv 1 \pmod{11}}$
$\mathbf{6^{12} \equiv 1 \pmod{13}}$

Sehingga:

$9^{1947} \bmod 11 = (9^{10})^{194} . (9^7) \bmod 11$ [Gunakan fakta bahwa $9^{10} \equiv 1 \pmod{11}$]
$= (9^7) \bmod 11$ [Gunakan fakta bahwa $9 \equiv -2 \pmod{11}$]
$= (-2)^7 \bmod 11$
$= -128 \bmod 11 = \mathbf{4}$

$6^{2023} \bmod 13 = (6^{12})^{168} . (6^7) \bmod 13$ [Gunakan fakta bahwa $6^{12} \equiv 1 \pmod{13}$]
$= (6^7) \bmod 13$
$= (6^2)^3 . 6 \bmod 13$ [Gunakan fakta bahwa $6^2 \equiv 10 \pmod{13}$]
$= 6 . 10^3 \bmod 13 = \mathbf{7}$

Diperoleh $(4 - 7) \bmod 15 = \mathbf{12}$
Sehingga jawaban untuk ekspresi di atas adalah 12

4. Terdapat sebuah *password* yang dapat terdiri dari 3 sampai 4 karakter. Pada umumnya, karakter-karakter yang dapat dijadikan password adalah *ASCII printable characters*, yaitu sebanyak 94 karakter. Dalam *ASCII printable characters* terdapat 4 jenis karakter yang utama yaitu huruf kapital (A-Z), huruf kecil (a-z), angka (0-9), dan sisanya merupakan symbol khusus. Dalam kasus ini, sebuah *password* harus memiliki tiga ketentuan berikut ini:
   1) mengandung tepat satu simbol di dalamnya,
   2) karakter paling depan adalah huruf kapital; sisa karakternya menggunakan angka,
   3) Tidak boleh ada karakter yang sama, jadi harus seperti contoh ini: A@43 atau B52$.

   Berapa banyak kombinasi *password* yang dapat memenuhi semua ketentuan tersebut?

Jawaban:

Banyak karakter simbol: $94 - 26 * 2 - 10 = 32$
Banyak karakter angka: 10
Banyak karakter huruf kapital: 26

Kasus 1: Password terdiri dari 3 karakter.
26 32 10 $*$ 2 (karena ada 2 kemungkinan posisi simbol) = 16640

Kasus 2: Password terdiri dari 4 karakter.
26 32 10 9 $*$ 3 (karena ada 3 kemungkinan posisi simbol) = 224640

Total kemungkinan = 16640 + 224640 = 241280

5. Sebuah toko kue akan segera tutup. Akan tetapi, masih tersedia 15 roti di toko tersebut. Daripada membuangnya pemilik toko memutuskan untuk membagikan roti tersebut ke empat orang, yaitu Peach, Mario, Bowser, dan Wario. Peach sangat menginginkan roti tersebut, sehingga pasti diberi minimal 1 roti, akan tetapi karena tidak bisa memakan banyak roti, ia hanya bisa ingin diberi maksimal hanya 3 saja. Mario mengatakan bahwa ia ingin tepat 2 roti saja. Karena badannya yang besar, Bowser menginginkan minimal 5 roti. Wario tidak mengatakan apapun. Sebagai pemilik toko, berapa banyak cara yang mungkin untuk anda membagikan roti dan tetap memastikan semua permintaan terpenuhi?

Jawaban:

Persoalan dapat dimodelkan dengan persamaan:

- x1 + x2 + x3 + x4 = 15, dengan variabel xi menyatakan banyaknya roti untuk Peach, Mario, Bowser, dan Mario berturut turut. .. (1)
- 1 <= x1 <= 3, karena Peach hanya ingin maksimal 3 roti dan menginginkan minimal 1 roti .. (2)
- x2 = 2, karena Mario menginginkan tepat 2 roti saja. … (3)
- x3 >= 5, karena Bowser menginginkan minimal 5 roti. …. (4)

Pertama, kita dapat menetapkan nilai x2 = 2, sehingga persamaan berubah menjadi (1) & (3):

x1 + 2 + x3 + x4 = 15
x1 + x3 + x4 = 13 … (5)

Lalu, kita dapat menyisihkan 5 roti untuk Bowser (4) & (5):

x1 + x3 + x4 = 13 - 5
x1 + x3 + x4 = 8 …. (6)

Iterasi setiap kemungkinan dalam (2) dalam persamaan (6):

- x1 = 1, maka
  x3 + x4 = 7
  Banyak kemungkinan cara pembagiannya : C(8,7) = 8

- x1 = 2
  x3 + x4 = 6
  Banyak kemungkinan cara: C(7,6) = 7

- X1 = 3
  x3 + x4 = 5
  Banyak kemungkinan cara: C(6,5) = 6

  Jadi, total cara pembagian roti tersebut adalah 8 + 7 + 6 = 21 cara

6. Diketahui bahwa *x, y,* dan *z* adalah bilangan bulat positif. Tentukan berapa banyak kemungkinan himpunan nilai-nilai *x, y,* dan *z* sehingga: (setiap subsoal merupakan persoalan yang berbeda sehingga subsoal *a* tidak mempengaruhi subsoal *b* dan sebaliknya)
   a. $x + y + z = 22$
   b. $x \cdot y \cdot z = 4320$

Jawaban:

a. Soal a adalah soal klasik memasukkan *r* buah bola yang semua berwarna sama dan tersedia *n* buah kotak, maka digunakanlah rumus *C(n+r-1,r)*. Akan tetapi, karena semua bilangan harus menjadi bilangan bulat positif maka jumlah bola harus dikurangi tiga terlebih dahulu. Dengan begitu, maka *C(3+22-3-1,22-3)* = *C(21,19)* = **210 cara**

b. Pertama-tama diubah terlebih dahulu bentuk dari 4320 menjadi faktor-faktor primanya yaitu $2^5 3^3 5$. Nilai inisial dari *x, y,* dan *z* adalah 1 dan hasil dari distribusi faktor-faktor prima tersebut akan dikalikan ke *x, y,* dan *z*. Kita hitung menggunakan rumus *C(n+r-1,r)* untuk setiap faktor prima.

   C(5+3-1,5) * *C(3+3-1,3)* * *C(1+3-1,1)* = 21 * 10 * 3 = **630 cara**