

1. Misalkan A dan B adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan untuk membuktikan bahwa hasil dari operasi himpunan $(A - B) \cup ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))$ adalah $A \cup B$. (sebutkan nama hukum yang digunakan). (Nilai:20)

Jawaban:

| | |
|--|---------------------|
| $((A - B) \cup (A \cap B)) \cup ((\bar{A} \cap B)$ | [Hukum Asosiatif] |
| $((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)) \cup (\bar{A} \cap B)$ | [Hukum Selisih] |
| $(A \cap (\bar{B} \cup B)) \cup (\bar{A} \cap B)$ | [Hukum Distributif] |
| $(A \cap U) \cup (\bar{A} \cap B)$ | [Hukum Komplemen] |
| $A \cup (\bar{A} \cap B)$ | [Hukum Identitas] |
| $(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)$ | [Hukum Distributif] |
| $U \cap (A \cup B)$ | [Hukum Komplemen] |
| $A \cup B$ | [Hukum Identitas] |

2. Pada sebuah toko buku, terdapat 500 buku yang dilabeli nomor 1 hingga 500. Harga dari masing-masing buku adalah Rp5.000,00. Suatu hari, seseorang datang ke toko buku tersebut dan ingin membeli buku-buku dengan ketentuan bahwa untuk buku dengan nomor 1 hingga 500, buku yang tidak dibeli adalah buku dengan nomor yang habis dibagi dengan 3 atau 7, tidak habis dibagi 5, dan tidak habis dibagi 3 dan 7. Tentukan uang yang harus dikeluarkan orang tersebut untuk membeli seluruh buku menurut ketentuan yang diinginkannya! (Nilai = 25)

Jawaban:

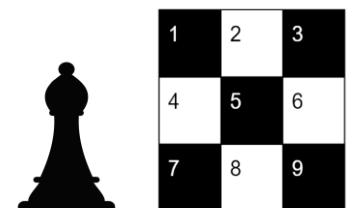
Misal:
 A = himpunan buku dengan nomor habis dibagi 3
 B = himpunan buku dengan nomor habis dibagi 5
 C = himpunan buku dengan nomor habis dibagi 7

Sesuai ketentuan pembelian,

$$\begin{aligned} \text{Total buku} &= |A \cup B \cup C| - (|A| + |C| - 2|A \cap C| - (|A \cap B| + |C \cap B| - 2|A \cap B \cap C|)) \\ &= 500 - (\text{floor}(500/3) + \text{floor}(500/7) - 2(\text{floor}(500/21)) - \text{floor}(500/15) - \text{floor}(500/35) + \\ &\quad 2(\text{floor}(500/105))) \\ &= 500 - (166 + 71 - 46 - 33 - 14 + 8) \\ &= 500 - 152 \\ &= 348 \end{aligned}$$

Total uang yang harus dibayarkan adalah $348 \times \text{Rp}5.000,00 = \text{Rp}1.740.000,00$.

3. Terdapat suatu papan catur berukuran 3×3 yang tiap-tiap bloknya ditandai angka 1 s.d. 9 dan sebuah *bishop*. Misalkan himpunan A adalah himpunan angka-angka yang merepresentasikan tiap blok pada papan catur (yaitu 1, 2, 3, s.d. 9). R adalah relasi pada A yang didefinisikan oleh $(x,y) \in R$ jika *bishop* pada blok x dapat berpindah ke blok y dalam tepat satu gerakan. Dengan kata lain, apabila suatu *bishop* terletak di blok x , maka *bishop* tersebut dapat berpindah ke blok y dalam satu gerakan yang valid (*bishop* hanya bisa bergerak secara diagonal, tidak bisa secara vertikal ataupun



Bishop Papan catur

horizontal). Sebagai contoh; $(1,5)$ dan $(1,9) \in R$, tetapi $(1,4) \notin R$. Tentukan apakah relasi R refleksif, menghantar, setangkup, dan tolak setangkup. Berikan alasan Anda.

(Nilai = 20)

Jawaban:

a. Refleksif

Tidak, karena bishop pada blok x tidak dapat berpindah ke blok x dalam tepat satu gerakan.

b. Menghantar

Tidak, karena $(1,5)$ elemen R dan $(5,7)$ elemen R , tetapi $(1,7)$ bukan elemen R

c. Setangkup

Ya, karena jika bishop dapat berpindah dari blok x ke y dalam tepat satu gerakan, maka bishop juga dapat berpindah dari posisi y ke x dalam satu gerakan. Dengan kata lain, jika (x,y) elemen R , maka (y,x) elemen R

d. Tolak setangkup

Tidak, karena $(2,6)$ elemen R dan $(6,2)$ elemen R tetapi $2 \neq 6$

4. Di sebuah kelas terdapat sebuah kelompok belajar yang memiliki tiga orang pelajar dengan daftar nama anggota kelompok sebagai berikut: (1) Naufal Putra, (2) Bill Clinton, (3) Michael Leon. Pada suatu hari mereka belajar bersama, terdapat sebuah relasi R yaitu membantu dalam belajar bersama mereka. *Masing-masing dari mereka pasti membantu dirinya sendiri dalam belajar. Naufal membantu Leon dalam belajar Matematika Diskrit. Leon membantu Bill dalam belajar Algoritma dan Struktur Data. Bill memiliki keahlian dalam Algeo namun saat ini Bill belum membantu teman-temannya.* Pada saat itu, mereka ingin relasi R (membantu belajar) pada hari itu bersifat menghantar. Apa yang harus mereka lakukan agar relasi R menjadi menghantar. (Ubah permasalahan di atas ke dalam bentuk relasi dan himpunan yang diajarkan di kelas dengan notasi angka yang melambangkan nama mereka dari satu sampai 3. (Nilai = 25)

Jawaban:

Himpunan $H = \{1, 2, 3\}$ sesuai urutan nama mereka

Himpunan H memiliki relasi $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,2)\}$

Relasi yang menghantar dapat dicari menggunakan klosur. Buat matriks M_R dari elemen-elemen relasi R

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung M_R^3

$$M_R^2 = M_R \cdot M_R$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 \cdot M_R$$

$$M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung klosur dari MR

$$M_R^+ = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3$$

$$M_R^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berarti elemen relasi yang baru adalah: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,2), (3,3)\}$

Sehingga, Naufa harus membantu Bill agar relasi tersebut dapat menghantar

5. Tentukan apakah persamaan-persamaan di bawah ini relasi atau fungsi! Diketahui $x, y \in \mathbf{R}$. Jelaskan alasannya! (Nilai = 10)
- $x^2 + 4xy + y^2 = 1$
 - $x = y^2$
 - $\sin(x) + \cos(y) = 1$
 - $y = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$

Jawaban:

- $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ – Relasi karena persamaan tersebut merupakan persamaan elips
- $x = y^2$ – Relasi karena persamaan tersebut akan memiliki dua buah nilai x untuk setiap y ketika $y > 0$
- $\sin(x) + \cos(y) = 1$ – Relasi karena sin dan cos bersifat periodik
- $y = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$ – Fungsi