

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Rekursi & Relasi Relasi Rekurens, Aljabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Fariska Zakhralatifa, Nur Ulfa Maulidevi, Monterico Adrian
Rabu, 4 Oktober 2023
Waktu: 50 menit

1. Ucup adalah seorang mahasiswa Himpunan Mahasiswa Informatika ITB (HMIF ITB). Ucup merupakan mahasiswa yang sangat ceroboh, setidaknya sekali dalam sehari ia merusak barang di sekre HMIF. Pada suatu hari, ia menyadari bahwa uang yang ia miliki sangatlah terbatas dan merasa tidak mampu lagi untuk mengganti kerugian tersebut dengan uang. Untungnya, HMIF dapat menerima pembayaran melalui barter jasa dan tanggung jawab. Sebuah jasa dinilai seharga 5 poin dan sebuah tanggung jawab dinilai seharga 7 poin. Jika semua nilai barang dalam HMIF berupa bilangan bulat dalam satuan poin, buktikan bahwa Ucup selalu dapat membayar semua biaya kerusakan dengan total nilai n ($n \geq 28$ poin) melalui barter dengan jasa dan/atau tanggungjawabnya itu.

Jawaban:

- (i) Basis Induksi: Untuk memenuhi kegiatan dan tanggung jawab senilai 28 poin, Ucup dapat memanfaatkan 4 jasa yang bernilai 7 poin. Oleh karena itu, $p(28)$ benar.
(ii) Langkah Induksi: Anggap $p(n)$ benar, yang berarti Ucup dapat membayar semua biaya kerusakan dengan total nilai senilai n poin melalui barter dengan jasa-jasanya. Untuk $p(n+1)$ harus benar, terdapat 2 kemungkinan:

- (1) Jika terdapat setidaknya 2 tanggungjawab bernilai 7 poin (14 poin), maka untuk $p(n+1)$, Ucup dapat mengganti 2 tanggung jawab dengan 3 jasa bernilai 5 poin (15 poin).
(2) Jika terdapat setidaknya 4 jasa bernilai 5 poin (20 poin), maka untuk $p(n+1)$, Ucup dapat mengganti 4 jasa dengan 3 tanggung jawab bernilai 7 poin (21 poin).

2. Seorang *trader* sedang mengamati harga saham pada perusahaan X. Menurutnya, harga saham pada suatu tahun dapat dimodelkan dengan relasi rekurens berikut: $a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}$. Jika pada tahun pertama ($n = 0$) trader tersebut memiliki saham senilai 4 dolar, dan pada tahun kedua ($n = 1$), nilai saham tersebut menurun menjadi -1 dolar, maka:
a. Tentukan solusi relasi rekurens tersebut
b. Pada tahun ke berapa ia harus menjual sahamnya agar mendapatkan keuntungan sebesar 2445 dolar?

Jawaban:

(Bagian a)

$$a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}$$

Persamaan karakteristik:

$$r^2 = 5r + 14$$

$$r^2 - 5r - 14 = 0$$

$$(r - 7)(r + 2) = 0$$

$$r = 7, r = -2$$

$$a_n = \alpha_1(7)^n + \alpha_2(-2)^n$$

$$n = 0 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \quad (1)$$

$$n = 1 \rightarrow 7\alpha_1 - 2\alpha_2 = -1 \quad (2)$$

Dengan eliminasi/substitusi persamaan (1) dan (2), diperoleh $\alpha_1 = 7/9$ dan $\alpha_2 = 29/9$.

Sehingga solusi relasi rekurens tersebut adalah $a_n = 7/9(7)^n + 29/9(-2)^n$

3. Pada suatu hari yang cerah, terdapat kedua mahasiswa yang bertengkar, mereka meributkan apakah kedua fungsi boolean di bawah saling berkomplemen atau tidak. Seorang anak jenius bernama Bill menghampiri mereka dan memberikan arahan untuk mengubah fungsi pertama ke dalam bentuk kanonik SOP dan fungsi kedua ke dalam bentuk kanonik POS. Bantulah kedua anak tersebut untuk menentukan apakah kedua fungsi tersebut saling berkomplemen? (berikan langkah-langkahnya)
a. $f(x, y, z) = x'y + y'z'$ dalam bentuk kanonik SOP
b. $f(x, y, z) = x'y' + yz'$ dalam bentuk kanonik POS
c. Apakah kedua fungsi tersebut saling berkomplemen? Jelaskan dengan bentuk $(\sum(p,q,r,s)$ dan $\prod(a,b,c,d)$)

Jawaban:

a. Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama

$$x'y = x'y(z + z')$$

$$= x'yz + x'yz'$$

$$y'z' = y'z'(x + x')$$

$$= xy'z' + x'y'z'$$

Jadi $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + x'y'z'$

b. $f(x, y, z) = x'y' + yz'$

$$= (x'y' + y)(x'y' + z')$$

$$= (x' + y)(y' + y)(x' + z')(y' + z')$$

$$= (x' + y)(x' + z')(y' + z')$$

Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$x' + z' = x' + yy' + z' = (x' + y + z')(x' + y' + z')$$

$$y' + z' = xx' + y' + z' = (x + y' + z')(x' + y' + z')$$

Jadi $f(x, y, z) = (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z')(x + y' + z')$

c. bagian a didapat

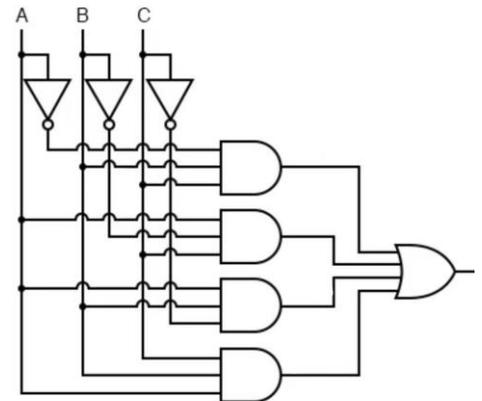
$$f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + x'y'z' \text{ atau } \sum(0,2,3,4)$$

bagian b didapat

$$f(x, y, z) = (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z')(x + y' + z') \text{ atau } \prod(3,4,5,7)$$

karena $\sum(0,2,3,4) \neq \prod(3,4,5,7)$ sehingga kedua fungsi tidak saling komplemen

4. Kalian diberi rancangan sebuah rangkaian dari seorang teman di Teknik Elektro (gambar kanan). Rangkaian ini terdiri dari gerbang AND, OR, dan NOT. Sebagai teman yang baik, kalian ingin membantunya membeli komponen rangkaian tersebut. Akan tetapi melihat kompleksitas rangkaian ini, kalian curiga bahwa rangkaian ini dapat disederhanakan.



- Ubahlah rangkaian tersebut ke dalam sebuah fungsi boolean.
- Buatlah *Truth Table* & Peta Karnaugh dari persamaan tersebut!
- Temukan persamaan hasil penyederhanaan, dan ekspresikanlah dalam bentuk rangkaian logika.
- Kalian sampai di toko elektronik dan melihat katalog harga gerbang logika sebagai berikut: harga 1 gerbang AND Rp2500, gerbang OR Rp2500, gerbang NOT Rp5000. Berapa selisih harga dari rangkaian awal dengan rangkaian kalian?

Jawaban:

A. $f(A,B,C) = A'BC + AB'C + ABC' + ABC$

B. Truth table:

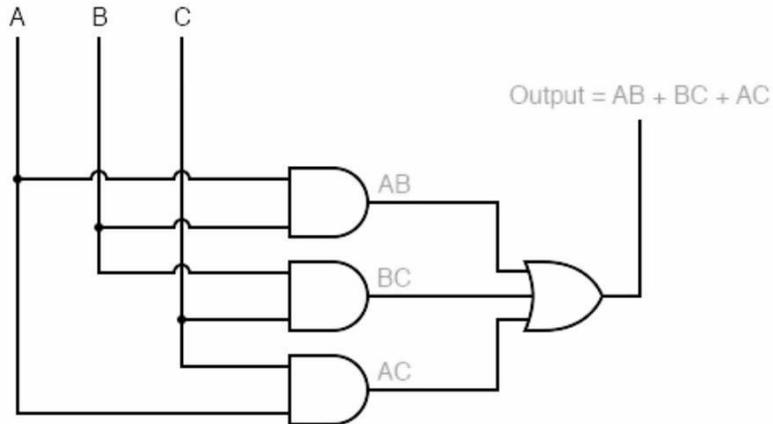
A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0

0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Peta Karnaugh:

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

C. $f(A,B,C) = AB + BC + AC$



D. Rangkaian lama terdiri dari 3 gerbang NOT, 4 gerbang AND, dan 1 gerbang OR.

Harganya adalah $3 \cdot 5000 + (4+1) \cdot 2500 = \text{Rp } 27,500$

Rangkaian baru terdiri dari 3 gerbang AND dan 1 gerbang OR.

Harganya adalah $4 \cdot 2500 = \text{Rp } 10,000$

Selisihnya adalah Rp 17,500. 😬